



فصل ٤

مثلثات

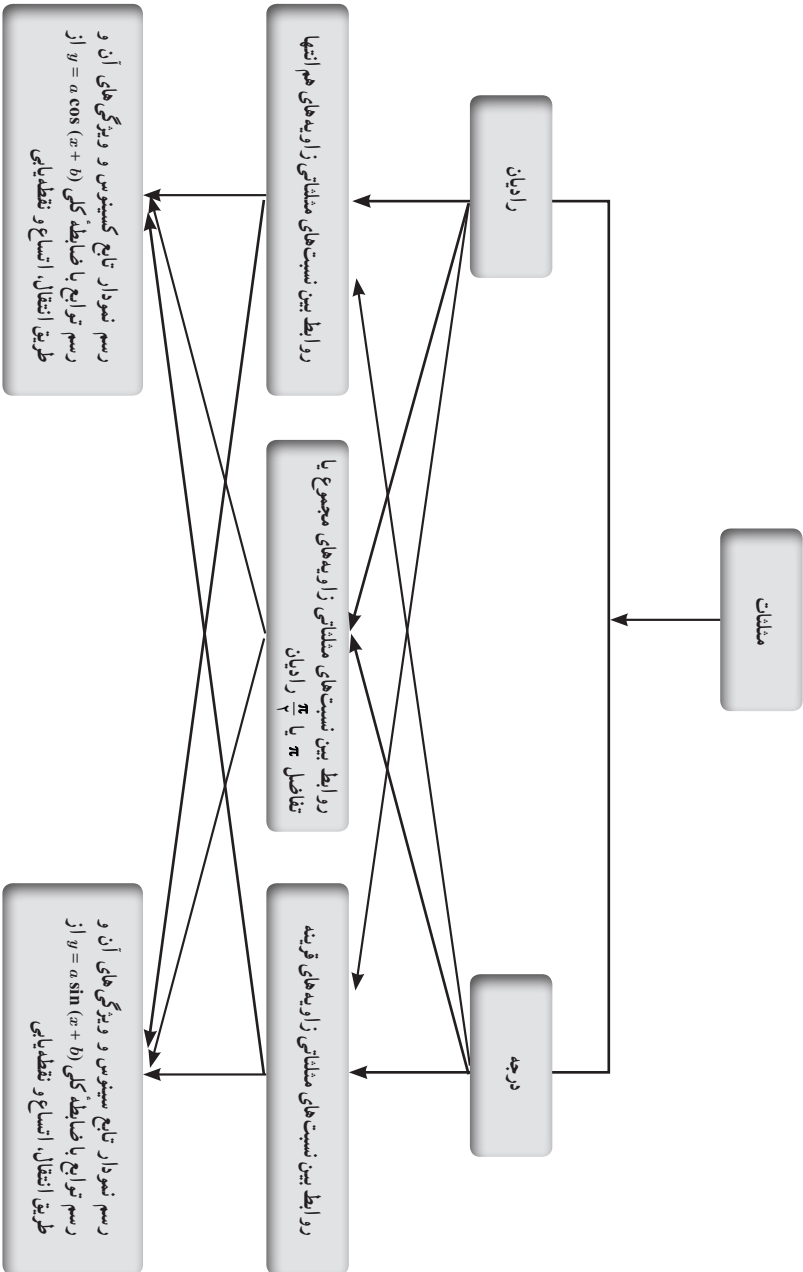
اهداف کلی فصل

- معرفی رادیان به عنوان واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه
- ارتباط میان دو واحد اندازه‌گیری درجه و رادیان
- آشنایی با نمایش زاویه‌ها برحسب درجه و رادیان روی دایرهٔ مثلثاتی
- معرفی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، مکمل، متمم و هم‌انتهای
- رسم توابع سینوس و کسینوس در صفحهٔ مختصات با استفاده از نقطه‌یابی
- آشنایی با ویژگی‌های توابع سینوس و کسینوس
- رسم تابع با ضابطهٔ $y = a \sin(x + b)$ و $y = a \cos(x + b)$ به کمک انتقال

نگاه کلی به فصل

این فصل در تکمیل مباحث مطرح شده در فصل مثلثات کتاب دهم تهیه شده است. نسبت‌های مثلثاتی، دایره مثلثاتی و اتحادهای مثلثاتی دروسی بود که در سال گذشته به دانش‌آموزان آموخته شد. آشنایی با واحد درجه و جهت مثلثاتی و محاسبه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه دلخواه مباحثی بود که در کتاب دهم ارائه شد. همچنین محاسبه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با دانستن یکی از نسبت‌های مثلثاتی آن مهارتی بود که دانش‌آموز کسب کرد. حال سؤالاتی را می‌توان طرح نمود که علت ارائه مطالب این فصل را برای دانش‌آموز روشن کرد.

- ۱ آیا به جز درجه، واحد اندازه‌گیری دیگری برای زاویه وجود دارد؟ (همان‌طوری که مثلاً برای طول به جز متر یا سانتی‌متر یا کیلومتر واحدهایی چون اینچ یا مایل وجود دارد.)
- ۲ در صورت وجود واحد دیگر، ارتباط آن با درجه چیست و روی دایره مثلثاتی چگونه می‌توان با واحد جدید یک زاویه را نمایش داد؟
- ۳ با توجه به آشنایی دانش‌آموز با دو زاویه قرینه، متمم و مکمل، این مفاهیم روی دایره مثلثاتی چگونه تعریف می‌شوند و نسبت‌های مثلثاتی آنها چگونه به دست می‌آیند؟
- ۴ با توجه به آشنایی دانش‌آموز با مفهوم تابع و رسم آن، چگونه تابع مثلثاتی چون سینوس یا کسینوس روی صفحه مختصات رسم می‌شود؟



دانستنی معلم فصل ۴

محاسبه تقریبی فاصله بین دو نقطه روی کره زمین

در ابتدا لازم به ذکر است زمین یک کره دقیق نیست زیرا اندازه شعاع آن در تمام نقاط روی آن برابر نیست. معمولاً شعاع کره زمین به طور تقریبی $r = ۶۳۷۱$ کیلومتر در نظر گرفته می‌شود که در کتاب درسی برای راحتی در محاسبات این شعاع به طور تقریبی ۶۴۰۰ کیلومتر فرض شده است.

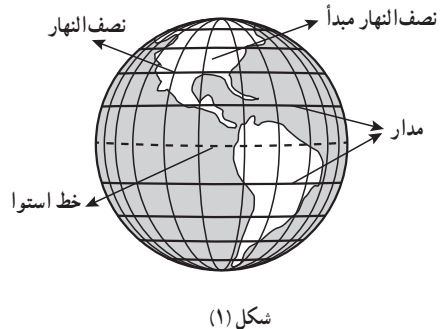
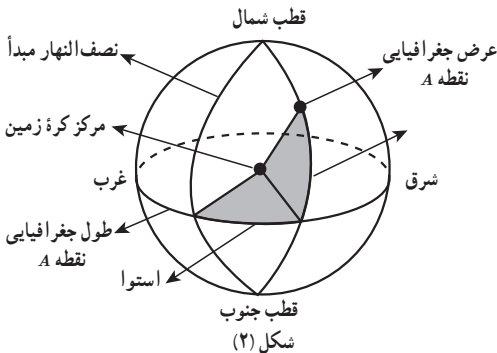
دایره‌های عظیمه‌ای که از قطب‌های کره زمین می‌گذرند نیم‌دایره‌هایی را روی کره زمین پدید می‌آورند که به هر کدام آنها **نصف‌النهار** می‌گویند.

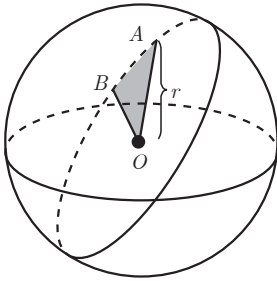
به طور قرارداد، نصف‌النهاری که از شهر گرینویچ در نزدیکی لندن پایتخت کشور انگلستان می‌گذرد، **نصف‌النهار مبدأ** می‌گویند.

دایره عظیمه‌ای که شعاع آن بر شعاع دایره عظیمه متناظر با نصف‌النهار مبدأ عمود باشد، استوا نام دارد.

اگر صفحه‌ای موازی با استوا کره زمین را قطع کند، دایره حاصل، مدار نام دارد.

در واقع استوا بزرگ‌ترین مدار در کره زمین است که شعاع آن همان شعاع کره زمین است. به این ترتیب روی کره زمین یک دستگاه مختصات تنظیم شده است به طوری که هر نقطه روی کره زمین محل تلاقی یک مدار و یک نصف‌النهار است (شکل ۱). عرض جغرافیایی یک نقطه بیانگر آن است که نقطه مفروض چقدر بالا یا پایین خط استوا است که آن را به صورت مقداری بر حسب درجه (شمالی یا جنوبی) بیان می‌کنند. عرض جغرافیایی خط استوا صفر درجه و عرض جغرافیایی قطب شمال ۹۰° شمالی است. به همین ترتیب طول جغرافیایی یک نقطه بیانگر آن است که نقطه مفروض چقدر شرق یا غرب نصف‌النهار مبدأ است که آن را به صورت مقداری بر حسب درجه (شرقی یا غربی) بیان می‌کنند. طول جغرافیایی نصف‌النهار مبدأ صفر درجه است (شکل ۲).

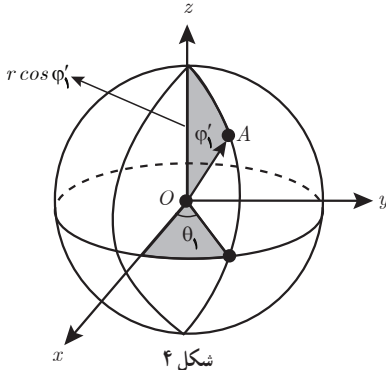




شکل (۳)

حال گیریم A و B دو نقطه مفروض روی کره زمین باشند. هدف یافتن طول \widehat{AB} روی دایره عظیمه گذرنده بر این کمان است (شکل ۳).

هدف یافتن اندازه \widehat{AOB} بر حسب رادیان است. اگر عرض جغرافیایی نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ ، φ_1 شمالی و طول جغرافیایی این نقطه θ_1 شرقی باشد، با توجه به شکل ۴ داریم:



شکل ۴

$$\overline{OA} \begin{cases} x_1 = r \sin \varphi_1' \cos \theta_1 = r \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = r \sin \varphi_1' \sin \theta_1 = r \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \\ z_1 = r \cos \varphi_1' = r \sin \varphi_1 \end{cases}$$

که در آن $\varphi_1' = 90^\circ - \varphi_1$ و شعاع کره زمین است. به همین ترتیب برای نقطه B نیز داریم:

$$\overline{OB} \begin{cases} x_2 = r \cos \varphi_2 \cos \theta_2 \\ y_2 = r \cos \varphi_2 \sin \theta_2 \\ z_2 = r \sin \varphi_2 \end{cases}$$

که در آن φ_2 و θ_2 به ترتیب عرض و طول جغرافیایی نقطه B هستند. بنابراین با معلوم بودن مختصات این دو بردار ضرب داخلی آنها به صورت زیر حاصل می شود:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \text{ضرب داخلی زاویه های } \overline{OA} \text{ و } \overline{OB}$$

$$|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = r \text{ در ضمن}$$

در نتیجه با جایگذاری مقادیر مختصات نقاط داریم :

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OA}| \cdot |\overline{OB}|}$$

$$= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

حال با مشخص شدن زاویه α برحسب رادیان و به کارگیری رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ مقدار $l = \widehat{AB}$ حاصل

می شود.

به عنوان مثال دو شهر لاهیجان در استان گیلان و خمین در استان مرکزی را در نظر می گیریم که دارای طول جغرافیایی تقریباً یکسان $\theta_1 = \theta_2 = 50^\circ$ و به ترتیب دارای عرض جغرافیایی تقریبی

$\varphi_1 = 37^\circ$ و $\varphi_2 = 33^\circ$ هستند. با فرض $r = 6370 \text{ km}$ در این صورت با توجه به اتحاد مثلثاتی

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \quad \text{و} \quad \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

خواهیم داشت :

$$\cos \alpha = \cos(37^\circ - 33^\circ) \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \alpha = 4^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{45} \text{ رادیان}$$

$$\xrightarrow{\pi = \frac{180}{\pi}} l = r \times \alpha = 6370 \times \frac{\pi}{45} \approx 444 \text{ km}$$

لذا فاصله تقریبی شهر خمین و لاهیجان روی کره زمین ۴۴۴ کیلومتر است. توجه کنید که فاصله جاده ای بین این دو شهر حدود 56° کیلومتر است.

مثال ۱: شهر کرمان دارای طول جغرافیایی تقریبی 57° و عرض جغرافیایی 3° و شهر بجنورد در استان خراسان شمالی طول جغرافیایی تقریبی یکسان با شهر کرمان و عرض جغرافیایی 37° است. فاصله تقریبی این دو شهر روی کره زمین تقریباً چند کیلومتر است؟

مثال ۲: شهر تهران دارای طول جغرافیایی تقریبی 51° و عرض جغرافیایی 35° و شهر اهواز دارای طول جغرافیایی تقریبی 48° و عرض جغرافیایی 31° هستند. فاصله تقریبی این دو شهر روی کره زمین چند کیلومتر است؟

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

درس اول

اهداف درس

- ۱ معرفی رادیان به‌عنوان واحد دیگری برای اندازه‌گیری زاویه و اهمیت آشنایی با این واحد
- ۲ رابطه بین طول کمان روبه‌روی یک زاویه مرکزی و اندازه یک زاویه برحسب رادیان با توجه به شعاع
- ۳ رابطه بین واحدهای اندازه‌گیری درجه و رادیان

پیش‌نیازها

- ۱ تشخیص زاویه مرکزی و کمان روبه‌روی آن
- ۲ شناخت واحد اندازه‌گیری درجه
- ۳ درک عدد π
- ۴ شناخت دایره مثلثاتی و جهت مثلثاتی

روش تدریس

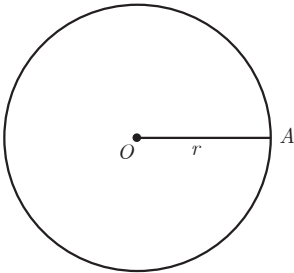
دانش‌آموز پس از آموزش این درس توسط معلم باید قادر باشد:

- ۱ زاویه‌های مختلف را برحسب رادیان روی دایره مثلثاتی مشخص کند.
- ۲ رابطه بین طول کمان روبه‌روی یک زاویه و اندازه یک زاویه برحسب رادیان را با توجه به شعاع دایره به کار ببرد.
- ۳ زاویه‌ای برحسب درجه (رادیان) را به زاویه متناظر آن برحسب رادیان (درجه) تبدیل کند.
- ۴ از مائین حساب جهت محاسبه یک زاویه برحسب رادیان استفاده کند.

توصیه‌ها

- ۱ در هنگام آموزش مفهوم رادین، لزوم یادگیری و اهمیت این واحد اندازه‌گیری اشاره شود.
- ۲ از آموزش واحدهای کوچک‌تر از درجه چون دقیقه و ثانیه و به کارگیری آنها در تبدیل یک زاویه به رادین اجتناب شود.
- ۳ از آموزش واحد اندازه‌گیری «گراد» در کنار دو واحد مذکور اجتناب شود و روی آموزش دقیق و رابطه بین درجه و رادین تمرکز گردد.

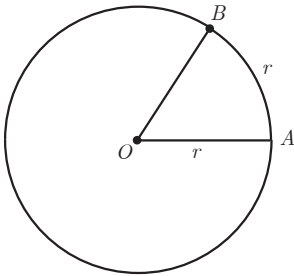
فعالیت صفحه ۷۲



- ۱ یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخ‌ی را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط‌کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به دست آورید. محیط دایره را مشخص می‌کند.
- هدف از ارائه این فعالیت معرفی مفهوم رادین از طریق طول کمان روبه‌رو به یک زاویه است. به عبارتی می‌خواهیم به این سؤال پاسخ دهیم که چگونه می‌توان طول کمان روبه‌روی یک زاویه مرکزی در دایره را برحسب یک واحد طولی نظیر سانتی‌متر، متر یا کیلومتر بیان نمود؟
- برای انجام این فعالیت قبل از تدریس از دانش‌آموزان خواسته شود مقداری نخ، خط‌کش، نقاله و یک شیء دایره‌ای شکل نظیر CD به همراه داشته باشند.
- در ابتدا شیء دایره‌ای شکل مورد نظر را برمی‌داریم و نخ‌ی را دور آن می‌پیچیم و باز می‌کنیم. این شیء می‌تواند دهانه یک لیوان و یا یک CD باشد. حال با خط‌کش، طول این نخ را اندازه می‌گیریم و این واقعیت که این مقدار همان محیط آن شیء دایره‌ای شکل را مشخص می‌کند، مطرح می‌کنیم. با یادآوری این مطلب از هندسه که محیط دایره برابر قطر $\times \pi$ است، از دانش‌آموز می‌خواهیم شعاع را بیابد. اگر به عنوان مثال محیط دایره برابر ۳۸ cm باشد (محیط تقریبی یک CD) آنگاه با فرض $\pi \approx 3/14$ داریم:

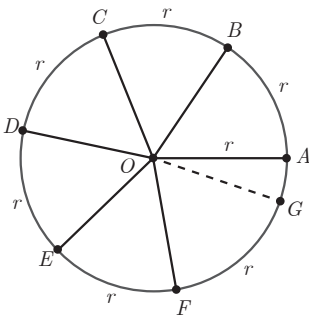
$$38 = 6 \text{ cm} = \text{شعاع دایره} = r \rightarrow 12 \text{ cm} \approx \text{قطر دایره} \rightarrow 3/14 \times \text{قطر دایره} = 38$$

- ۲ قطعه نخ‌ی را به اندازه شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطه A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطه B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه \widehat{AOB} را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه



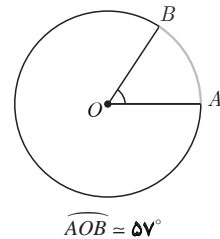
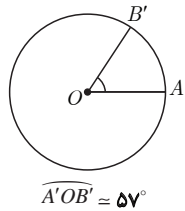
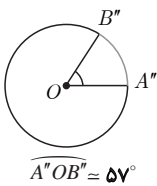
است؟ 57°

به اندازه شعاع حاصل، از دانش آموز خواسته شود قطعه نخ را برش داده و روی محیط همان شکل دایره‌ای شکل قرار دهد و \widehat{AOB} را بسازد. حال نقاله را برداشته و اندازه این زاویه را روی این شیء اندازه بگیرد. این زاویه تقریباً 57° است.



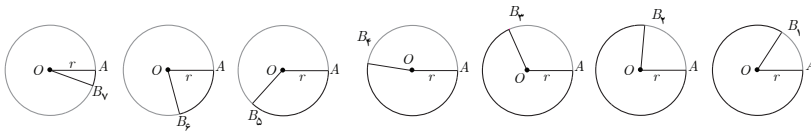
۲ دوباره این قطعه نخ را از نقطه B روی محیط دایره قرار دهید تا نقطه C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط G و F, E, D روی محیط دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت \widehat{BOC} ، \widehat{COD} ، \widehat{DOE} ، \widehat{EOF} و \widehat{FOG} با زاویه \widehat{AOB} برابر و هر یک تقریباً 57° است. آیا دو نقطه A و G برهم منطبق می‌شوند؟ خیر $\widehat{GOA} \approx 18^\circ$

در تمام دایره‌های زیر اندازه زاویه مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازه زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.



در ادامه با به کارگیری نقاله، هر یک از زاویه‌های \widehat{AOB} ، $\widehat{A'OB'}$ و $\widehat{A''OB''}$ تقریباً 57° است. به این ترتیب در این قسمت دانش آموز این مطلب را باید درک کند که در هر دایره با شعاع مفروض یک رادیان (که تقریباً 57° است) برابر با اندازه زاویه مرکزی است که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

۴ جدول زیر را کامل کنید.



طول کمان AB_i $6r$ $5r$ $4r$ $3r$ $2r$ $\frac{3}{2}r$ r $1 \leq i \leq 7$

اندازه زاویه AOB_i 6 رادیان 5 رادیان 4 رادیان 3 رادیان 2 رادیان $\frac{3}{2}$ رادیان 1 رادیان $1 \leq i \leq 7$

هدف از این بند فعالیت، آشنایی دانش آموز با رابطه رادیان و طول کمان است. لذا با توجه به کمان‌ها در هر شکل برحسب شعاع دایره (r) می‌توان اندازه زاویه مرکزی متناظر را بیان کرد. در این حالت هدف آن است که دانش آموز به این نتیجه برسد که نسبت طول کمان روبه‌روی یک زاویه بر شعاع دایره، اندازه زاویه مرکزی متناظر را برحسب رادیان، مشخص می‌کند.

در انجام فعالیت فوق حتماً دانش آموز به خواندن زاویه‌ها در جهت مثلثاتی جلب گردد و مثلاً زاویه \widehat{AOB}_v در شکل آخر جدول، زاویه‌ای است که کمان روبه‌روی آن به رنگ قرمز مشخص شده و با زاویه‌ای که در خلاف جهت مثلثاتی به دست می‌آید، نباید اشتباه شود.

کار در کلاس صفحه ۷۴

با استفاده از رابطه بالا جدول زیر را کامل کنید :

l	۵ سانتی‌متر	۵۰۰ سانتی‌متر	۷۵/۰ متر	۲۰۰ سانتی‌متر	۹۰ سانتی‌متر	۵۰ متر	۱۰ متر	۴۰۰ سانتی‌متر
r	۵ سانتی‌متر	۵ متر	۵/۰ متر	۱ متر	۳۰ سانتی‌متر	۱۰ متر	۱ متر	۲۰ سانتی‌متر
α	۱ رادیان	۱ رادیان	۱/۵ متر	۲ رادیان	۳ رادیان	۵ رادیان	۱۰ رادیان	۲۰ رادیان

در این کار در کلاس، مهارت دانش آموز در به کارگیری رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ و توجه به هم‌واحد بودن l و r

را افزایش می‌دهد. مثلاً وقتی $r = 5 \text{ cm}$ و رادیان $\alpha = 1$ ، داریم:

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow 1 = \frac{l}{5} \rightarrow l = 5 \text{ cm}$$

یا وقتی $r = 5 \text{ m}$ و $l = 500 \text{ cm}$ داریم:

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{500 \text{ cm}}{500 \text{ cm}} = 1 \text{ رادیان}$$

با توجه به آشنایی دانش‌آموز با عدد π به صورت نسبت محیط دایره به قطر آن، توجه او به این موضوع که زاویه‌ای هم به نام π رادیان داریم باید جلب شود و نباید این زاویه که دارای واحد هست با عدد π که تقریباً $3/14$ است و واحدی ندارد اشتباه شود.

ضمناً در جدول صفحه ۷۴، با توجه به اینکه مقدار تقریبی رادیان، 57° است، دانش‌آموز را هدایت می‌کنیم تا مقادیر تقریبی زاویه‌هایی چون $5/5^\circ$ رادیان (نصف 57°)، ۲ رادیان ($2 \times 57^\circ$)، ۳ رادیان ($3 \times 57^\circ$)، $3/14$ رادیان ($3/14 \times 57^\circ$) را برحسب درجه بیابد و در نهایت به او این موضوع را آموزش می‌دهیم که با استفاده از تقریب‌های بهتر عدد π ، مقدار تقریبی زاویه π رادیان برحسب درجه به 180° نزدیک می‌شود طوری که π رادیان دقیقاً بر 180° منطبق می‌شود. یعنی رادیان اندازه زاویه نیم صفحه است.

π رادیان	$3/14$ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱ رادیان	$5/5^\circ$ رادیان	زاویه برحسب رادیان
دقیقاً 180°	تقریباً 179°	تقریباً 171°	تقریباً 114°	تقریباً 57°	تقریباً $28/5^\circ$	زاویه برحسب درجه

بنابراین، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با 180° درجه یا π رادیان. به عبارت دیگر اندازه زاویه نیم صفحه برابر است با π رادیان. در نتیجه:

$$\frac{\pi}{180^\circ} \text{ رادیان} = \text{یک درجه}$$

به این ترتیب:

$$\begin{array}{l} \div 2 \rightarrow \text{رادیان } \frac{\pi}{2} = 90^\circ \\ \div 3 \rightarrow \text{رادیان } \frac{\pi}{3} = 60^\circ \\ \div 4 \rightarrow \text{رادیان } \frac{\pi}{4} = 45^\circ \\ \div 6 \rightarrow \text{رادیان } \frac{\pi}{6} = 30^\circ \end{array}$$

$\pi = 180^\circ$ رادیان

۱ مطابق نمونه هر یک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید :

$$\begin{array}{l} 3^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{18^\circ} \text{ رادیان}} \frac{\pi}{6} \text{ رادیان} \\ 45^\circ \xrightarrow{\quad \quad \quad} \frac{\pi}{4} \text{ رادیان} \\ 9^\circ \xrightarrow{\quad \quad \quad} \frac{\pi}{20} \text{ رادیان} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 36^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{18^\circ} \text{ رادیان}} \frac{\pi}{5} \text{ رادیان} \\ 6^\circ \xrightarrow{\quad \quad \quad} \frac{\pi}{30} \text{ رادیان} \\ 18^\circ \xrightarrow{\quad \quad \quad} \pi \text{ رادیان} \end{array}$$

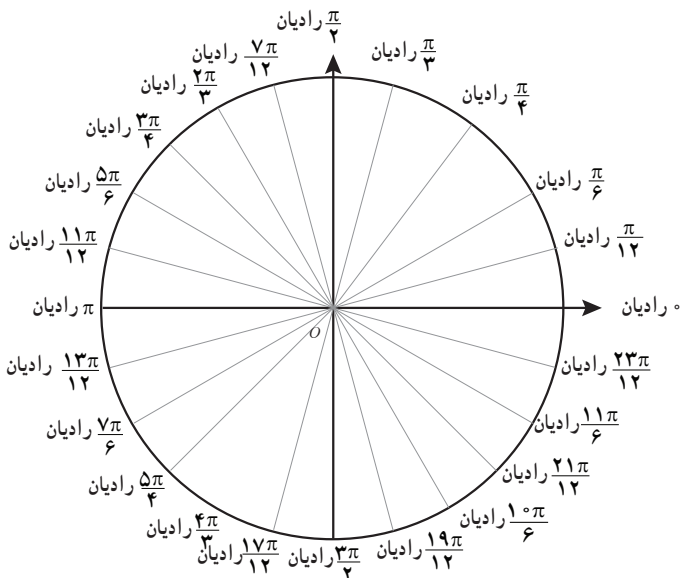
اگر D اندازه زاویه α بر حسب درجه و R اندازه زاویه α بر حسب رادیان باشد، آنگاه

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

۲ حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

D (درجه)	5°	$25/7^\circ$	24°	72°	12°	225°
R (رادیان)	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$

۳ در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویه مناسب را بر حسب رادیان مشخص کنید.



هدف از این کار در کلاس، آماده‌سازی دانش‌آموز در ایجاد مهارت تبدیل درجه به رادیان و برعکس است. با تقسیم کردن طرفین رابطه $\pi = 180^\circ$ می‌توان گفت:

$$1^\circ = \text{رادیان} \frac{\pi}{180}$$

همچنین با تقسیم کردن طرفین رابطه $\pi = 180^\circ$ می‌توان گفت:

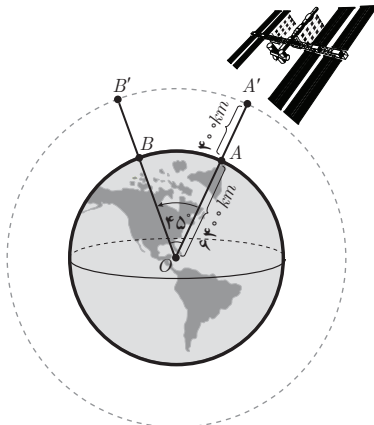
(با ماشین حساب) $\frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ$ درجه 1 رادیان
 به این ترتیب برای تبدیل درجه به رادیان اندازه زاویه را در $\frac{\pi}{180}$ رادیان ضرب می‌کنیم و برای تبدیل رادیان به درجه، اندازه زاویه را در $\frac{180^\circ}{\pi}$ درجه ضرب می‌کنیم.
 در انتهای سؤال ۱ گفته شود: 2π رادیان $= 360^\circ$ (یک دور کامل دایره)

سؤال ۲ این کار در کلاس از رابطه $\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$ تکمیل می‌شود. مثلاً اگر $R = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$ آنگاه:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\text{رادیان} \frac{\pi}{\sqrt{5}}}{\pi \text{ رادیان}} \rightarrow D = 25.7^\circ$$

سؤال ۳، برای ایجاد مهارت در مشخص نمودن زاویه‌ها برحسب رادیان روی دایره مثلثاتی تنظیم شده است. شکلی که داده شده دقیقاً همان دایره مثلثاتی صفحه ۷۲ است که زاویه‌های مربوط برحسب رادیان مشخص شده است. لذا شکل با افزودن $\frac{\pi}{13}$ رادیان و در جهت مثلثاتی تکمیل می‌شود. توصیه می‌شود زوایایی مانند $\frac{-\pi}{13}$ رادیان، $\frac{-\pi}{6}$ رادیان و $\frac{-\pi}{4}$ رادیان و مانند آنها در شکل نشان داده می‌شود.

فعالیت صفحه ۷۶



ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله تقریبی 400 کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه A تا نقطه B که با مرکز زمین زاویه 45° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کره زمین را 6400 کیلومتر فرض کنید.

۱ ابتدا زاویه مرکزی 45° را به رادیان تبدیل کنید.

$$\text{رادیان } \widehat{AOB} = \alpha = 45^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$$

۲ شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با

$$r = OA' = 6400 + 400 = 6800 \text{ km}$$

۳ طول کمان روبه‌روی $\widehat{A'OB'}$ با فرض $\pi \approx 3/14$ و با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی برابر است با:

$$A'B' \text{ کمان } = l = \frac{\pi}{4} \times 6800 \approx 5338 \text{ km}$$

هدف از ارائه این فعالیت معرفی یک کاربرد عملی از مفهوم رادیان است. در این حالت می‌خواهیم با داشتن اندازه زاویه مرکزی \widehat{AOB} ، اندازه $\widehat{A'B'}$ را برحسب کیلومتر به دست آوریم.

فعالیت‌های مشابهی توسط معلم می‌تواند ارائه شود. نمونه آن شکل ابتدای فصل است که در آن ماهواره امید در مدار خود نشان داده شده است.

خواندنی صفحه ۷۶

توصیه می‌شود جهت آشنایی دانش‌آموز با به کارگیری ماشین حساب این خواندنی در کلاس انجام شود و مقادیر زاویه‌های خواسته شده به طور تقریبی توسط دانش‌آموزان به دست آید.

$$\text{رادیان } 0/5 = 0/5 \times \frac{180^\circ}{\pi} = 28/6^\circ$$

$$\text{رادیان } \frac{4}{5} = 45/8^\circ$$

$$\text{رادیان } 2 = 114/6^\circ$$

$$\text{رادیان } 3 = 171/9^\circ$$

$$\text{رادیان } 3/14 = 179/9^\circ$$

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\text{رادیان } \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\text{رادیان } \pi = 180^\circ$$

حل برخی از تمرین‌های درس اول

$$\frac{D}{18^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \rightarrow \frac{D}{18^\circ} = \frac{\frac{\pi}{2} \text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \rightarrow D = 9^\circ$$

به دانش‌آموزان متذکر می‌شویم که l و r هم‌واحد هستند و α برحسب رادیان به دست می‌آید.

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \text{ رادیان}$$

۵ ← حل :

$$\frac{D}{18^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \rightarrow \frac{D}{18^\circ} = \frac{1}{\pi \text{ رادیان}} \rightarrow D = \frac{18^\circ}{3/14} \approx 57/3^\circ \text{ الف) درست است.}$$

$$18^\circ - 57/3^\circ = 122/7^\circ \text{ مجموع زوایای پای ساق}$$

$$122/7^\circ \div 2 = 61/35^\circ \text{ هر یک از زوایای پای ساق}$$

با توجه به کوچک تر بودن زاویهٔ روبه‌رو به قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین نسبت به زوایای پای ساق، اندازهٔ

قاعدهٔ مثلث نیز نسبت به اندازهٔ دو ساق مثلث کوچک تر است.

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow l = r \alpha = 1 \times \pi \text{ رادیان} = \pi \text{ رادیان} \approx 3/14 \text{ cm} \text{ ب) درست است.}$$

$$\frac{D}{18^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}} \rightarrow \frac{D}{18^\circ} = \frac{\frac{6\pi}{5} \text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \rightarrow D = 216^\circ \text{ پ) نادرست است.}$$

در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

ت) نادرست است.

$$\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\pi=18^\circ \text{ رادیان}} D = 12^\circ$$

$$\text{رادیان} \longrightarrow = 2^\circ$$

$$\frac{7\pi}{36} \longrightarrow D = 35^\circ$$

همان‌طور که می‌دانیم جمع زوایای داخلی مثلث 180° است. حال آنکه در این مثلث جمع هر سه زاویه

175° می‌باشد. می‌توان به این نکته نیز اشاره کرد که جمع زوایای داخلی یک مثلث π رادیان است. حال

آنکه جمع زوایای داده شده π رادیان نمی‌شود. بنابراین این زوایا تشکیل مثلث نمی‌دهند.

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

درس دوم

اهداف درس

- ۱ شناخت زاویهٔ قرینه $(-\alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن
- ۲ شناخت زاویهٔ مکمل $(\pi - \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن
- ۳ شناخت زاویه با اختلاف π رادیان $(\pi + \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن
- ۴ شناخت زاویهٔ متمم $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن
- ۵ شناخت زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{4}$ رادیان $(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن
- ۶ شناخت زاویهٔ هم‌انتهای و معرفی نسبت‌های مثلثاتی آن

پیش‌نیازها

- ۱ شناخت دایرهٔ مثلثاتی و جهت مثلثاتی و پیدا کردن زوایا روی دایرهٔ مثلثاتی
- ۲ آشنایی با اتحادهای مثلثاتی فصل مثلثات در سال دهم
- ۳ محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° ، 45° ، 60° ، 90° ، 180° ، 270° ، 360°
- ۴ شناخت علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ربع از دایرهٔ مثلثاتی
- ۵ آشنایی با مفهوم قرینهٔ نقطه (x) و (y) نسبت به محور x ، y ها و مبدأ مختصات

روش تدریس

دانش‌آموز پس از تدریس این درس باید قادر باشد :

- ۱ با معلوم بودن یک زاویه برحسب رادیان، انتهای کمان روبه‌روی آن را مشخص کند در کدام ربع

دایره مثلثاتی قرار دارد.

۲ مفهوم قرینه یک زاویه و نمایش آن در دایره مثلثاتی را تشخیص داده و نسبت‌های مثلثاتی قرینه یک زاویه را از روی نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه محاسبه کند.

۳ با دانستن مفهوم دو زاویه مکمل، نسبت‌های مثلثاتی مکمل یک زاویه را از روی نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه (برحسب درجه یا رادیان) محاسبه کند. همچنین با فرض معلوم بودن یک زاویه، آن را به صورت دو زاویه دیگر تجزیه کند که مجموع یا اختلاف آنها π رادیان (یا 180°) است و سپس نسبت‌های مثلثاتی زاویه مفروض را با به کارگیری روابط معرفی شده به دست آورد.

۴ با دانستن مفهوم دو زاویه متمم، نسبت‌های مثلثاتی متمم یک زاویه را از روی نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه (برحسب درجه یا رادیان) محاسبه کند.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت صفحه ۷۹

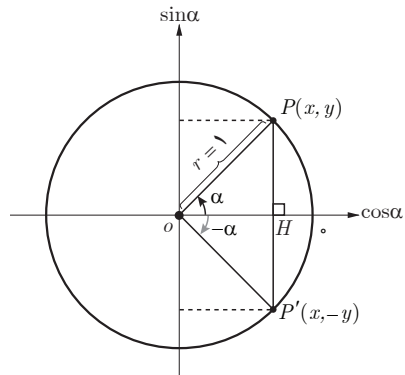
دو زاویه α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل زیر $\alpha = 3^\circ$ ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه -3° در $\triangle OP'H$ عبارت‌اند از:

$$\sin(-3^\circ) = \frac{-y}{r} = -\sin 3^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-3^\circ) = \frac{x}{r} = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-3^\circ) = \frac{-y}{x} = \frac{-\sin 3^\circ}{\cos 3^\circ} = -\tan 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(-3^\circ) = \frac{x}{-y} = -\cot 3^\circ = -\sqrt{3}$$



قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x, -y)$ است.

در این قسمت دانش‌آموز ضمن آشنایی با مفهوم قرینه یک زاویه باید مهارت یابد زوایای منفی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (خلاف جهت مثلثاتی) روی دایره مثلثاتی شناسایی کند و دو زاویه که

مجموع آنها صفر شود را قرینه بدانند. نظیر $\frac{\pi}{4}$ رادیان و $-\frac{\pi}{4}$ رادیان 3° و -3° .

همچنین به این مطلب که انتهای کمان‌های روبه‌روی زاویه‌های $\frac{-\pi}{4}$ رادیان و $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $-\pi$ رادیان و π رادیان، $\frac{-3\pi}{4}$ رادیان و $\frac{\pi}{4}$ رادیان و امثالهم برهم منطبق هستند دقت کند.

در این صفحه، قبل از معرفی نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، این نکته که قرینه نقطه‌ای به مختصات (x, y) نسبت به محور افقی (در اینجا محور کسینوس‌ها) نقطه‌ای به مختصات $(x, -y)$ است مطرح شود تا دانش‌آموز رابطه بین مختصات نقاط P و P' در شکل را مورد توجه قرار دهد. سپس با فرض $\alpha = 3^\circ$ در $OP'H$ مشابه نمونه خواهیم داشت:

$$\cos(-3^\circ) = \frac{x}{r} = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(توجه شود که در دایره مثلثاتی، $r=1$) و دو سطر بعد را نیز مطابق حل تکمیل نماید.

توجه شود که در حالت کلی $x = \cos \alpha$ و $y = \sin \alpha$ (با توجه به اینکه $r=1$) و بنابراین $\sin(-\alpha) = -y$ و $\cos(-\alpha) = x$ و در نهایت روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\alpha$ در حالت کلی ارائه شود.

کار در کلاس صفحه ۷۹

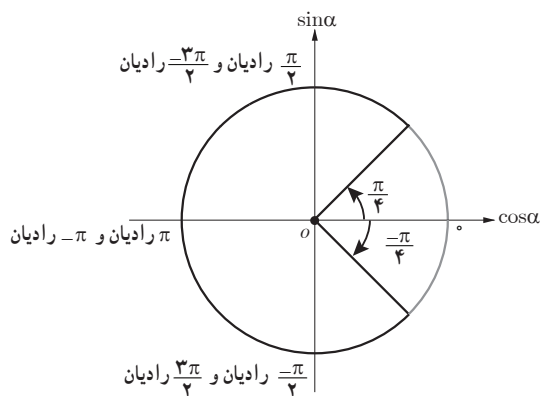
۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\frac{\pi}{4}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$$



۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot\left(\frac{-\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} \times \cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-3}{2}$$

الف)
$$\frac{\cos(-9^\circ) + \sin(-27^\circ)}{\sin(-18^\circ) - \cos(-36^\circ)} = \frac{\cos 9^\circ - \sin 27^\circ}{-\sin 18^\circ - \cos 36^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

ب)
$$\cot\left(\frac{-\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

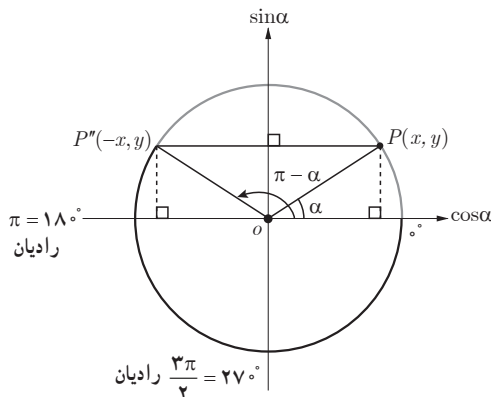
پ)
$$\cos(-45^\circ) \times \cos(-6^\circ) + \sin(-45^\circ) \times \sin(-6^\circ) =$$

$$\cos 45^\circ \times \cos 6^\circ - \sin 45^\circ \times (-\sin 6^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

در این قسمت عبارت‌ها طوری ساده شود که حتماً از روابط مذکور در نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه استفاده شود.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت صفحه ۸۰



قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x, y)$ است.

دو زاویه α و β را مکمل گوئیم؛ هرگاه مجموع آنها 180° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویه 30° و 150° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان و $\frac{2\pi}{3}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایره مثلثاتی زیر اگر $\alpha = 30^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P' و انتهای کمان زاویه 150° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 150° عبارت‌اند از:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -x = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\tan 3^\circ$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = -\sqrt{3} = -\cot 3^\circ$$

در ابتدای این مبحث پس از معرفی مفهوم دو زاویه مکمل و مثال‌های مختلف از این زاویه‌ها در هر دو حالت درجه و رادیان این نکته اشاره شود که قرینه یک نقطه مختصات $(x$ و $y)$ نسبت به محور عمودی (در اینجا محور سینوس‌ها) نقطه‌ای به مختصات $(-x$ و $y)$ است تا دانش‌آموز رابطه بین مختصات دو نقطه P و P'' در شکل این صفحه را درک کند. سپس از روی این شکل به ازای $\alpha = 15^\circ$ و با توجه به تصویر P'' روی محورهای کسینوس و سینوس حاصل $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ مطابق نمونه بیان شود و در ادامه جاهای خالی کامل گردد.

در ادامه حالت کلی نسبت‌های مثلثاتی $\pi - \alpha$ (مکمل زاویه α) ارائه شود.

کار در کلاس صفحه ۸۰

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید:

الف) 75°

$$180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

مکمل زاویه 75° ، زاویه 105° است.

رادیان $\frac{\pi}{12}$

$$\pi - \frac{\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$$

مکمل زاویه $\frac{\pi}{12}$ رادیان، $\frac{11\pi}{12}$ است.

ب) -25°

$$180^\circ - (-25^\circ) = 205^\circ$$

مکمل زاویه -25° ، زاویه 205° است.

رادیان $-\frac{\pi}{4}$

$$\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}$$

مکمل زاویه $-\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ است.

در هر حالت بهتر است هر زاویه و مکمل آن روی شکل دایره مثلثاتی نمایش داده شود.

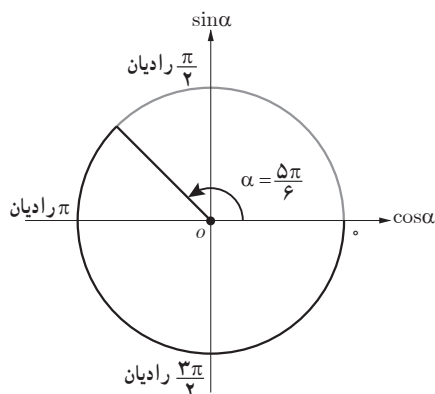
۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{5\pi}{6}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot \frac{5\pi}{6} = \cot \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$



فعالیت صفحه ۸۱

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan \frac{2\pi}{3} = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 12^\circ = \sin (18^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot (-12^\circ) = -\cot (18^\circ - 6^\circ) = \cot 6^\circ = \sqrt{3}$$

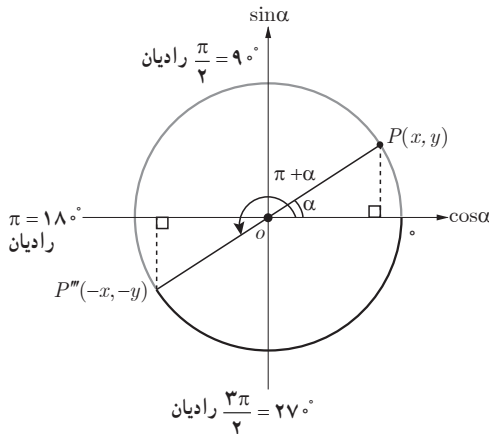
$$\cos (135^\circ) = \cos (18^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

هدف از ارائه این فعالیت افزایش مهارت دانش‌آموز در به کارگیری روابط نسبت‌های مثلثاتی $18^\circ - \alpha$ یا $\pi - \alpha$ است.

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

فعالیت صفحه ۸۱

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 21° را به دست آورید.



قرینه یک نقطه به مختصات (x, y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x, -y)$ است.

انتهای کمان زاویه 21° در ربع سوم واقع است. در ضمن $21^\circ = 180^\circ + 3^\circ$ ، یعنی اختلاف دو زاویه 21° و 3° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha = 3^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P''' ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 21° عبارت‌اند از:

$$\sin 21^\circ = \sin (180^\circ + 3^\circ) = -y = -\sin 3^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 21^\circ = \cos (180^\circ + 3^\circ) = -x = -\cos 3^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

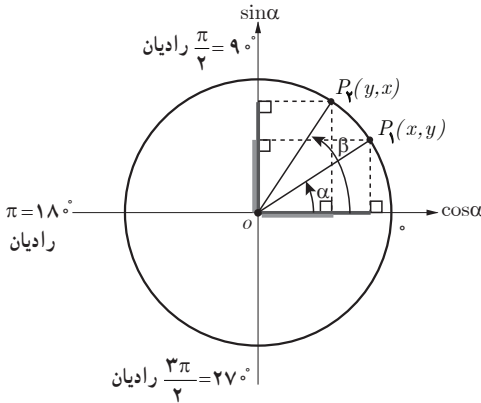
$$\tan 21^\circ = \frac{\sin 21^\circ}{\cos 21^\circ} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 3^\circ$$

$$\cot 21^\circ = \frac{1}{\tan 21^\circ} = \sqrt{3} = \cot 3^\circ$$

در این قسمت ابتدا با ذکر مثال‌هایی به دانش‌آموز آموزش داده شود زوایایی نظیر 21° و 3° ، $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{6}$ رادیان اختلافی برابر با 18° (یا π رادیان) دارند و با مفهوم دو زاویه مکمل متفاوت است و نباید اشتباه شود. سپس به این نکته اشاره شود که قرینه نقطه‌ای به مختصات (x, y) نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ای به مختصات $(-x, -y)$ است تا دانش‌آموز در شکل این فعالیت، رابطه بین مختصات نقاط P و P'' را درک کند. در ادامه، نسبت‌های مثلثاتی زاویه 21° کامل شود و در نهایت در حالت کلی نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\pi + \alpha$ مطرح شود.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

فعالیت صفحه ۸۲



$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

همچنین زاویه $^\circ$ و $\frac{\pi}{4}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین:

$$\sin \frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \cot 0 = \text{تعریف نشده}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{4}$ رادیان

فعالیت صفحه ۸۳

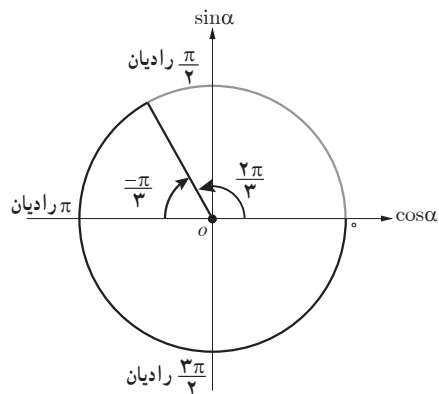
نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان را به دست آورید.

چون انتهای کمان زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

در این قسمت دو هدف دنبال می‌شود. یکی معرفی رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه نظیر $\frac{2\pi}{3}$ رادیان، $\frac{\pi}{6}$ رادیان که اختلاف آنها $\frac{\pi}{3}$ رادیان است، دوم ارائه مهارت به دانش‌آموز در انجام روش‌های مختلف به منظور یافتن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مفروض. به عنوان مثال برای یافتن نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\frac{2\pi}{3}$ رادیان به دو روش می‌توان عمل کرد.

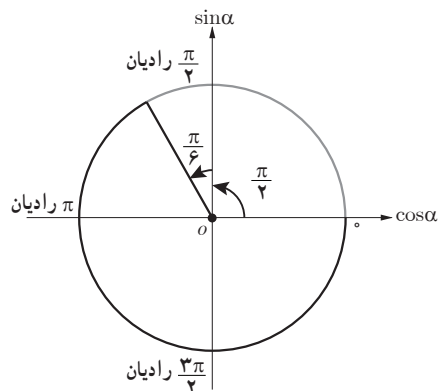
در روش اول این زاویه به صورت $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ (یعنی به عنوان مکمل زاویه $\frac{\pi}{3}$ رادیان) در نظر گرفته می‌شود. در این صورت، با توجه به روابط مربوط به نسبت‌های مثلثاتی مکمل یک زاویه داریم:

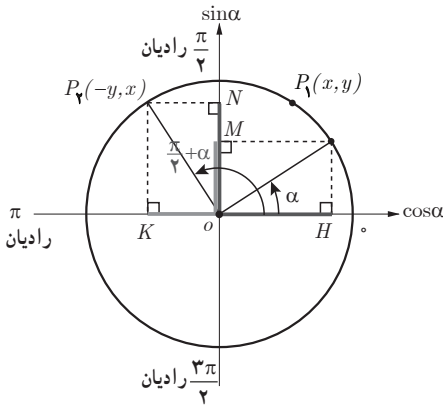
$$\begin{aligned}\sin \frac{2\pi}{3} &= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{2\pi}{3} &= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \tan \frac{2\pi}{3} &= \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} \\ \cot \frac{2\pi}{3} &= \cot \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$



در روش دوم این زاویه به صورت $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ (یعنی زاویه‌ای که اختلاف آن با $\frac{\pi}{6}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{2}$ است) در نظر گرفته می‌شود. حال با توجه به شکل و قرار گرفتن انتهای کمان در ربع دوم و مشابه توصیفی که در قسمت دو زاویه متمم ارائه شد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sin \frac{2\pi}{3} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{2\pi}{3} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \tan \frac{2\pi}{3} &= \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} \\ \cot \frac{2\pi}{3} &= \cot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$





به این ترتیب این مطلب به دانش آموز ارائه شود که از هر دو روش نتایج یکسان خواهد بود و به کارگیری هر کدام از روابط مذکور مجاز است. برای فهم بهتر در شکل دایره مثلثاتی صفحه ۸۴ با نام گذاری نقاط مطابق شکل روبه‌رو، در مثلث OP_1H داریم:

$$\sin \alpha = P_1H = OM = y$$

از طرفی چون انتهای کمان زاویه $\alpha + \frac{\pi}{4}$ در

ربع دوم است، $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) = oK = -y$ یعنی α

به‌طور مشابه در مثلث OP_1H داریم: $\cos \alpha = OH = x$

$$\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \cos \alpha \text{ یعنی } \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = NO = x$$

از طرفی این مطلب به رنگ قرمز در شکل مشخص شده است. در نهایت صورت کلی روابط نسبت‌های مثلثاتی زاویه $\alpha + \frac{\pi}{4}$ ارائه شود.

حل برخی از تمرین‌های درس دوم

۲

دانش آموزان در تکمیل این جدول، از روابط قید شده در درس استفاده کنند.

$$\text{مثلاً: } \sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

زاویه x نسبت	12°	135°	15°	21°	225°	24°	30°	33°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$

الف) $\sin ۸۴^\circ = \sin ۶^\circ$

$$\sin ۸۴^\circ = \sin (۴ \times ۱۸^\circ + ۱۸^\circ - ۶^\circ) = \sin (۱۸^\circ - ۶^\circ) = \sin ۶^\circ$$

ب) $\cos (-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۶^\circ$

$$\cos (-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۲۴^\circ = \cos (۲ \times ۱۸^\circ - ۳۶^\circ) = \cos ۳۶^\circ$$

پ) $\tan (-۱۰۰۰^\circ) = \tan ۸^\circ$

$$\tan (-۱۰۰۰^\circ) = -\tan (۱۰۰۰^\circ) = -\tan (۶ \times ۱۸^\circ - ۸^\circ) = \tan ۸^\circ$$

ت) $\sin ۸۷۵^\circ = \sin ۱۵۵^\circ$

$$\sin ۸۷۵^\circ = \sin (۴ \times ۱۸^\circ + ۱۵۵^\circ) = \sin ۱۵۵^\circ$$

الف) $x + ۲^\circ + x = ۹^\circ \rightarrow x = ۳.۵^\circ$

خیر. مثلاً $x = ۳۹۵^\circ$ نیز در تساوی صدق می‌کند.

ب) $x + \frac{\pi}{۱۸} \text{ رادیان} + \frac{۲\pi}{۹} \text{ رادیان} + x = \frac{\pi}{۳} \text{ رادیان} \rightarrow x = \frac{\pi}{۹} \text{ رادیان}$

خیر. مثلاً $x = \frac{۱۹\pi}{۹}$ نیز در تساوی صدق می‌کند.

دانش‌آموزان با توجه به نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم، روابط بالا را می‌توانند نتیجه بگیرند، اما برای یکتایی پاسخ ارائه‌شده باید برای دانش‌آموزان توضیح دهیم که با افزودن مضارب زوج π رادیان، می‌توان زوایای بسیاری یافت که در تساوی‌های الف و ب صدق می‌کنند.