

# فصل ۱

## هندسه تحلیلی و جبر

## رویکرد کلی کتاب

اصلی‌ترین دستور کار مؤلفان کتاب حاضر، محور قرار دادن فعالیت دانش‌آموز و مشارکت دادن او در ساخت دانش بوده است. در این راستا در تمام بخش‌های کتاب، فضای کافی برای انجام تکالیف و نوشتن مطلب توسط دانش‌آموز پیش‌بینی شده است. علاوه بر آن، استانداردهای فرایندی زیر در تدوین کتاب مدنظر بوده‌اند:

**۱- طرح و حل مسئله:** توجه داریم که هر تکلیف ریاضی لزوماً یک مسئله نیست؛ چرا که اگر دانش‌آموز نمونه آن تکلیف یا مشابه آن را قبلاً انجام داده باشد، برایش حکم تمرین را خواهد داشت. به عبارت دیگر، یک تکلیف ریاضی زمانی برای دانش‌آموز یک مسئله محسوب می‌شود که در ابتدای کار برای آن راه‌حل آماده‌ای در ذهن نداشته باشد و برایش چالش‌انگیز باشد. با این نگاه، یک تکلیف ریاضی به‌طور نسبی ممکن است برای یک شخص حکم تمرین و برای دیگری حکم مسئله را داشته باشد. در فصل‌های مختلف کتاب، علاوه بر تمرین، تعدادی مسئله هم در نظر گرفته شده است، تا مهارت حل مسئله دانش‌آموزان ارتقا یابد. طرح مسئله یک توانایی از مرتبه بالاتر است که علاوه بر معلمان، انتظار داریم دانش‌آموزان نیز تا حدودی واجد این توانایی باشند. به همین دلیل گاهی از آنها خواسته شده است تا مسئله‌ای را برای شرایط داده شده طرح نمایند.

**۲- ارتباط و اتصال موضوعی:** به‌طور طبیعی، مطالب کتاب حاضر در یک ارتباط منطقی با کتاب ریاضی پایه قبل قرار دارد. علاوه بر آن سعی شده است تا مطالبی از سایر دروس دانش‌آموزان مثل فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، جغرافیا و پدیده‌های دنیای واقعی نیز در کتاب آورده شود به‌طوری‌که این مطالب صرفاً جنبه تزیینی و خواندنی نداشته باشد، بلکه مفاهیم ریاضی در بستر چنین موضوعاتی طرح شده و آموزش داده شود. برخی از مصداق‌های این مطلب، هنگام توضیح درس‌های کتاب ذکر خواهند شد.

**۳- بازنمایی‌های چندگانه:** هنگام حل یک مسئله یا پرداختن به یک مفهوم ریاضی، ممکن است آن را از منظرهای مختلف مورد توجه قرار دهیم: دیدگاه هندسی، دیدگاه جبری یا دیدگاه عددی. در آموزش یک مفهوم جدید، تلاش شده است بازنمایی‌های مختلف آن مورد توجه واقع شود تا دانش‌آموز بتواند با حرکت بین بازنمایی‌های مختلف، طرحواره ذهنی مناسبی از آن مفهوم در ذهن خود شکل دهد. به عنوان مثال در فصل اول دانش‌آموز با داشتن ضابطه جبری یک سهمی باید به سؤالاتی در مورد نمودار هندسی آن پاسخ دهد و برعکس با داشتن نمودار هندسی باید قادر باشد تا در مورد علامت ضرایب در ضابطه جبری آن اظهار نظر کند.

**۴- گفتمان ریاضی:** هرچقدر بتوانیم دانش‌آموزان را به صحبت کردن وادار کنیم به‌طوری‌که قادر باشند از نظر خودشان در مقابل دوستان خود به‌طور منطقی دفاع کنند یا نظرات دیگران را به چالش بکشند،

در این صورت توانسته‌ایم آنها را به ریاضی‌وار فکر کردن نزدیک کنیم. در بخش‌های مختلف کتاب از دانش‌آموزان خواسته شده است تا جواب خود را با دوستان خود مقایسه کنند و در مورد تفاوت‌ها و شباهت‌های جواب‌ها بحث کنند.

**۵- اثبات و استدلال:** در واقع اثبات و استدلال یکی از جنبه‌های مهم آموزش ریاضی و یکی از اهداف ارزشمند آن است. با توجه به این موضوع، تلاش شده است تا در سراسر کتاب هیچ رابطه یا فرمولی بدون استدلال به دانش‌آموز ارائه نشود. اگر اثبات کردن آن مطلب با توجه به دانسته‌های دانش‌آموز امکان‌پذیر بوده، در برخی موارد این کار را انجام داده‌ایم. در موارد دیگر که اثبات طولانی بوده یا پیش‌نیازهای لازم فراهم نبوده از این کار اجتناب شده است. اما حتی در این گونه موارد، سعی شده است با عرضه کردن چند نمونه، دانش‌آموز با یک رویکرد استقرایی به رابطه مورد نظر دست یابد؛ یا اینکه مراحل اثبات کلی را در قالب یک مثال ملموس پیاده کرده‌ایم. در هر حال دانش‌آموز یک توجیه برای رابطه مورد نظر دریافت می‌نماید.

علاوه بر پنج استدلال فرایندی فوق، برخی ملاحظات دیگر هم در تألیف کتاب مورد نظر بوده‌اند که به شرح زیر هستند.

**— مسائل باز پاسخ:** علاوه بر راه‌حل‌های چندگانه که در مورد مسائل بسته پاسخ مدنظر مؤلفان بوده است، پرداختن به مسائلی که بیش از یک پاسخ درست داشته باشند هم مورد توجه بوده است. این گونه مسائل در کتاب‌های ریاضی پایه‌های قبل و حتی دوره ابتدایی هم مورد تأکید بوده‌اند. اگر از دانش‌آموزان بخواهیم به جای حل یک معادله داده شده، معادله‌ای رادیکالی بنویسند که یکی از جواب‌های آن به عنوان مثال ۲ باشد در این صورت یک مسئله باز پاسخ طرح کرده‌ایم که ممکن است به تعداد دانش‌آموزان یک کلاس پاسخ صحیح برای آن ارائه شود.

**— توجه به بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان:** ممکن است دانش‌آموز به خاطر یک قانون نادرستی که در ذهن دارد، یک رابطه را بیش از اندازه تعمیم دهد و به نتیجه نادرستی برسد. به عنوان مثال برای دو عدد نامنفی، او رابطه  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$  را که در مورد ضرب درست است، ممکن است به عمل جمع هم گسترش دهد و به رابطه نادرست  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  دست یابد. چنین اشتباهی را یک بدفهمی ریاضی می‌نامیم؛ چرا که این اشتباه ناشی از بی‌دقتی یا خستگی دانش‌آموز نیست بلکه به خاطر قانون نادرستی است که او در ذهن دارد. تمرین و تکرار نمی‌تواند راه‌حل مناسبی برای از بین بردن چنین بدفهمی‌هایی باشد، بلکه لازم است ابتدا منشأ بدفهمی شناسایی شود و دانش‌آموز در مواجهه با شکل درست رابطه مورد نظر، ابتدا قانون نادرست مربوطه که در ذهن خود دارد را اصلاح، حذف یا جایگزین نماید. در تألیف بخش‌های مختلف کتاب با نگاه به متون پژوهشی، بدفهمی‌های رایج در موضوع مورد بحث مد نظر بوده است تا با

برجسته کردن آنها و در تقابل قرارداد نشان با شکل درست رابطه مورد نظر، دانش‌آموزان به تفکر و تأمل واداشته شوند.

— حرکت از حالت‌های خاص به سمت حالت کلی: با هدف تقویت شهود فراگیران، سعی شده است در هر موضوع، ابتدا حالت‌های خاص مربوط به آن مطلب گفته شود و سپس به حالت کلی پرداخته شود. به عنوان مثال در بحث یافتن فاصله دو نقطه به کمک مختصات آنها، ابتدا دو نقطه را هم طول یا هم عرض در نظر گرفته‌ایم و سپس فاصله دو نقطه دلخواه بحث شده است. همچنین هم در حالت‌های خاص و هم در حالت‌های کلی، ابتدا یک مثال عددی مطرح شده و سپس به شکل جبری موضوع پرداخته شده است.

— تعیین حدود و ثغور مطالب: در موضوعات مختلف مورد بحث، حد و مرز مطالب با صراحت بیان شده است. به عنوان مثال اگر اثبات یک رابطه خاص جزو اهداف کتاب نبوده، این مطلب به صراحت در پاورقی آمده است. به عنوان مثالی دیگر، در بحث معادلات رادیکالی در پانویس قید شده که فقط معادلاتی مورد نظر است که شامل رادیکال‌های با فرجه ۲ باشند و در مثال‌ها و تمرین‌های ارائه شده هم هیچ‌گونه معادله با رادیکال‌های فرجه ۳ یا بالاتر نیامده است.

— توصیه به استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی در جریان تدریس: سرفصل‌های کتاب حاضر به گونه‌ای است که در تمام هفت فصل آن می‌توان نرم‌افزارهای ریاضی مثل جتو جبرا<sup>۱</sup> را در تدریس مطالب کتاب به خدمت گرفت و دانش‌آموزان را به استفاده از آن تشویق کرد.

— تأکید بر فعال بودن دانش‌آموز: همچنان که در ابتدای بحث ذکر شد، رویکرد اصلی کتاب، محور قرار دادن فعالیت دانش‌آموز و مشارکت دادن او در ساخت دانش است. به همین جهت در تمام بخش‌های کتاب، فضای کافی برای انجام تکالیف و نوشتن مطالب توسط دانش‌آموزان پیش‌بینی شده است. در این راستا اجرای توصیه‌های زیر پیشنهاد می‌شود:

توصیه ۱. در تمام بخش‌ها، ابتدا فرصت کافی در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد تا خود آنها فعالیت مورد نظر را زیر نظر معلم انجام دهند و در انتها جمع‌بندی توسط معلم انجام گیرد. باید شرایطی فراهم شود تا دانش‌آموز کار ساخت دانش را در ذهن خود انجام دهد. این وظیفه را ما به عنوان معلم نمی‌توانیم برای دانش‌آموز انجام دهیم، بلکه می‌توانیم شرایط کار را برای او فراهم کنیم.

توصیه ۲. همان‌گونه که در بحث مربوط به استاندارد اثبات و استدلال بیان شد، توصیه می‌شود از ارائه مستقیم فرمول‌ها و رابطه‌ها پرهیز شود. پیشنهاد می‌شود با یک نگاه استقرایی، مثال‌هایی عرضه گردد تا دانش‌آموزان با بی‌گیری آنها به رابطه مورد نظر دست یابند. همچنین در یک بحث، لزومی ندارد که برای هر حالت خاص، فرمول جداگانه‌ای ارائه شود. به عنوان مثال در بخش فاصله دو نقطه، لزومی ندارد که

فاصله یک نقطه تا مبدأ را به عنوان یک فرمول جداگانه ارائه کنیم. اگر بعد از چندین بار استفاده از فرمول اصلی، خود دانش‌آموز به این نتیجه رسید که حالت خاص آن را هم جداگانه به خاطر بسپارد، اشکالی ندارد. اما نباید عرضه این گونه فرمول‌های حالت خاص به یک رویه تبدیل شود. زیرا هرچقدر تعداد روابط و فرمول‌هایی که دانش‌آموز در ذهن دارد کمتر باشد و در مقابل در به کار بردن آنها توانمندی بیشتری از خود نشان دهند، مسئله حل کن قابل تری خواهد بود.

## نگاه کلی به فصل

دانش‌آموزان از پایه‌های قبل نسبت به دستگاه محورهای مختصات دکارتی شناخت دارند. آنها در کلاس نهم با روابط خطی و معادله خط آشنا شده‌اند. همچنین در کلاس دهم، ارتباط بین شیب خط و تانژانت زاویه بین خط با قسمت مثبت محور  $x$ ها آمده است. درس اول فصل حاضر به یادآوری و تکمیل مطالبی از هندسه تحلیلی دوبعدی و معادله خط می‌پردازد.

درس دوم مطالبی در رابطه با معادله درجه دوم و تابع درجه ۲ را شامل می‌شود. این مطالب هم در ادامه موضوعاتی است که دانش‌آموزان در پایه قبل درباره معادله درجه دوم و سهمی فرا گرفته‌اند. مسائلی در زمینه بهینه‌سازی به کمک توابع درجه ۲ در این درس ارائه شده است.

درس سوم به مطالعه معادلات گویا و معادلات رادیکالی و کاربردهایی از آنها اختصاص دارد. لازم به ذکر است که در ادامه کتاب و در فصل سوم، تابع‌های گویا و تابع‌های رادیکالی هم مورد بررسی اجمالی قرار گرفته‌اند.

نقشه مفهومی فصل



تصویر عنوانی

تصویر عنوانی این فصل در ارتباط با توابع درجه دوم است. بهتر است دانش آموزان را تشویق کنیم تا با دقت در محیط پیرامون خود، پدیده‌هایی را بیابند که در آنها شکل سهمی وجود داشته باشد؛ از برخی بناها، سازه‌ها و پل‌ها تا مسیر پرتابه‌های مختلف، فواره و موارد دیگر. از آنجا که آنان از پایه قبل با سهمی آشنا

هستند، لذا در شروع فصل نیز می‌توان درباره تصویر عنوانی فصل با آنها بحث کرد و از آنان خواست که مواردی از این‌گونه پدیده‌ها را ذکر کنند.

## اهداف کلی فصل اول:

- یادآوری و تکمیل معادله خط
- آموزش رابطه‌های مقدماتی در هندسه تحلیلی دو بعدی مانند فاصله دو نقطه و فاصله نقطه از خط
- یادآوری و تکمیل معادله درجه ۲
- تجزیه و تحلیل رفتار تابع درجه ۲
- حل مسائل بهینه‌سازی مرتبط با تابع درجه ۲
- آموزش حل معادلات گویا و معادلات گنگ
- ایجاد توانایی حل مسائل کلامی مرتبط با معادلات گویا و معادلات گنگ

# هندسه تحلیلی

درس اول

## پیش‌نیازها

- توانایی رسم نمودار یک خط با داشتن معادله آن
- شناخت معادله خطوط موازی با محورهای مختصات
- آشنایی با معادله خطوط نیمسازهای نواحی مختلف صفحه مختصات
- آشنایی با مفهوم عرض از مبدأ یک خط
- آشنایی با شرط موازی بودن دو خط
- توانایی محاسبه شیب یک خط با داشتن مختصات دو نقطه از آن
- توانایی به‌دست آوردن معادله یک خط با داشتن مختصات دو نقطه از آن

## اهداف درس اول

- یادآوری معادله خط در حالت کلی و حالت‌های خاص
- یادآوری شرط موازی بودن دو خط و آموزش شرط عمود بودن دو خط
- توانایی محاسبه فاصله دو نقطه با داشتن مختصات آنها
- توانایی یافتن مختصات نقطه وسط پاره خط
- توانایی به‌کارگیری فرمول فاصله نقطه از خط

## روشی تدریسی

### یادآوری

در شروع درس و در قالب کار در کلاس صفحه ۲، مرور نسبتاً جامعی بر مطالب سال‌های قبل در



ارتباط با معادله خط شده است. انتظار می‌رود دانش‌آموزان عزیز با انجام قسمت‌های مختلف این بخش، پیش‌نیازهای لازم برای ادامه بحث را دوره کنند؛ به همین جهت لازم است فرصت کافی در اختیار آنها قرار داده شود. همچنین در صورت لزوم می‌توان مثال‌های بیشتری نیز در این زمینه در کلاس مطرح کرد. شرط عمود بودن دو خط، موضوعی است که در فعالیت صفحه ۳ به آن پرداخته شده است. اثبات این شرط در کلاس توصیه نمی‌شود؛ بلکه پیشنهاد می‌شود با ارائه چند مثال مناسب، موقعیتی فراهم گردد که دانش‌آموزان بتوانند خودشان به‌طور استقرایی آن را نتیجه بگیرند. تکالیفی درباره خطوط موازی و خطوط عمود بر هم در کار در کلاس بعد (صفحه ۴) آمده است.

### فاصله دو نقطه

در این قسمت، رویکرد کتاب عبارت است از حرکت از حالت‌های خاصی به سمت حالت کلی. هم در حالت خاص و هم در حالت کلی، ابتدا مثال عددی ارائه شده و سپس حالت کلی در شکل جبری آمده است. در واقع، ابتدا بحث فاصله در مورد دو نقطه مشخص و هم عرض مطرح شده و سپس شکل جبری همین حالت خاص ارائه شده است. پس از آن برای حالت کلی هم این ترتیب مراعات شده است و شرایطی فراهم گردیده تا دانش‌آموزان رابطه کلی را خود به‌دست آورند. پس از آن، در کار در کلاس صفحه ۶، مسائلی در این مورد از هندسه و دنیای واقعی آمده است.

تذکر: ارائه فرمول جداگانه برای فاصله یک نقطه از مبدأ مختصات، توصیه نمی‌شود.

### مختصات نقطه وسط پاره خط

رویکرد این بخش هم مثل بخش قبل است. یعنی ابتدا حالت خاص در شکل عددی و جبری آمده و سپس حالت کلی نیز با همین ترتیب ارائه شده که همگی مبتنی بر فعالیت دانش‌آموزان است. کار در کلاس صفحه ۷ کمک می‌کند که آنها در به‌کارگیری رابطه به‌دست آمده، تبحر لازم را کسب کنند. تذکر ۱: در مثال‌های هندسی ارائه شده، تماماً فقط میانه مثلث مطرح شده و طول یا معادله آن با داشتن مختصات سه ضلع مثلث خواسته شده است. به عبارت دیگر به موضوعاتی مثل عمود منصف یک ضلع یا ارتفاع وارد بر یک ضلع پرداخته نشده است.

تذکر ۲: در این قسمت هم ارائه فرمول جداگانه برای قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر توصیه نمی‌شود و پیشنهاد می‌شود که از رابطه نقطه وسط برای حل مسائل مربوطه استفاده شود.

### فاصله نقطه از خط

آخرین مطلب این درس، یافتن فاصله نقطه از خط است. با وجود آنکه پیش‌نیازهای لازم برای اثبات

رابطه مورد نظر وجود دارد، اما ارائه اثبات این رابطه در کلاس توصیه نمی شود. به جای آن پیشنهاد می شود مراحل اثبات این رابطه در مورد یک مثال عددی، مانند مثال حل شده صفحه ۸ پیاده گردد. این کار دو مزیت خواهد داشت. اولاً دانش آموز مراحل اثبات را به طور ملموس در مورد یک نقطه معلوم و یک خط مشخص شده، ملاحظه می کند که توجیه مناسبی برای درستی فرمول مورد نظر است، ثانیاً بسیاری از مطالبی که تا کنون در این درس فراگرفته، برایش در ضمن این مثال مرور می شود.

تذکر: زمانی که از دانش آموز خواسته می شود که فاصله نقطه ای را از یک خط افقی یا عمودی محاسبه کند، با وجود آنکه می تواند از فرمول گفته شده استفاده کند، اما توصیه می شود که تأکید بر راهبرد رسم شکل باشد (مانند قسمت های (ب) و (پ) از سؤال ۱ کار در کلاس صفحه ۹).

## مختصات جغرافیایی و دستگاه مختصات دکارتی، مثالی از برنامه درسی تلفیقی

در زندگی مدرن امروزی، استفاده از مختصات جغرافیایی شکل عمومی تری به خود گرفته است؛ به عنوان مثال، برنامه های کاربردی که برای استفاده از تاکسی های اینترنتی طراحی شده اند، مبتنی بر موقعیت جغرافیایی مسافر و تاکسی هستند. همچنین یک جایگزین مناسب برای آدرس دادن آن است که شخص با یک برنامه کاربردی تلفن همراه، موقعیت خود را که از دو عدد تشکیل شده به فرد دیگری که او هم برنامه کاربردی مناسب را در اختیار دارد بفرستد تا راحت او را بیابد.

دانش آموزان با طول و عرض جغرافیایی از پایه های قبل آشنا هستند. همچنین از کلاس ششم ابتدایی با دستگاه محوری های مختصات آشنا شده اند و در پایه های بعدی هم از آن استفاده کرده اند. تمرین ۹ صفحه ۱۰ با یک نگاه تلفیقی به برنامه درسی و با توجه به استاندارد ارتباط و اتصال موضوعی در این درس آمده است. یکی از اهداف آموزش دستگاه مختصات دکارتی می تواند این مطلب باشد که دانش آموزان ذهنیت مناسبی به طول و عرض جغرافیایی پیدا کنند.

در صفحه ۱۰ کتاب، نقشه مسطحی از جهان به همراه یک محور منطبق بر خط استوا به عنوان محور طول ها و خطی منطبق بر نصف النهار مبدأ به عنوان محور عرض ها آمده است. دانش آموز باید به کمک مختصات جغرافیایی دو شهر تبریز و چابهار که در تمرین آمده، قادر باشد موقعیت این دو شهر نسبت به هم را بر روی نقشه تجسم نماید. باید به دانش آموزان توضیح داد که همان طور که دو محور  $x$  ها و  $y$  ها صفحه را به چهار ناحیه افراز می کنند، خط استوا و نصف النهار مبدأ نیز سطح زمین را به چهار ناحیه تقسیم می کنند. در جغرافی، این نواحی با اصطلاحاتی مثل شمالی شرقی، شمالی غربی، جنوبی شرقی و بالاخره

جنوبی غربی توصیف می‌شوند. به عنوان مثال می‌گویند طول جغرافیایی تبریز تقریباً  $46^\circ$  درجه شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود  $38^\circ$  درجه شمالی است. در ریاضی برای اجتناب از به کار بردن اصطلاحاتی مثل شمالی یا شرقی، از علامت مثبت و منفی استفاده می‌شود.

هدف از این تمرین، محاسبه فاصله تقریبی دو شهر داده شده، با استفاده از مختصات جغرافیایی آنهاست. البته می‌دانیم که فاصله بین دو نصف النهار متوالی و همچنین مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی در همه جهان یکسان نیست. در این تمرین با توجه به موقعیت کشورمان، این دو عدد تقریباً  $11^\circ$  کیلومتر در نظر گرفته شده‌اند. طبیعی است که این گونه محاسبه، همراه با خطا خواهد بود؛ چرا که در دنیای واقعی، این دو نقطه بر روی کره هستند و نه بر روی صفحه‌ای مسطح. در اینجا هدف آن نیست که وارد بحث‌هایی مثل فاصله ژئودزیک شد، بلکه همان‌طور که ذکر شد، عمده‌اً یک نقشه مسطح از جهان داده شده تا دانش آموز ذهنیت مناسبی از طول و عرض جغرافیایی پیدا کند و ارتباط آن را با دستگاه مختصات که سال‌ها در کتاب‌های ریاضی خود دیده است، درک نماید.

## معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

درس دوم

### پیش‌نیازها

- توانایی حل معادلات درجه دوم
- توانایی رسم نمودار سهمی با داشتن ضابطه جبری آن
- تشخیص اینکه یک سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم از روی ضابطه جبری آن
- یافتن طول و عرض رأس سهمی داده شده
- توانایی محاسبه مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع درجه ۲

### اهداف درس دوم

- استفاده از روش تغییر متغیر برای حل معادلات دو مجذوری.
- یافتن مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲ بدون حل معادله.
- تشکیل معادله درجه ۲ با  $s$  و  $p$  معلوم برای حل مسائل کاربردی مرتبط.
- محاسبه ماکزیمم یا مینیمم سهمی و استفاده از آن در حل مسائل بهینه‌سازی.
- تشخیص تعداد صفرهای تابع درجه ۲ و علامت آنها بدون محاسبه مقدار دقیق آنها.
- به‌دست آوردن ضابطه سهمی به کمک برخی اطلاعات از نمودار آن.

### روش تدریس

این درس، در واقع از دو قسمت مرتبط به هم تشکیل شده است. قسمت اول، مطالبی در مورد معادله درجه دوم را شامل می‌شود و قسمت دوم نکاتی در مورد تابع درجه ۲ را آموزش می‌دهد. قسمت اول، با حل یک معادله دو مجذوری به روش تغییر متغیر آغاز می‌شود. هدف این مثال و کار در کلاس بعد از آن در

صفحه ۱۱، آن است که اولاً روش حل معادله درجه دوم یادآوری شود و ثانیاً دانش‌آموزان با روش تغییر متغیر برای حل معادله آشنا شوند. البته در کتاب حاضر، کاربرد روش تغییر متغیر تنها به حل معادلات دو مجذوری محدود شده است.

### مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲:

هدف از فعالیت صفحه ۱۲ آن است که دانش‌آموزان بتوانند مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲ را به کمک ضرایب معادله به دست آورند. در اینجا هم شیوه کار، حرکت از مثال ملموس به سمت حالت کلی است؛ به این معنا که دانش‌آموزان ابتدا درستی روابط مورد نظر را برای معادله خاص بررسی می‌کنند و سپس آن روابط را در حالت کلی اثبات می‌کنند. توصیه می‌شود که این روند در جریان تدریس هم مدنظر باشد و زمان کافی در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد تا خودشان در ساخت دانش سهیم شوند.

### تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از $p$ و $s$

در ادامه، دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که چگونه با داشتن مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های یک معادله درجه ۲، آن معادله را تشکیل دهند. در کار در کلاس صفحه ۱۳ تکالیفی در این زمینه برای آنها در نظر گرفته شده است که باید در کلاس و با نظارت معلم خود آنها را انجام دهند.

### کاربرد توابع درجه ۲ در مدل‌سازی مسائل زندگی واقعی

قسمت دوم این درس که درباره تابع درجه ۲ است، با یادآوری روش محاسبه مقدار ماکزیم یا مینیم سهمی از پایه قبل آغاز می‌شود. در صفحه ۱۴ یک مثال حل شده از دنیای واقعی در زمینه بهینه‌سازی آورده شده است که در کار در کلاس صفحه بعد و همچنین در تمرینات آخر درس هم نمونه‌هایی از این گونه مسائل بهینه‌سازی به چشم می‌خورد. این موضوع نشان‌دهنده آن است که این گونه مسائل مدل‌سازی، جزو تأکیدات برنامه درسی و کتاب هستند که باید در ضمن تدریس کتاب، به این مطلب توجه شود.

### توجه به بازنمایی‌های چندگانه در سهمی

در ادامه، با یک مثال از دنیای واقعی، صفرهای تابع درجه ۲ از دیدگاه جبری و هندسی معرفی شده است. همچنین پس از آن صفرهای یک تابع در حالت کلی تعریف شده است. در اینجا هدف آن است که دانش‌آموز قدرت حرکت کردن بین دو بازنمایی هندسی و جبری را در مورد تابع درجه ۲ به دست آورد. به همین دلیل در صفحات ۱۶ و ۱۷ گاهی نمودار یک سهمی داده شده و ضابطه آن یا اطلاعاتی در مورد صفرهای آن خواسته شده است؛ یا برعکس، ضابطه یک سهمی داده شده و اطلاعاتی درباره نمودار آن خواسته شده است. انتظار می‌رود که این مطلب به درک تابع در حالت کلی هم کمک کند.

**تذکر ۱:** در کتاب‌های درسی قبل، مسائلی کلیشه‌ای به این شکل وجود داشت که: «اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲ باشند، حاصل عبارت‌های  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ،  $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ ، ... را پیدا کنید». در این کتاب به‌طور آگاهانه از طرح این‌گونه مسائل خودداری شده است و ارائه آنها در کلاس درس توصیه نمی‌شود.

**تذکر ۲:** دانش‌آموزان در سال دهم با توابع درجه ۲ و نحوهٔ رسم آنها آشنا شده‌اند ولی در آنجا مسائل بهینه‌سازی نداشتند. همچنان که ذکر شد، در اینجا مسائل بهینه‌سازی به صورت مثال حل شده، در قسمت کار در کلاس و همچنین در تمرین‌ها آمده است که نشان‌دهندهٔ تأکید برنامه درسی بر این موضوع است و این مطلب در تدریس این قسمت از درس دوم باید مد نظر قرار گیرد.

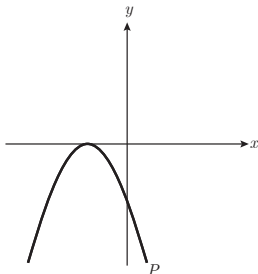
**تذکر ۳:** در مثال حل شدهٔ صفحهٔ ۱۴، از این مطلب که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $x$  برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$  است، استفاده شده است که برای اثبات درستی آن، بهتر است به فصل مثلثات ریاضی دهم ارجاع داده شود؛ چرا که در آنجا رابطهٔ  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$  برای مساحت مثلث را فرا گرفته‌اند.

**تذکر ۴:** در حل مسائل بهینه‌سازی، اگر جواب آخر رادیکالی شد، بهتر است مقدار تقریبی آن محاسبه شود تا دانش‌آموزان حس مناسبی نسبت به بزرگی آن عدد داشته باشند.

**تذکر ۵:** می‌دانیم «اگر مجموع چند عدد مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب آنها زمانی ماکزیمم است که همگی با هم برابر باشند». ارائه مطالبی از این دست، تحت عنوان «نکته» یا هر عنوان دیگر در بخش بهینه‌سازی، توصیه نمی‌شود.

**تذکر ۶:** در مورد تابع، از اصطلاح صفرهای تابع استفاده شده است و اصطلاح ریشه را تنها برای معادله به کار برده‌ایم.

**تذکر ۷:** دانش‌آموزان با مفهوم عرض از مبدأ از کلاس نهم آشنا هستند و در درس اول هم این مفهوم برای آنها یادآوری شده است. در پایان صفحهٔ ۱۵، آمده است که دو تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$ ، عدد  $c$  نقشی مشابه عرض از مبدأ در توابع خطی دارد و نشان‌دهندهٔ محل برخورد نمودار سهمی با محور  $y$  هاست. در صفحات بعد، این مطلب به آنها کمک می‌کند که از روی نمودار سهمی به راحتی بتوانند علامت  $c$  را تشخیص دهند.



**تذکر ۸:** در مورد تعداد صفرهای تابعی مانند  $p$  که بر محور  $x$ ‌ها مماس است و در صفحهٔ ۱۷ کتاب آمده، ذکر یک مطلب ضروری به نظر می‌رسد. در کتاب حاضر اصطلاح «ریشه مضاعف» برای یک معادله به کار برده نشده ولی دانش‌آموزان از کلاس دهم با آن آشنا هستند. در

مورد تعدا صفرهای تابع بالا، دانش آموز می تواند بگوید «معادله  $p(x)=0$  ریشه مضاعف دارد» یا اینکه «معادله  $p(x)=0$  دو ریشه یکسان دارد».

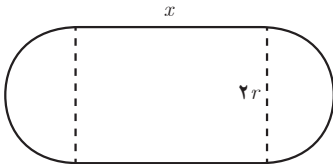
تذکر ۹: در تمرین ۶ صفحه ۱۸ نمودار چند سهمی داده شده و ضابطه جبری آنها خواسته شده است. این کار به روش های مختلف قابل انجام است. اما هدف کتاب مانند مثال حل شده بالا صفحه ۱۶، استفاده از صفرهای تابع است.

تمرین ۵ صفحه ۱۸، استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم  $150^\circ$  متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

حل:



$$150^\circ = 2x + 2\pi r \rightarrow 75^\circ = x + \pi r \rightarrow x = 75^\circ - \pi r$$

الف)

مساحت مستطیل  $S = x(2r)$

$$S = (75^\circ - \pi r) \times 2r$$

$$= -2\pi r^2 + 150^\circ \cdot r$$

$$r_{\max} = \frac{375}{\pi} \begin{cases} \rightarrow 2r = \frac{75^\circ}{\pi} \approx 239(m) \text{ عرض مستطیل} \\ \rightarrow x = 75^\circ - \pi \left(\frac{375}{\pi}\right) = 375(m) \text{ طول مستطیل} \end{cases}$$

ب)

استادیوم  $S = 2rx + \pi r^2 = 2r(75^\circ - \pi r) + \pi r^2$

$$S = -\pi r^2 + 150^\circ \cdot r$$

$$r_{\max} = \frac{75^\circ}{\pi} \begin{cases} \rightarrow x = 75^\circ - \pi \left(\frac{75^\circ}{\pi}\right) = 0 \text{ عرض مستطیل} \\ \rightarrow 2r = \frac{150^\circ}{\pi} \approx 477(m) \end{cases}$$

پس برای ماکزیمم شدن مساحت استادیوم، باید شکل آن دایره ای به قطر  $\frac{150^\circ}{\pi}$  (تقریباً ۴۷۷) متر باشد.

## یک بدفهمی رایج

برخی از دانش‌آموزان توجه ندارند که مقدار ماکزیمم یا مینیمم یک سهمی برابر عرض نقطهٔ مربوط به رأس آن است. لازم است این مطلب همان‌طور که در تذکر صفحه ۱۴ کتاب آمده، مورد تأکید قرار گیرد.



## معادلات گویا و معادلات رادیکالی

درس سوم

### پیش‌نیازها

- آشنایی با عبارات‌های گویا
- توانایی انجام چهار عمل اصلی با عبارات‌های گویا
- توانایی محاسبه کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) چند جمله‌ای‌ها
- آشنایی با عبارات‌های رادیکالی
- توانایی محاسبه با عبارات‌های رادیکالی
- مسلط بودن به اتحاد‌های جبری، به‌ویژه اتحاد مربع دو جمله‌ای

### اهداف درس سوم

- توانایی حل معادلات گویا
- توانایی حل معادلات رادیکالی
- مهارت حل مسائل کلامی مرتبط با معادلات گویا و معادلات گنگ

### روش تدریس

#### معادلات گویا

قسمت اول این درس درباره معادلات گویاست. درس با تعریف نسبت طلایی آغاز می‌شود. با وجود آنکه فرایند محاسبه نسبت طلایی به‌طور کامل و با تمام جزئیات در کتاب آمده است، اما بهتر است با دادن فرصت کافی به دانش‌آموزان، بخشی از کار را بر عهده آنها قرار داد.

## استفاده از پژوهش‌های دانش‌آموزی، در جریان تدریس

در حاشیه صفحه ۱۹ به برخی از جلوه‌های نسبت طلایی در بدن انسان، در بعضی از گیاهان و همچنین در پاره‌ای از بناها و آثار هنری اشاره شده است، بهتر است از جلسه قبل، از گروهی از دانش‌آموزان داوطلب تقاضا کرد تا تحقیقی درباره عدد طلایی و کاربردهای آن انجام دهند و گزارش آن را در کلاس برای هم‌کلاسی‌های خود ارائه دهند.

در صفحه ۲۰ یک فعالیت دو قسمتی آمده است. یکی از اهداف قسمت اول این فعالیت، یادآوری نحوه یافتن ک‌م‌م چندجمله‌ای هاست که در جریان حل یک معادله گویا به آن پرداخته شده است. قسمت دوم این فعالیت، یک مسئله دنیای واقعی است که دانش‌آموزان راهنمایی شده‌اند تا آن را با یک معادله گویا مدل‌سازی و حل کنند. نمونه دیگری از این گونه مسائل در کار در کلاس صفحه بعد آمده است. ارائه مسائلی از این نوع در کلاس درس قویاً توصیه می‌شود.

**تذکر ۱:** احتمال زیادی وجود دارد که دانش‌آموزان پیش‌نیازهای مربوط به معادلات گویا را فراموش کرده باشند. زیرا اکثر این پیش‌نیازها را در کلاس نهم خوانده‌اند و در کلاس دهم روی آنها تأکید چندانی نشده است. به عنوان مثال، ممکن است بسیاری از آنها قادر باشند ک‌م‌م دو عدد را محاسبه کنند ولی در مورد ک‌م‌م چندجمله‌ای‌ها مشکلات آنها بیشتر خواهد بود. به همین دلیل همچنان که ذکر شد، در قسمت اول فعالیت صفحه ۲۰، این مفاهیم تا حدودی یادآوری شده‌اند، اما ممکن است کافی نباشد و شما مجبور باشید مثال‌های بیشتری را در کلاس خود مطرح نمایید.

**تذکر ۲:** همچنان که بیان شد، مسائل مدل‌سازی مانند مثال «مترو» در صفحه ۲۰ و مثال «ماشین‌های چمن‌زنی» در صفحه ۲۱ جزو تأکیدات برنامه درسی و کتاب هستند که در تمرین‌های پایانی درس نیز از این گونه مسائل آمده است. بنابراین لازم است در تدریس این قسمت از کتاب، تأکید ویژه‌ای بر این نوع مسائل باشد.

**تذکر ۳:** کادر پایین صفحه ۱۹ در مورد روش حل معادلات گویا، فقط یکی از روش‌های حل این گونه معادلات را بیان کرده اما تأکید کتاب بر استفاده از راه‌حل‌های چندگانه است. بنابراین همان‌طور که در مثال‌های حل شده این قسمت دیده می‌شود، دانش‌آموزان مجازند تا از روش‌های دیگری مثل مساوی قرار دادن حاصل ضرب طرفین با حاصل ضرب وسطین هم استفاده کنند.

## معادلات رادیکالی

شروع این قسمت از درس با یکی از موضوعاتی است که دانش‌آموزان در ابتدای فصل حاضر آن را فرا گرفته‌اند؛ مسئله‌ای مرتبط با فاصله دو نقطه مطرح شده است که حل آن به یک معادله رادیکالی منجر می‌شود. در جریان حل این معادله در صفحه ۲۲ کتاب، روش حل معادلات رادیکالی توضیح داده می‌شود.

البته باز هم در کادر صفحه ۲۲ تنها به یکی از روش‌های حل این گونه معادلات اشاره شده است، اما در اینجا هم تأکید بر راه‌حل‌های چندگانه خواهد بود.

حدود و ثغور مطالب: همان‌طور که در پاورقی صفحه ۲۲ ذکر شده، معادلات رادیکالی مورد مطالعه در این کتاب، به معادلات رادیکالی با فرجه ۲ محدود شده است. با وجود آنکه مثال‌های نسبتاً متنوعی در جریان درس و در تمرین‌ها وجود دارد، اما همگی آنها در چارچوب حد و مرز تعیین شده می‌باشند.

تذکر: هم در بخش معادلات گویا و هم معادلات رادیکالی، هر جا حل معادله‌ای را از دانش‌آموز خواسته‌ایم، بلافاصله پرسیده‌ایم که آیا همه جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول‌اند؟ به عبارت دیگر تأکید زیادی بر امتحان کردن جواب‌های به‌دست آمده وجود دارد. البته در بخش معادلات رادیکالی، بحث مختصری در مورد دامنه متغیر وجود دارد تا اگر جواب به‌دست آمده در دامنه متغیر نبود، آن را به عنوان جواب نپذیریم. با این وجود می‌دانیم که ممکن است جواب در دامنه متغیر باشد ولی باز هم آن را نپذیریم. به هر حال اگر امتحان کردن جواب به‌دست آمده کار دشواری باشد، می‌توان قبل از اقدام به حل معادله، دامنه متغیر مربوط به آن را محاسبه کرد که در این صورت باید مراقب جواب‌های اضافی احتمالی بود.

## توصیه آموزشی

پیشنهاد می‌شود در جریان تدریس این فصل، تا حد امکان از سؤال‌های باز پاسخ هم استفاده شود؛ مانند تمرین آخر صفحه ۲۴. چرا که این گونه مسائل ظرفیت آن را دارند که بحث‌های کلاسی را افزایش دهند. پیامد این مطلب آن است که از دل این گفتمان ریاضی، می‌توان به جریان فکری دانش‌آموزان و بدفهمی‌های احتمالی آنان پی برد.

## بدفهمی‌های رایج

یکی از بدفهمی‌های رایج بین دانش‌آموزان آن است که هنگام توان‌رسانی دو جمله‌ای‌ها، فقط مجموع مربعات جملات آنها را در نظر می‌گیرند؛ یعنی به غلط عبارت  $(a+b)^2$  را با  $a^2+b^2$  معادل در نظر می‌گیرند. این بدفهمی ممکن است در حل برخی معادلات رادیکالی نیز خود را نشان دهد و دانش‌آموز را به جواب نادرست سوق دهد؛ معادلاتی مانند  $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$  که در تمرینات صفحه ۲۳ آمده است.

## نمونه سؤالات ارزشیابی

۱ یک روستا دارای دو دبستان است که مختصات آنها در نقشه اداره آموزش و پرورش، به صورت  $E(3, 0)$  و  $F(7, 2)$  است. هدف آن است که هر دانش آموز در نزدیک ترین مدرسه نسبت به خانه خود ثبت نام کند. معادله خطی را بنویسید که این روستا را با این هدف به دو قسمت تقسیم کند.

۲ اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند، نشان دهید:

(الف) خط گذرا از نقاط  $P(a, b)$  و  $Q(b, a)$  همواره بر خط  $y=x$  عمود است.

(ب) نقطه وسط پاره خط  $PQ$  همیشه روی  $y=x$  واقع است.

۳ نقاط  $(0, 0)$  و  $(4, 0)$  دو رأس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید.

مسئله چند جواب دارد.

۴ فاصله نقطه  $P(7, -4)$  را از خط به معادله  $2x+y=5$  به دست آورید.

۵ تابع  $f(x)=ax^2+bx+c$  ریشه ندارد و حاصل  $a+b+c$  عددی منفی است. ثابت کنید  $c < 0$ .

۶ رابطه  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  زمان نوسان (یک حرکت رفت و برگشت) پاندولی به طول  $l$  متر را بر حسب ثانیه

نشان می دهد. اگر هر نوسان یک پاندول  $1/5$  ثانیه زمان ببرد، مطلوب است محاسبه طول آونگ  $(g = 9/8 \frac{m}{s^2})$

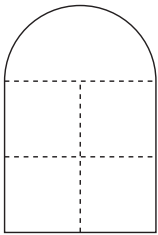
۷ یک معادله گویا بنویسید که جمله «جواب هیچ معادله گویا نمی تواند صفر باشد» را نقض کند.

۸ در بسیاری از بناهای سنتی کشورمان پنجره هایی به شکل مقابل وجود دارد که

از یک مستطیل و نیم دایره ای به قطر پهنای مستطیل در بالای آن تشکیل شده است.

اگر محیط مستطیل  $4/5$  متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری انتخاب کنید که پنجره

بیشترین میزان نوردهی را داشته باشد.



۹ در مثلثی با رئوس  $A(1, -1)$  و  $B(3, 0)$  و  $C(1, 4)$  موارد زیر را به دست آورید:

(الف) مختصات وسط  $BC$  (ب) معادله میانه  $AM$  (پ) محیط مثلث  $ABC$

۱۰ نقاط  $(0, 1)$ ،  $(2, -1)$  و  $(6, 3)$  سه رأس یک مستطیل هستند مساحت مستطیل را به دست آورید.

۱۱ خط  $l$  از مبدأ مختصات گذشته و بر خطی که از دو نقطه  $A(1, 2)$  و  $B(-3, 0)$  می گذرد عمود است.

(الف) معادله خط  $l$  را به دست آورید. (ب) خط  $l$  خط  $x=2$  را با کدام عرض قطع می کند.

۱۲ دو نقطه  $A(m-2, 2)$  و  $B(m, 2m)$  را در نظر بگیرید. اگر  $P$  وسط پاره خط  $AB$  به فاصله  $\sqrt{20}$  از

مبدأ مختصات باشد، آنگاه مقدار  $m$  را به دست آورید. مسئله چند جواب دارد؟

۱۳ اگر فاصله مبدأ مختصات از خط  $a^2x + (a^2+1)y = 5$  برابر ۱ باشد، فاصله مبدأ از خط  $a^2x + (a^2+1)y = 7$  چقدر است؟

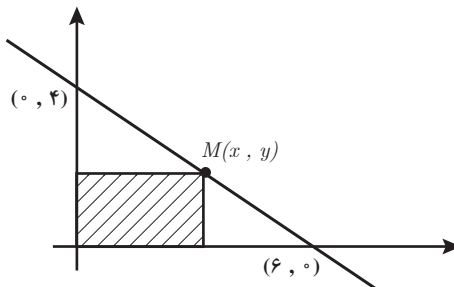
۱۴ اگر خط به معادله  $y - 2x + 8 = 0$  محورهای مختصات را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع کند، فاصله نقطه  $C(6, -1)$  از وسط  $AB$  چقدر است؟

۱۵ اگر فاصله نقطه  $A(2m-1, 5)$  از خط  $x = -2$  برابر ۷ باشد، مختصات  $A$  را به دست آورید. این مسئله چند جواب دارد؟

۱۶ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{8}{3}$  باشد.

۱۷ اگر مجموع ریشه‌های معادله  $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$  مساوی ۶ باشد، حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.

۱۸ با توجه به نمودار زیر، بیشترین مساحت ممکن مستطیل هاشور خورده را تعیین کنید.



۱۹ معادلات زیر را حل کرده و قابل قبول بودن جواب‌ها را بررسی کنید.

الف)  $\frac{x+1}{x-1} = 1 - \frac{2}{x+4}$

ب)  $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{2}$

پ)  $\sqrt{2x+1} = 1-x$

ت)  $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$

۲۰ بیشترین مقدار مساحت زمینی مستطیل شکل که آن را می‌توان با نرده‌ای به طول ۴۸ متر محصور کرد، چقدر است؟

۲۱ دو دستگاه کلرزن با هم در ۱۲ دقیقه کار کلرزنی به یک منبع آب را تمام می‌کنند. اگر دستگاه‌ها جداگانه کار کنند، دستگاه قدیمی‌تر ۱۰ دقیقه دیرتر از دستگاه جدید کار کلرزنی را انجام می‌دهد.

مشخص کنید هر کدام از این دستگاه‌ها به تنهایی این کار را در چند دقیقه می‌توانند انجام دهد.

۲۲ دو نقطه  $A(2m+1, 3)$  و  $B(2-m, -1)$  را در نظر بگیرید.  $m$  را طوری بیابید که خط گذرنده از نقاط  $A$  و  $B$  بر نیمساز ربع اول و سوم عمود باشد.

۲۳ نشان دهید نقاط  $A(-1, -2)$ ،  $B(-2, 1)$  و مبدأ بر مختصات، رأس‌های یک مثلث قائم‌الزاویه هستند.