درس سوم

توابع مثلثاتی

اهداف درس

۱ آشنایی با رسم توابع سینوس و کسینوس در صفحهٔ مختصات از طریق نقطه‌یابی
۲ آشنایی با ویژگی‌های توابع سینوس و کسینوس
۳ رسم تابع با ضابطهٔ $y=a\ \sin(x+b)$ به کمک انتقال $y=\sin x$
۴ رسم تابع با ضابطهٔ $y=a\ cos(x+b)$ به کمک انتقال $y=\cos x$

پیش‌نیازها

۱ محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس تمامی زوایا
۲ آشنایی با مفهوم بازه‌ها
۳ شناخت دامنه و برد
۴ درک مفاهیم انتقال عمودی، افقی، انبساط و انقباض در راستای محور yهای نمودار توابع

روش تدریس

دانش‌آموز پس از مطالعه و آموزش این درس توسط معلم باید بتواند :

۱ تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کند.
۲ تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ را از طریق نقطه‌یابی رسم کند.
۳ پس از رسم هر یک از توابع مذکور در یک تکرار، نمودار حاصل را در تکرارهای دیگر نیز رسم کند.

۴ با استفاده از نمودار هر یک از توابع فوق، نمودار توابعی که از طریق انتقال، قرینه کردن (نسبت به یکی از محورها) یا انقباض و انبساط آنها حاصل می‌شوند را رسم کند.

۵ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس ویژگی‌های هر کدام از این توابع را در ربع‌های مختلف دایره مثلثاتی و رفتار این توابع را در نقاط خاص مشخص کند.

توصیه‌ها

۱ از آموزش مفهوم دوره تناوب در رسم نمودار توابع مثلثاتی اجتناب شود.

۲ از آموزش رسم توابع تانژانت و کتانژانت اجتناب شود.

۳ در رسم توابع، روی رسم نمودار توابع باضابطه $y = a\sin(x + b)$ یا $y = a\sin x + b$ (a و b دو مقدار مفروض هستند) بحث شود و از آموزش رسم نمودار توابع باضابطه $y = a\sin kx + b$ یا $y = a\sin(kx + b)$ (a، b، k مقادیر مفروض هستند) اجتناب شود. ضمن آنکه مقادیر a و b طوری درنظر گرفته شود که امکان رسم نمودار به آسانی فراهم باشد و مشکلی برای دانش‌آموز هنگام رسم به‌وجود نیاید.

وسایل مورد نیاز : خط‌کش ــ ماشین حساب

رسم تابع سینوس

فعالیت صفحه ۸۸

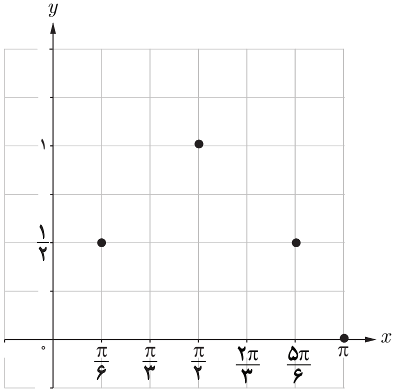
هدف از ارائه این فعالیت رسم گام به گام نمودار تابع باضابطهٔ $y = \sin x$ از طریق نقطه‌یابی است.

۱ در ابتدایی فعالیت جدول به‌صورت مقابل کامل شود. بنابراین تابع f به‌صورت زیر مشخص می‌شود :

x	$y = \sin x$	مختصات نقطه
۰	۰	(۰,۰)
$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$	$(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$
$\frac{\pi}{۲}$	۱	$(\frac{\pi}{۲},۱)$
$\frac{۵\pi}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$	$(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$
π	۰	$(\pi,۰)$

$$f = \left\{(۰,۰),(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\frac{\pi}{۲},۱),(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\pi\ ,\ ۰)\right\}$$

۲ نقاط گام قبلی را به صورت مقابل در صفحهٔ مختصات نمایش دهید. توجه شود که در محور افقی بازهٔ $[\circ,\pi]$ به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده که اندازهٔ هر قسمت $\frac{\pi}{۶}$ است.



۳ با افزودن نقاط $(\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲})$، $(\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲})$، $(\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ به جدول بالا، شکل زیر به‌دست می‌آید.

(با فرض $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ و $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$)

$$(\frac{\sqrt{۳}}{۲} \simeq \circ/۸۷ \ , \ \frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq \circ/۷۱)$$

در شکل این قسمت نقاط جدید (با رنگ قرمز) به همراه نقاط قبلی (به رنگ آبی) رسم شده‌اند. توجه شود که در این شکل محور افقی در بازهٔ $[\circ,\pi]$ به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم شده که اندازهٔ هر قسمت $\frac{\pi}{۱۲}$ است.

۴ در این گام، نقاط حاصل را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید. در هنگام رسم، با توجه دانش‌آموز به این مطلب جلب شود که نقاط به شکل منحنی به یکدیگر وصل می‌شوند نه خط راست و برای اطمینان از این موضوع باید تعداد نقاط را بیشتر نمود.

۵ برای رسم نمودار این تابع در بازه $[\pi,۲\pi]$ ابتدا جدول داده شده در این گام را به‌صورت زیر کامل کنید تا پس از مشخص شدن این نقاط در صفحه مختصات و وصل کردن آنها به یکدیگر نمودار رسم شده حاصل شود.

x	$y=\sin x$	مختصات نقطه
π	۰	$(\pi, ۰)$
$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{-۱}{۲}$	$(\frac{۷\pi}{۶}, \frac{-۱}{۲})$
$\frac{۳\pi}{۲}$	-۱	$(\frac{۳\pi}{۲}, -۱)$
$\frac{۱۱\pi}{۶}$	$\frac{-۱}{۲}$	$(\frac{۱۱\pi}{۶}, \frac{-۱}{۲})$
۲π	۰	$(۲\pi, ۰)$

۶ با ادغام دو نمودار حاصل در شکل‌های گام‌های ۴ و ۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ در بازه $[۰, ۲\pi]$ همان طوری که در صفحه ۸۹ رسم شده است به‌دست می‌آید. مطابق این نمودار جدول زیر رفتار تابع سینوس را در هر یک از ربع‌های چهارگانه مشخص می‌کند.

$\left[\frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi\right]$	$\left[\pi, \frac{۳\pi}{۲}\right]$	$\left[\frac{\pi}{۲}, \pi\right]$	$\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$
مقدار تابع سینوس از ۱− به ۰ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱− کاهش می‌یابد.	مقدار تابع سینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
مقدار تابع سینوس در ربع چهارم منفی است.	مقدار تابع سینوس در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع سینوس در ربع دوم مثبت است.	مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.

در این قسمت معلم می‌تواند با رسم دایره مثلثاتی رفتار نسبت مثلثاتی سینوس را با رفتار تابع سینوس در هر ربع مقایسه کند.

۷ با توجه به رابطهٔ $\sin(x+۲k\pi) = \sin x$ ، $k\in\mathbb{Z}$، که در درس قبل آشنا شدید می‌توان گفت:

$\sin(x+۲\pi)= \sin x$

یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن ۲π رادیان به کمان آن تغییری نمی‌کند. بنابراین نمودار تابع سینوس

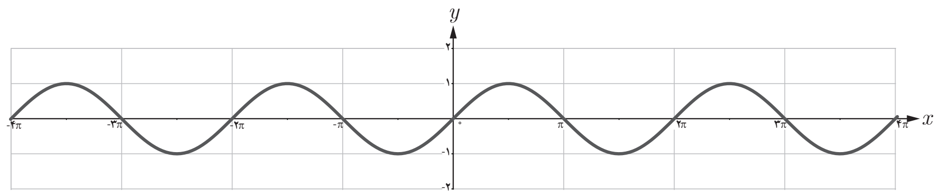
در بازه‌های [۲π و ۰] و [۴π , ۲π] یکسان است.

همچنین داریم :

$$\sin(x-۲\pi)=\sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن ۲π رادیان از کمان آن تغییری نمی‌کند. در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های [۲π , ۰] و [۰ , ۲π−] یکسان است. در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند، نمودار تابع سینوس در بازه‌های [π (۲+۲k) و ۲kπ]، $k\in\mathbb{Z}$، یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در بازه [۲π , ۰] رسم شده در بازه‌های [۴π , ۲π]، [۶π , ۴π]، [۰ , ۲π−]، [۲π− , ۴π−] تکرار می‌شود.

در شکل زیر نمودار تابع سینوس در ۲ تکرار رسم شده است. این نمودار را برای ۴ تکرار کامل کنید.



۸ با توجه به شکل بالا جاهای خالی را دربارهٔ ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع سینوس $\mathbb{R}$ و برد آن [۱و۱−] است.

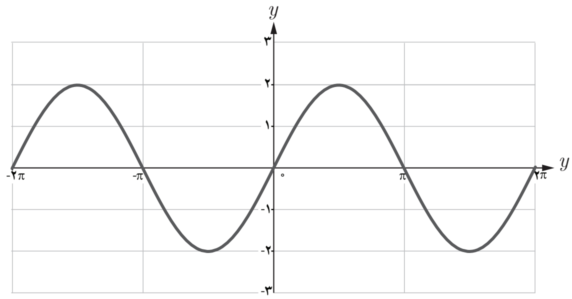
ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x=k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ۱ است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{\pi}{۲}$، $x=\frac{۵\pi}{۲}$، $x=\frac{-۳\pi}{۲}$، $x=\frac{-۷\pi}{۲}$ و در حالت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید. (در این قسمت از دانش‌آموزان خواسته شود طول‌ها، نقاطی که مقدار تابع به ازای آنها ۱ می‌شود در شکل مشخص کنند، همچنین با مقدار دهی به k این طول‌ها را از روی رابطه کلی نیز به‌دست آورند.)

ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با ۱− است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{۳\pi}{۲}$، $x=\frac{۷\pi}{۲}$، $x=\frac{-\pi}{۲}$، $x=\frac{-۵\pi}{۲}$ و در حالت کلی $x=\frac{۳\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید. (مشابه قسمت قبل این نقاط هم روی شکل و هم با مقدار دهی به k مشخص شود.)

کار در کلاس صفحه ۹۰

هدف از این کار در کلاس افزایش مهارت دانش‌آموز در رسم نمودار آن دسته از توابع مثلثاتی است که از طریق انتقال تابع با ضابطه y=sin$x$ با قرینه کردن نمودار آن نسبت به یکی از محورها و یا با انقباض یا انبساط آن به‌دست می‌آیند. به عنوان نمونه برای رسم تابع با ضابطهٔ y=۲sin$x$ در بازهٔ [۲π و ۰] چون برد این تابع بازهٔ [۲و۲−] است کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ y=sin$x$ را روی این بازه انبساط دهیم. نمودار حاصل در بازهٔ [۰و۲π−] نیز تکرار می‌شود و شکل زیر به‌دست می‌آید :



برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ y=sin$x$+۱ کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ y=sin$x$ را به اندازه یک واحد در جهت محور عمودی انتقال دهیم تا شکل ب حاصل شود.

برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sin(x - \frac{\pi}{۲})$ کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ واحد در جهت محور افقی انتقال دهیم تا شکل پ حاصل شود.

برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y= -\sin x +۱$ ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -\sin x$ را با قرینه‌کردن نمودار تابع سینوس نسبت به محورxها رسم نموده و سپس نمودار حاصل را به اندازهٔ یک واحد در جهت محور yها انتقال دهیم تا شکل ت حاصل شود. در این قسمت می‌توان با نقطه‌یابی نیز نمودار صحیح را یافت بنابراین روی این مطلب نیز در کلاس بحث شود.

رسم تابع کسینوس

این فعالیت مشابه با فعالیت قبلی به منظور آشنایی دانش‌آموز با رسم نمودار تابع با ضابطهٔ y=cos$x$ مطرح می‌شود.

فعالیت صفحه ۹۱

۱ جدول زیر را کامل کنید.

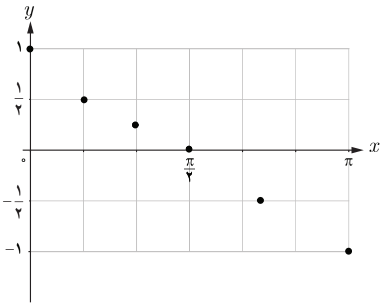
x	$y=\cos x$	مختصات نقطه
۰	۱	$(۰,۱)$
$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \simeq ۰/۷$	$(\frac{\pi}{۴}, ۰/۷)$
$\frac{\pi}{۲}$	۰	$(\frac{\pi}{۲}, ۰)$
$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{-\sqrt{۲}}{۲} \simeq -۰/۷$	$(\frac{۳\pi}{۴}, -۰/۷)$
π	-۱	$(\pi, -۱)$

به این ترتیب مجموعه زوج‌های مرتب زیر به‌دست می‌آید.

$$f = \{(۰,۱), (\frac{\pi}{۴}, ۰/۷), (\frac{\pi}{۲}, ۰), (\frac{۳\pi}{۴}, -۰/۷), (\pi, -۱)\}$$

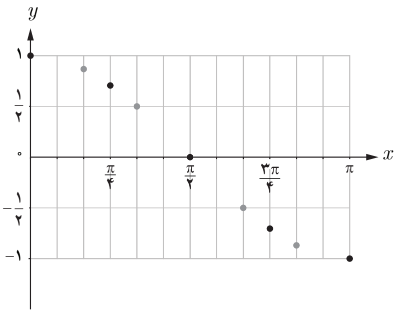
آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟ بله

۲ نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.



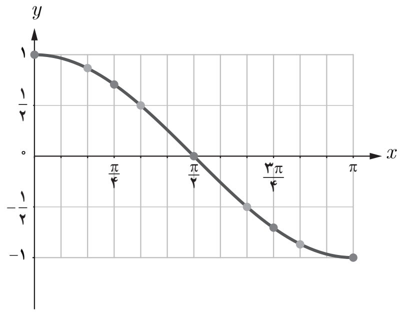
۳ نقاط به طول‌های $x = \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۶}$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به‌دست آید.

$(\sqrt{۳} \simeq ۱/۷)$.



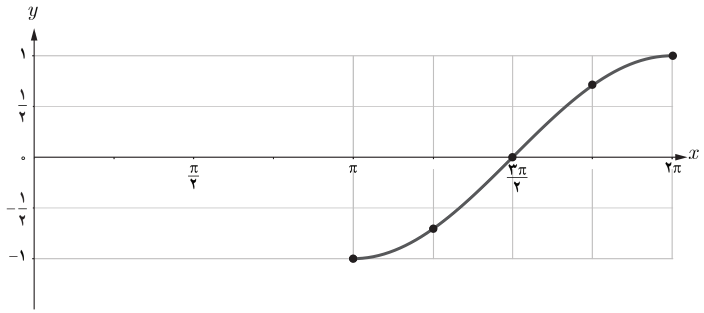
x	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$
$y=\cos x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$

۴ نقاط شکل صفحهٔ قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست آید. این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y=\cos x$ را در بازهٔ $[0, \pi]$ مشخص می‌کند.

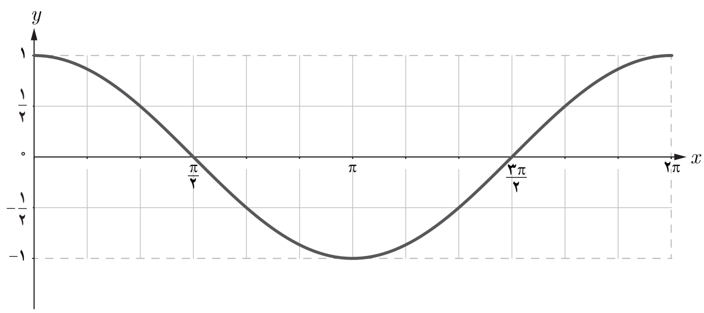


۵ جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[\pi$ و $2\pi]$ به‌صورت شکل مقابل به‌دست آید.

x	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

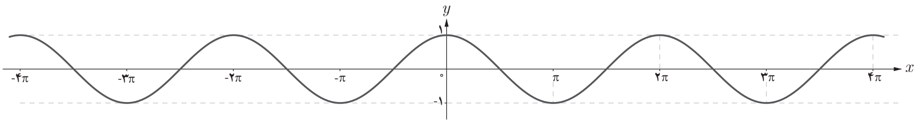


۶ با توجه به مراحل بالا نمودار تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.



$[\circ,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	مقدار تابع کسینوس از صفر به ۱− کاهش می‌یابد.	مقدار تابع کسینوس از ۱− به ۰ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع کسینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع کسینوس در ربع دوم منفی است.	مقدار تابع کسینوس در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع کسینوس در ربع چهارم مثبت است.

۷ تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[\circ,۲\pi]$، $[۲\pi,۴\pi]$، $[-۲\pi,\circ]$ و $[-۴\pi,-۲\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[\circ,۴\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.



۸ با توجه به شکل صفحهٔ قبل جاهای خالی را درخصوص ویژگی‌های تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ کامل کنید.

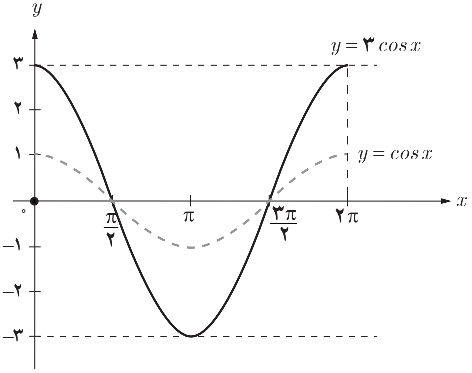
الف) دامنهٔ تابع کسینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-۱,۱]$ است.

ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های $x=\frac{k\pi}{۲}$ برابر با صفر است. $(k\in\mathbb{Z})$

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس ۱ است که در طول‌های $x=۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس ۱− است که در طول‌های $x=(۲k+۱)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ به‌دست می‌آید.

کار در کلاس صفحه ۹۳



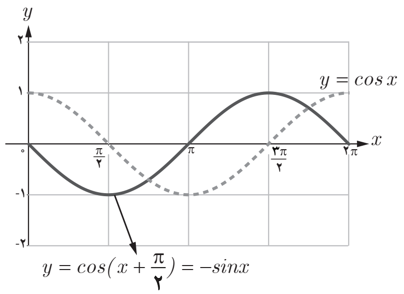
شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳\cos x$ را نشان می‌دهد. به‌طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازهٔ $[\circ,۲\pi]$، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.

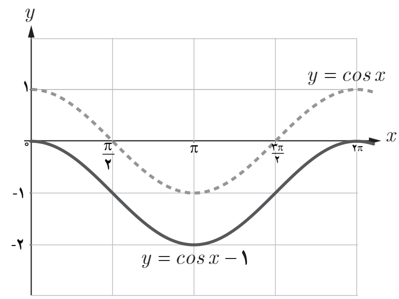
۱) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

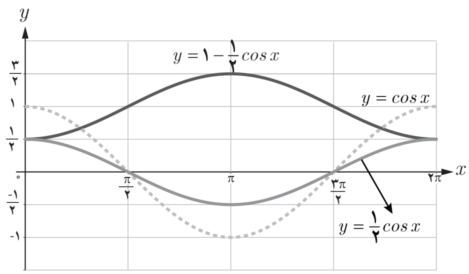
۲) $y=\cos x-۱$

۳) $y = ۱ - \frac{۱}{۲}\cos x$

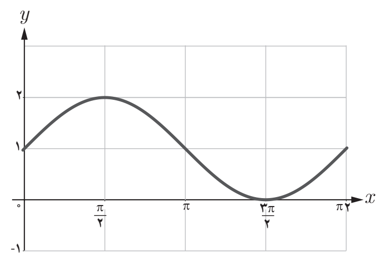
۴) $y = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) + ۱$







$y = ۱ \div \frac{۱}{۲}\cos x$



$y = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) + ۱$

حل تمرین درس سوم

۱

$$۱- \begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos(x - \frac{\pi}{۲}) = \cos(-(\frac{\pi}{۲} - x)) = \cos(\frac{\pi}{۲} - x) = \sin x \end{cases}$$

این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$\text{۲ــ}\begin{cases} y=\cos x \\ y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x \end{cases}$$

این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$\text{۳ــ}\begin{cases} y=\cos x \\ y=\cos(۲\pi-x)=\cos x \end{cases}$$

این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$\text{۴ــ}\begin{cases} y=\sin x \\ y=\sin(۵\pi-x)=\sin(۴\pi+\pi-x)=\sin(\pi-x)=\sin x \end{cases}$$

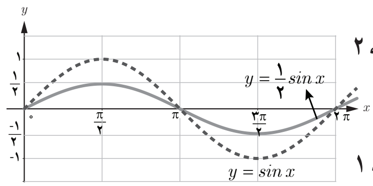
این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲

به دانش‌آموزان متذکر شویم برای پاسخ دادن به این سؤال از روش انتقال استفاده کنند و سپس با توجه به بازه‌های داده شده نمودار را مشخص کنند.

۱) $y=\frac{۱}{۲}\sin x\ ,\ [۰,۲\pi]$

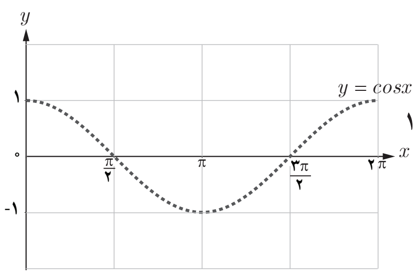
مرحله ۲



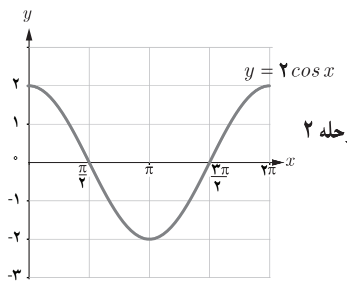
مرحله ۱

ابتدا ضابطه را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم و سپس این نمودار را در بازهٔ $[-۲\pi,۰]$ تکرار می‌کنیم. در ضمن رسم نمودار در سه مرحله انجام بگیرد تا دانش‌آموزان بهتر متوجه شوند.

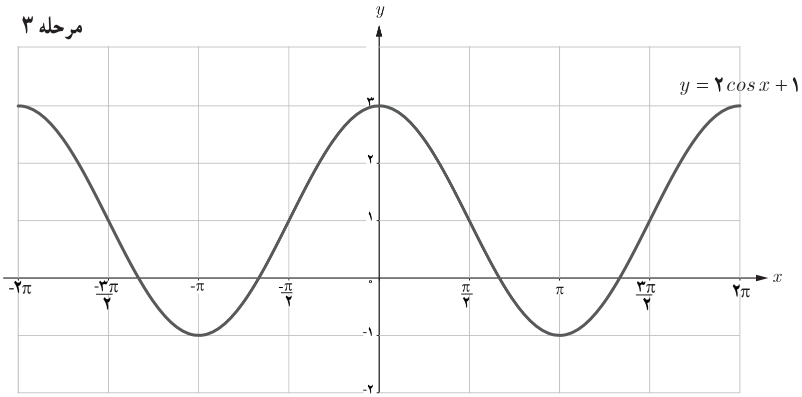
۲) $y=۲\cos x+۱\ ,\ [-۲\pi\ ,۲\pi]$



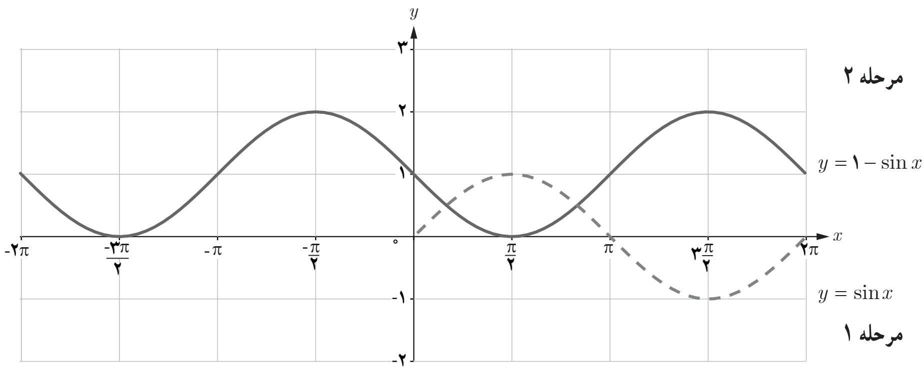
مرحله ۱



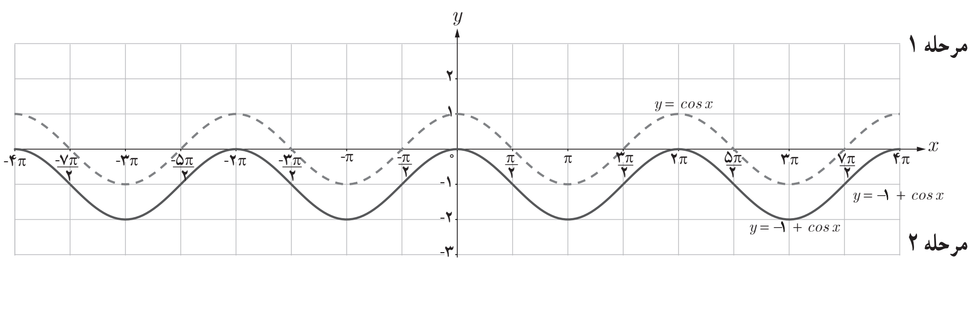
مرحله ۲



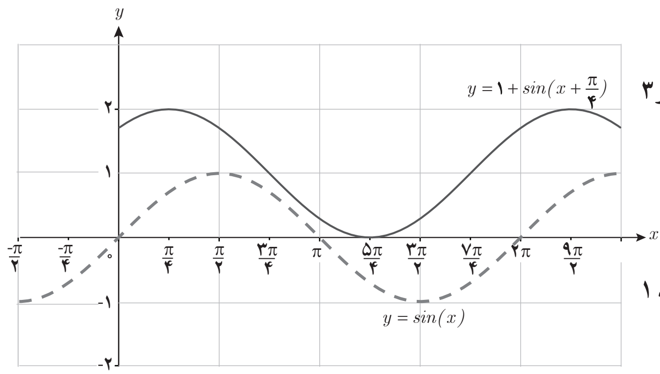
۳) y=۱−sin$x$, [−۲π ,۲π]



۴) y=−۱+ cos$x$, [−۴π ,۴π]



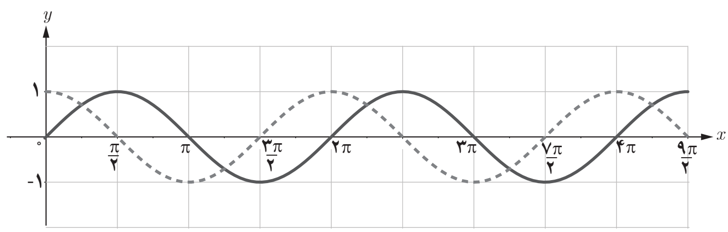
۵) $y = ۱ + \sin(x + \frac{\pi}{۴})\ ,\ [۰, ۲\pi]$



ابتدا $y=\sin x$ را در بازه $[۰, ۲\pi]$ رسم کنید و سپس به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ به سمت چپ انتقال دهید و در پایان نمودار را ۱ واحد به سمت بالا انتقال دهید. با توجه به بازهٔ داده شده نمودار را حذف کرده و یا امتداد دهید.

۶) $y = \cos(x - \frac{\pi}{۲})\ ,\ [۲\pi, ۴\pi]$

راه حل پیشنهادی دیگری که می‌توان ارائه داد، ساده‌کردن ضابطه و تبدیل آن به تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ است سپس می‌توان ضابطهٔ فوق را در بازهٔ خواسته شده رسم کرد.

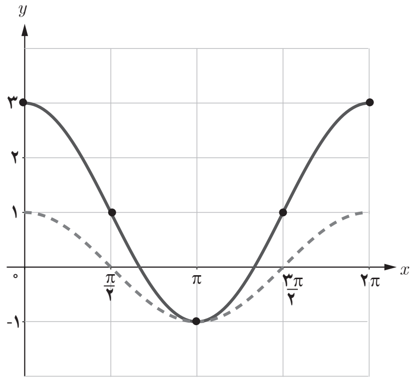


۳

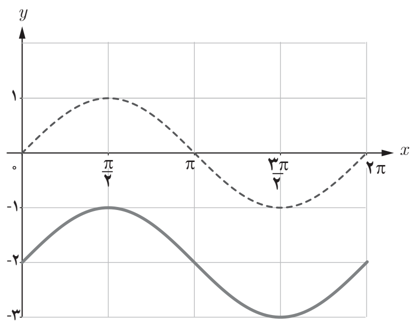
نمودار سمت راست : ضابطهٔ $y=۲\sin x-۱$ (قسمت ب)

نمودار سمت چپ : ضابطهٔ $y=۲-\cos x$ (قسمت پ)

الف) $y=۲\cos x+۱$



ت) $y=\sin x-۲$



۴

الف) درست است. (مقدار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$، $\frac{۱}{۲}$ برابر شده است.)

ب) درست است. (تابع با ضابطه $y=\cos x$ به اندازه $\frac{۱}{۲}$ واحد به سمت راست انتقال یافته است.)

پ) نادرست است. (نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ باید ۱ واحد در راستای محور yها انتقال یابد نه محور xها.)

ت) درست است.

برای پاسخ دادن به این سؤال کافی است از روش انتقال و مفاهیم آن استفاده کرد و در قسمت (پ)، ضابطه داده شده را با تابع با ضابطهٔ $y=\sin(x-۱)$ مقایسه کنید.

نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ زاویه‌های -90°، -120° و 585° را به رادیان تبدیل کنید.

۲ زاویه‌های $\frac{11\pi}{18}$ رادیان، $\frac{\pi}{9}$ رادیان، $\frac{-4\pi}{5}$ رادیان و ۲- رادیان را به درجه تبدیل کنید.

۳ طول کمان روبه‌روی زاویهٔ 135° در دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر چند است؟

۴ زاویهٔ 660° را به رادیان و زاویهٔ $\frac{7\pi}{6}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید.

۵ یک پیتزا به قطر ۲۵ سانتی‌متر را به ۸ قسمت مساوی برش می‌دهیم اندازه کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی در هر قطاع چند سانتی‌متر است؟

۶ عبارت $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}+\cos\alpha$ را ساده کنید.

۷ عبارت $\frac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$ را ساده کنید.

۸ اگر $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه x را تعیین کنید.

۹ حاصل $\tan^2\frac{2\pi}{7}-\cos^2\frac{\pi}{5}+\frac{1}{\cos^2\frac{2\pi}{7}}+\sin^2\frac{\pi}{5}$ را بیابید.

۱۰ ثابت کنید :

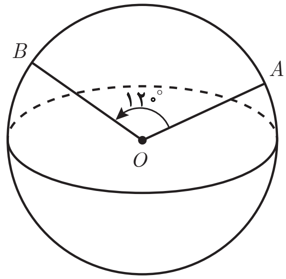
الف) $\frac{1+\sin x}{\sin x}+\frac{\cot x-\cos x}{\cos x}=\frac{2}{\sin x}$

ب) $\sin(\frac{3\pi}{2})\times\cot^2(\frac{\pi}{3})+\cos^2\pi\times\tan\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}$

۱۱ اگر $\tan\beta=\frac{3}{4}$ و $\sin\beta<0$ ، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ β را بیابید.

۱۲ حاصل عبارت $\tan14^\circ-\cot76^\circ+\sin35^\circ-\cos55^\circ$ را به دست آورید.

۱۳ فاصلهٔ دو نقطه A و B روی کره زمین که نسبت به مرکز زمین با یکدیگر زاویهٔ 120° می‌سازند چند



کیلومتر است؟ شعاع کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

۱۴ حاصل $\tan ۱^\circ \times \tan ۲^\circ \times ... \times \tan ۸۹^\circ$ را بیابید.

۱۵ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۳۳۰° را به‌دست آورید.

۱۶ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{-۷\pi}{۶}$ رادیان را به‌دست آورید.

۱۷ حاصل کسر $\frac{\sin(\frac{-۹\pi}{۴}) - \tan(۳\pi)}{\tan(-۶\pi) + \cos(\frac{۹\pi}{۴})}$ رابیابید.

۱۸ عبارت $\cos ۲۵^\circ \times \sin ۷۵^\circ + \cos ۷۵^\circ \times \sin ۲۵^\circ$ را ساده کنید.

۱۹ نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{۱۷\pi}{۴}$ رادیان را به‌دست آورید.

۲۰ حاصل عبارت $\cos(\frac{-۷\pi}{۶}) \times \tan(\frac{-۱۱\pi}{۶}) + \cos(\frac{-۵\pi}{۶})$ را بیابید.

۲۱ مشخص کنید هر یک از زاویه‌های ۷۲۰°، ۴۵۰°، ۲۲۵° با چه زاویه‌هایی هم انتها هستند، سپس حاصل $\sin ۲۲۵^\circ + \cos ۴۵۰^\circ - \tan ۷۲۰^\circ$ رابیابید.

۲۲ هر یک از نمودارهای توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازه‌های خواسته شده رسم کنید.

الف) $y = ۲\sin(x + \frac{\pi}{۲}) \quad , \quad x \in [۰, ۴\pi]$

ب) $y = ۱ + \cos(\frac{\pi}{۲} - x) \quad , \quad x \in [-۲\pi, ۲\pi]$

پ) $y = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin x \quad , \quad x \in [۰, ۲\pi]$

ت) $y = -\cos(-x) + ۲ \quad , \quad x \in [۰, ۲\pi]$

۲۳ هر یک از زوایای زیر را به رادیان تبدیل کرده و آن را روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش دهید :

الف) ۱۸° ب) -۵۴° پ) ۸۴°

ت) -۲۱۵° ث) ۳۳۰° ج) -۴۲۰°

۲۴ هر یک از زوایای زیر را به درجه تبدیل کنید و سپس آن را به‌طور تقریبی روی دایرهٔ مثلثاتی نمایش دهید :

الف) $\frac{-\pi}{۹}$ ب) $\frac{۲\pi}{۵}$ پ) $-\frac{۳\pi}{۸}$

ت) $\frac{۷\pi}{۹}$ ث) $\frac{۱۷\pi}{۶}$ ج) $\frac{-۲۰\pi}{۳}$

۲۵ مجموع دو زاویه ۳۸۵° و تفاضل آنها $\frac{۱۳\pi}{۳۶}$ رادیان است. اندازهٔ این دو زاویه برحسب رادیان چقدر است؟

۲۶ در دایره‌ای به شعاع ۸ سانتی‌متر، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است. طول کمان متناظر به آن زاویه را به‌دست آورید.

۲۷ طول برف پاک‌کن یک ماشین ۴۰ سانتی‌متر است. زاویهٔ دوران چقدر باشد تا انتهای تیغهٔ برف پاک‌کن مسافت ۳۰ سانتی‌متر را طی کند؟

۲۸ مسافت پیموده شده توسط نقطه‌ای روی محیط یک چرخ به شعاع ۲۴ سانتی‌متر، هنگامی که چرخ ۸ دور می‌زند چقدر است؟

۲۹ الف) اندازهٔ زاویه‌ای که عقربهٔ ساعت شمار از ۱ بعد از ظهر تا ۶ غروب طی می‌کند، چند رادیان است؟

ب) در مدت ۴۸ دقیقه هر یک از عقربه‌های ساعت چند رادیان طی می‌کنند؟

۳۰ چرخی در ۵ دقیقه ۷۵۰ دور می‌چرخد زاویهٔ چرخش این چرخ در مدت یک ثانیه چند رادیان است؟

۳۱ چند دقیقه طول می‌کشد تا عقربهٔ دقیقه شمار یک ساعت، به اندازهٔ $\frac{۴\pi}{۳}$ رادیان دوران کند؟

۳۲ با استفاده از مضارب ۱۸۰° و مانند الگو، تعیین کنید که انتهای کمان هر یک از زاویه‌های صفحه بعد منطبق برکدام نقطهٔ مشخص شده روی دایرهٔ مثلثاتی است؟

الف) ۱۹۰° = ۱۸۰° + ۱۰° → C انتهای کمان نقطهٔ

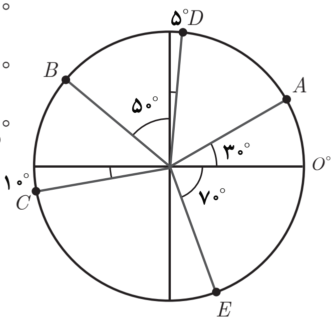
ب) ۴۳۰°-

پ) ۷۵۰°

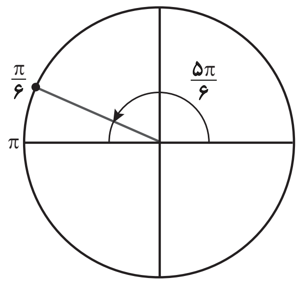
ت) ۱۲۲۰°

ث) ۱۵۸۰°

ج) ۹۹۵°-



۳۳ با استفاده از مضارب π و مانند الگو، انتهای کمان هر یک از زاویه‌های زیر را به‌طور تقریبی روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنید.



الف) $\frac{۵\pi}{۶} = \pi - \frac{\pi}{۶}$

ب) $\frac{۴\pi}{۳}$

پ) $\frac{۲۱\pi}{۱۰}$

ت) ۳π

ث) ۱۰π

ج) $\frac{۹\pi}{۲}$

چ) $\frac{-۱۳\pi}{۲}$

ح) $\frac{۲۱\pi}{۴}$

خ) $\frac{۳۷\pi}{۳}$

د) $\frac{-۵۵\pi}{۷}$

ذ) $\frac{۷۷\pi}{۶}$

ر) $\frac{-۸۳\pi}{۴}$

ز) $\frac{۱۱۱\pi}{۵}$

۳۴ روی دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ $P(۱ , ۰)$ تحت زاویهٔ $\frac{۳۷\pi}{۶}$ رادیان حول مبدأ، دوران می‌کند. مختصات جدید نقطهٔ P را بیابید.

۳۵ انتهای کمان هر یک از زاویه‌های زیر در کدام ناحیه از نواحی چهارگانهٔ دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

الف) ۳۹۵°

ب) ۲۳۷-

پ) ۱۱۰۰

ت) ۸۶۰°-

ث) $\frac{۱۶\pi}{۵}$

ج) $\frac{۴۷\pi}{۴}$

چ) $\frac{۵۶\pi}{۳}$

ح) ۲ رادیان

خ) ۱۹ رادیان

۳۶ فرض کنید $\alpha = \frac{\pi}{9}$ باشد، در هر یک از بازه‌های زیر زاویه‌ای پیدا کنید که انتهای کمان آن زاویه، بر انتهای کمان α منطبق باشد :

الف) $[\pi, 3\pi]$ ب) $[-2\pi, -\pi]$ پ) $\left[\frac{15\pi}{2}, \frac{19\pi}{2}\right]$

۳۷ اگر $\sin^4\alpha \cos\alpha > 0$ و $\cos\alpha \sin\alpha < 0$، آنگاه انتهای کمان زاویهٔ α در کدام ناحیه از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

۳۸ علامت هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین کنید. (زاویه‌های داده شده برحسب رادیان هستند)

الف) $\sin\frac{11\pi}{9}$ ب) $\cos 3$

پ) $\cot(-2)$ ت) $\tan(\frac{-6\pi}{7})\cot(3\pi + \frac{9\pi}{5})$

ث) $\frac{\sin(8\pi + 6)\cos(-33)}{\tan(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{5})}$ ج) $\sin(\frac{100\pi}{3}) + \tan(\frac{19\pi}{4})$

۳۹ اگر $\sin x = 0/7$ باشد، هر یک از مقادیر زیر را محاسبه کنید :

الف) $\sin(-x)$ ب) $\sin(\pi + x)$ پ) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(x + 5\pi)$

ت) $\sin(x - \pi)\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$ ث) $\sin(x - 4\pi)$ ج) $\sin(19\pi - x) - \cos(\frac{3\pi}{2} + x)$

۴۰ اگر $\cos\theta = m$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید :

الف) $\cos(\pi - \theta)$ ب) $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ پ) $\sin(\theta + \frac{3\pi}{2})$

ت) $\cos(35\pi + \theta)$ ث) $\sin(\frac{23\pi}{2} + \theta)$ ج) $\sin(\theta - \frac{3\pi}{2}) - \cos(\theta + 2\pi)$

۴۱ حاصل هر یک از عبارات زیر را برحسب نسبت‌های مثلثاتی α بنویسید :

الف) $\cos(20\pi + \alpha)$ ب) $\sin(\alpha - 19\pi)$ پ) $\cot(28\pi + \alpha)$

ت) $\sin(\frac{۳۷\pi}{۲}+\alpha)$ ث) $\tan(\alpha-\frac{۷\pi}{۲})$ ج) $\sin(\frac{۱۵\pi}{۲}-\alpha)+\cos(\alpha-۲۱\pi)$

۴۲ نسبت‌های مثلثاتی هر یک از زاویه‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) ۱۲۰° (با استفاده از زاویهٔ مکمل) ب) $\frac{-۵\pi}{۴}$

پ) ۳۹۰° ت) $\frac{۲۳\pi}{۶}$

ث) -۹۰۰° ج) $\frac{۱۹\pi}{۲}$

۴۳ فرض کنید $\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ x در ناحیهٔ چهارم باشد. مطلوب است محاسبهٔ هر یک از مقادیر زیر :

الف) $\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)$ ب) $\sin(۵۱\pi+\alpha)$

پ) $\tan(۳\pi-\alpha)$ ت) $\cot(۸\pi+\alpha)$

۴۴ اگر $\tan\alpha=۲$ و انتهای کمان زاویهٔ α در ربع سوم باشد، هر یک از مقادیر زیر را به‌دست آورید :

الف) $\tan(\frac{۵\pi}{۲}-\alpha)$ ب) $\cos(۳۳\pi+\alpha)$ پ) $\cot(\alpha-۵\pi)$

ت) $\sin(\alpha+۶\pi)$ ث) $\cot(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ ج) $\cos(\frac{۱۶۱\pi}{۲}+\alpha)$

۴۵ اگر $\tan۱۵^\circ=m$، حاصل عبارت $\frac{\sin۷۵^\circ+۳\cos۱۹۵^\circ}{\cos۱۰۵^\circ-\cos۲۸۵^\circ}$ را به‌دست آورید.

۴۶ فرض کنید $\sin x=\frac{۱}{۲}$ ،

الف) دو مقدار برای x در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ پیدا کنید.

ب) در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ چند مقدار برای x می‌توان یافت؟

پ) فرمولی برای یافتن همهٔ مقادیر x ارائه کنید.

۴۷ الف) یک مقدار برای x ارائه کنید که در تساوی $\cos(x-\frac{\pi}{۷})=\sin x$ صدق کند؟

ب) آیا مقادیر دیگری برای x، می‌توان پیدا کرد که در تساوی فوق صدق کنند؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، xهای صادق در تساوی صفحه قبل را معرفی کنید.

۴۸ درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید:

الف) $\dfrac{\sin ۲۲۵^\circ + \cos ۴۹۵^\circ}{\tan ۳۱۵^\circ} = \sqrt{۲}$

ب) $\sin ۹۶۰^\circ \cos(-۵۷۰^\circ) + \tan(\dfrac{۱۳\pi}{۶}) \cot(\dfrac{-۵\pi}{۶}) = \dfrac{۷}{۴}$

پ) $\sin ۲۳۰^\circ - ۲\sin ۱۴۰^\circ + \sin ۴۱۰^\circ + \sin ۵۰^\circ + \cos(-۵۰^\circ) + \sin ۴۰^\circ = \cos ۴۰^\circ$

ت) $\tan(۱۰\pi + x)\cot(۳\pi + x) + \cos(۴\pi - x)\sin(\dfrac{۳\pi}{۲} - x) = \sin^۲ x$

ث) $۳\tan ۳۱۰^\circ + \cot ۲۲۰^\circ - \tan ۵۰^\circ - ۵\tan ۱۳۰^\circ - ۲\cot ۳۲۰^\circ = ۴\tan ۵۰^\circ$

ج) $\cos(\dfrac{\pi}{۲} - \theta)\sin(۱۹\pi - \theta) - \cos(\theta - ۳۷\pi)\sin(\dfrac{\pi}{۲} + \theta) = ۱$

۴۹ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABC}$ $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، ثابت کنید:

$$\frac{\cos B + \cos c}{\sin B + \sin c} = \sin A$$

۵۰ در هر مورد مشخص کنید که آیا نمودار توابع داده شده بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

الف) $y = \sin x \quad , \quad y = \sin(۳\pi - x)$

ب) $y = \cos x \quad , \quad y = \sin(\text{——} - x)$

پ) $y = \cos(\dfrac{۱۵\pi}{۲} + x) \quad , \quad y = \cos(x - \dfrac{\pi}{۲})$

ت) $y = \sin(\dfrac{۳\pi}{۲} + x) \quad , \quad y = \cos(x - ۲\pi)$