

حد و پیوستگی

۵

- ۱ مفهوم حد و فرایندهای حدی
- ۲ حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)
- ۳ قضایای حد
- ۴ محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)
- ۵ پیوستگی

فصل



نگاه کلی به فصل

این فصل شامل ۵ درس است. در درس اول این فصل، ابتدا در مورد فرایند حدی در قالب فعالیت ارائه شده و سپس ارائه شهودی از حد به کمک جدول مقادیر و رسم نمودار صورت می‌گیرد. در پایان درس اول مفهوم همسایگی و بر اساس آن، تعریف حد (دو طرفه) تابع در یک نقطه بیان شده است. در درس سوم، تعریف حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست) تابع در یک نقطه مفهوم‌سازی شده است.

در درس سوم، برخی قضایای حد ارائه شده است که ابزارهایی برای محاسبه سریع‌تر حد به دانش‌آموزان می‌دهد و سپس در درس چهارم، به روش‌های محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$) که به کمک قضایا قابل محاسبه نیستند، اشاره شده است.

در درس آخر فصل به مفهوم پیوستگی توابع در یک نقطه و نیز در یک بازه و همچنین مفهوم پیوستگی یک طرفه می‌پردازد.

نمای کلی فصل

دانستنی‌هایی برای معلم

مفهوم حد در ریاضیات برای بیان رفتار یک تابع، دنباله‌ای از اعداد یا یک سری مورد استفاده قرار می‌گیرد. بررسی این رفتار در نقاط روی صفحه یا در بی‌نهایت صورت می‌گیرد. حد همچنین در حساب دیفرانسیل و انتگرال و نیز در آنالیز ریاضی برای تعریف مفهوم پیوستگی، مشتق و انتگرال‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

بسیاری از ریاضی‌دانان در زمان‌های مختلف، در کار با حد، روش‌های مختلفی را ارائه کرده و با موانع و مشکلاتی هم مواجه بوده‌اند که نشان‌دهنده سیر تحول، توسعه و تکامل این مفهوم در طولانی مدت بوده که به صورت کنونی درآمده است.

ریاضی‌دان‌ها حتی قبل از اینکه بتوانند مفهوم دقیق حد را بیان کنند، با برخی فرایندهای حدی آشنا

بودند و در مورد آن بحث کرده‌اند. با اینکه عمر شاخه حساب دیفرانسیل، بیش از چند قرن نیست، حتی یونانیان باستان نیز درکی از مفهوم حد داشته‌اند. به‌عنوان مثال، ارشمیدس مقدار تقریبی عدد π (پی) را با استفاده از محیط چند ضلعی‌های منظم محاطی در دایره‌ای به شعاع یک واحد، وقتی که تعداد اضلاع زیاد می‌شوند، به‌دست آورده است (روش افنا).

در قرون وسطی نیز تا زمان رنسانس، مفهوم حد برای به‌دست آوردن مساحت شکل‌های مختلف به‌کار رفته است. نیوتن و لایب‌نیتس در قرن هفدهم، درک شهودی جزئی از حد داشته‌اند و حتی حدهای پیچیده‌ای را نیز محاسبه کرده‌اند، اما نه آنها و نه دانشمندان دیگر در آن قرن، تعریف دقیقی از حد ارائه نکرده‌اند.

کوشی در اوایل قرن نوزدهم، اولین تعریف کامل نسبت به تعریف‌های ارائه شده قبل از آن به‌صورت زیر ارائه کرد:

«وقتی که مقادیر متوالی به یک متغیر نسبت داده می‌شود و مقادیر تابع به عدد ثابتی نزدیک شوند به‌طوری که اختلاف آنها از مقداری ثابت به هر اندازه کوچک قابل انتخاب باشد، این مقدار ثابت را حد همه مقادیر متغیر می‌گویند».

اگرچه تعریف کوشی از حد چندان دقیق نبود، ولی او قدم بزرگی برای رسیدن به تعریف دقیق فعلی برداشت، تا اینکه سرانجام ویرشتراس در قرن نوزدهم، تعریف دقیقی از حد به‌صورت زیر ارائه کرد:

«عدد حقیقی l را حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow a$ (x به سمت a میل می‌کند) می‌نامیم، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in D_f$ که $|x-a| < \delta$ داشته باشیم $|f(x)-l| < \varepsilon$ و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

این تعریف دقیق ویرشتراس، به‌دلیل متناسب نبودن با سطح درک و انتزاع دانش‌آموزان دوره متوسطه، معمولاً در کتاب‌های درسی ریاضی دوره متوسطه بیان نمی‌شود و به جای آن توصیفی از آن تعریف به‌صورت زیر ارائه می‌گردد:

«حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می‌کند برابر l است اگر بتوانیم $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه به l نزدیک کنیم به شرط آنکه x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشد و می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ».

۱

درس

مفهوم حد و فرایندهای حدی

اهداف درس

- ۱ آشنایی با برخی فرایندهای حدی (تزدیک شدن و میل کردن)
- ۲ درک شهودی حد به کمک جدول مقادیر و رسم نمودار تابع و آشنایی با نماد حد
- ۳ درک مفهوم همسایگی (دو طرفه، راست، چپ و محذوف) و نقش آن در وجود حد یک تابع در یک نقطه
- ۴ درک مفهوم حد تابع در یک نقطه

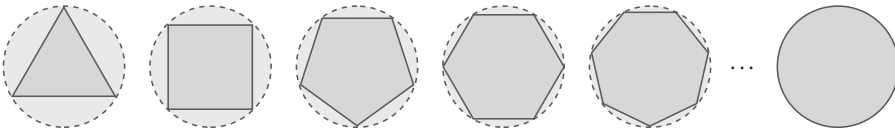
روش تدریس

این درس با فعالیتی در خصوص فرایندهای حدی شروع می‌شود که هدف آن، فراهم آوردن تجربیاتی برای دانش‌آموزان تا مفهوم حد در ذهن دانش‌آموز به درستی شکل گیرد و زمینه تعریف ریاضی حد فراهم شود.

برای ورود مناسب به آموزش مفهوم حد، معلم می‌تواند متناسب با دانش و تجربه دانش‌آموزان کلاس خود، از موقعیت‌هایی استفاده کند که در آن مفهوم حد حضور دارد و به روشنی دیده می‌شود (مانند یافتن شیب خط مماس، پیدا کردن سرعت لحظه‌ای و...).

در این درس از دو فرایند هندسی برای ایجاد زمینه آشنایی دانش‌آموز با مفاهیم «میل کردن» و «حد» استفاده شده است. در فعالیت اول، که مشابه روش افنای ارشمیدس برای تقریب عدد پی (π) است، دایره‌هایی به شعاع ۱ را در نظر می‌گیریم و درون آنها به ترتیب ۳ ضلعی منتظم، ۴ ضلعی منتظم و... را محاط می‌کنیم. هدف فعالیت این است که دانش‌آموزان با نگاه کردن به شکل‌ها و جدول به این نتیجه برسند که وقتی تعداد اضلاع چند ضلعی‌های محاطی زیاد و زیادتر می‌شود، مساحت آنها نیز به مساحت دایره (عدد پی) تزدیک و تزدیک‌تر می‌شود (تزدیک شدن از چپ).

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱ با افزایش اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟

۳ اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر $\pi = 3.14159$ در نظر بگیریم و مساحت n ضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n \in \mathbb{N}$ نشان می‌دهد:

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون دایره) به عدد... که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی‌های منتظم درون دایره (محاطی) را به هر اندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

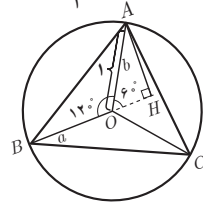
برای تأیید این نتیجه به صورت غیر هندسی، مقدار تقریبی عدد پی تا ۵ رقم اعشار داده شده است و جدولی تنظیم شده است که مساحت n ضلعی‌های منتظم محاطی درون دایره به ازای برخی $n \in \mathbb{N}$ داده شده است.

در این فعالیت لازم نیست روش به دست آوردن اعداد داده شده در جدول (مقادیر A_n) برای دانش‌آموزان گفته شود ولی متناسب با موقعیت کلاس و سطح توانایی علمی آنان در صورت تشخیص معلم، می‌توان روش محاسبه مساحت n ضلعی‌های محاطی را به کمک ماشین حساب به صورت صفحه بعد بیان نمود:

۳ ضلعی منتظم محاطی: $\alpha = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

$$o\Delta AH: \hat{H} = 90^\circ, \hat{o} = 60^\circ \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{AH}{oA} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{1} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\Delta_{AoB}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot AH = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

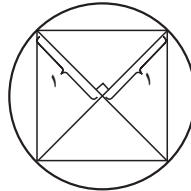


۴ ضلعی منتظم محاطی:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

$$S = 4 \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 90^\circ \right) = 2$$

چهارضلعی
منتظم (مربع)



و به طور کلی در n ضلعی منتظم محاطی داریم:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

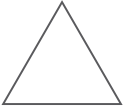
(می دانیم مساحت مثلثی با دو ضلع a و b و زاویه بین θ برابر است با: $S = \frac{1}{2} ab \sin \theta$)

$$S_{n \text{ ضلعی منتظم محاطی}} = h \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{360^\circ}{n} \right) = \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$$

در پایان فعالیت نیز تأکید بر اینکه به هر اندازه که بخواهیم می توانیم مساحت چند ضلعی های منتظم محاطی را به مساحت دایره محیطی نزدیک کنیم به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم. اندازه دلخواه و اندازه دلخواه دو کلید واژه مهمی است که توصیه می شود توجه دانش آموزان را به آن دو جلب کنیم، چرا که در تعریف حد، این دو کلید واژه نقشی اساسی ایفا می کنند. در فعالیت دوم هم دانش آموزان با یک فرایند حدی آشنا می شوند که با مشاهده شکل ها و تکمیل جدول داده شده، به این نتیجه می رسد که با ادامه فرایند نصف کردن اضلاع مثلث ها، اندازه هر ضلع و در نتیجه اندازه محیط مثلث ها به صفر نزدیک و نزدیک تر می شوند.

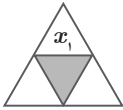
در این فعالیت دانش آموزان نزدیک شدن یا میل کردن از سمت چپ را مشاهده و تجربه می کنند. در این فعالیت نیز مفید هست که توجه دانش آموزان را مجدد به این نکته جلب کنیم که محیط مثلث ها را می توانیم به هر اندازه دلخواهی به صفر نزدیک کنیم به شرط آنکه تعداد مراحل انجام کار به قدر کافی زیاد باشد.

یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ را در نظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می باشد.

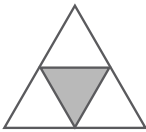


۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را x_1 و اندازه محیط آن را P_1 می نامیم.

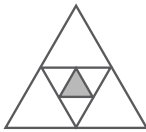
$$P_1 = 3 \quad \text{و} \quad x_1 = 1$$



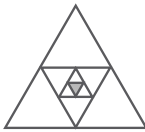
۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع های مثلث های جدید را ادامه دهیم و در مرحله n طول ضلع مثلث به وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید:



(۱)



(۲)



(۳)

x_n	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$...	$\frac{1}{2^n}$
P_n	۳	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$...	$\frac{3}{2^n}$

۳ اندازه اضلاع مثلث ها، به چه عددی نزدیک می شوند؟ صفر

۴ اندازه محیط این مثلث ها، به چه عددی نزدیک می شوند؟ صفر

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x در نظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را بر حسب ضلع آن بیان می کند، آن گاه داریم $f(x) = 3x$.

همان طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می شود، محیط مثلث ها، یعنی مقادیر تابع f ، نیز به عدد صفر نزدیک می شوند.

در مثال حل شده صفحه ۱۱۶، رفتار یک تابع در اطراف نقطه $x = 2$ به کمک رسم نمودار و جدول مقادیر بررسی شده است. معلم می تواند متناسب با سطح کلاس از مثال های جایگزین استفاده نماید. در همین مثال برای اولین بار دانش آموزان با نماد حد و نحوه نمایش دادن آن آشنا می شوند.

در کار در کلاس صفحه ۱۱۷، سه تابع داده شده که یکی از آنها در $x = 3$ تعریف شده $(g(x))$ و یکی از آنها در نقطه $x = 3$ تعریف شده ولی مقدار تابع در $x = 3$ با مقدار حد تابع در آن نقطه یکسان نمی باشد $(h(x))$ و تابع سوم از سه تابع داده شده $(f(x))$ هم در $x = 3$ تعریف شده و هم مقدار تابع در $x = 3$ با حد تابع در آن نقطه برابر است.

توابع f ، g و h با ضابطه‌های $f(x) = x+3$ و $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ و $h(x) = \begin{cases} x+3 & x \neq 3 \\ 4 & x = 3 \end{cases}$ را در نظر بگیرید:

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید:

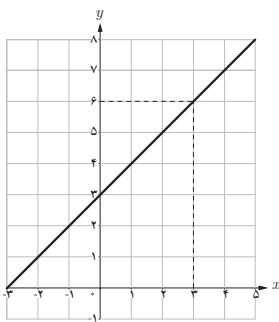
$$h(3) = 4 \quad \text{تعریف نشده است} \quad g(3) = 6 \quad f(3) = 6$$

۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع f ، g و h هر کدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.

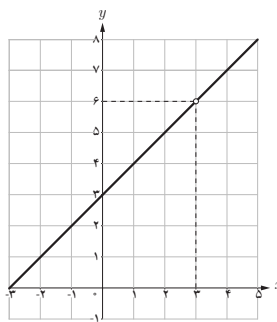
x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	→	۳	←	۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	۶	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	تعریف نشده	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$h(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	۴	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱

۳ نمودارهای توابع f ، g و h به صورت زیر رسم شده است.

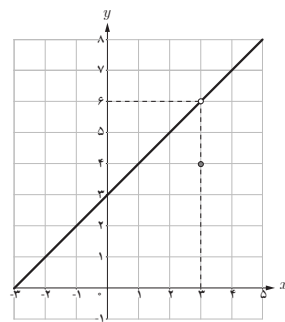
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ هر کدام به چه عددی نزدیک می‌شوند. هر سه به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.



نمودار f



نمودار g



نمودار h

۴ حد هر سه تابع وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر ۶ است به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 6$$

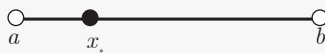
معلم پس از انجام این کار در کلاس توسط دانش‌آموزان طی بحث کلاسی باید روی دو نتیجه زیر تأکید نماید:

(الف) ممکن است یک تابع در نقطه‌ای به طول a تعریف نشده باشد ولی در این نقطه حد داشته باشد.
 (ب) ممکن است یک تابع در نقطه‌ای به طول a تعریف نشده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

پس از این کار در کلاس، تعریف همسایگی، همسایگی محذوف و نیز همسایگی راست و چپ ارائه شده است. با توجه به اینکه در این کتاب از تعریف دقیق حد (روش ϵ و δ) برای ارائه حد استفاده نشده است، لذا از ورود به تعریف همسایگی متقارن و محذوف متقارن و نمایش آنها به صورت نامعادله قدر مطلق اجتناب شده است و لزومی به ارائه این تعاریف در کلاس درس نیست.

تعریف

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.
 بنابراین اگر $x_0 \in (a, b)$ ، آن‌گاه بازه (a, b) یک همسایگی x_0 است.



اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a, b) - \{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می‌نامیم.



به همین ترتیب:

اگر $r > 0$ ، در این صورت بازه $(x_0, x_0 + r)$ را یک همسایگی راست و بازه $(x_0 - r, x_0)$ را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

توجه: با توجه به تعریف، منظور از همسایگی یک نقطه در این کتاب، همسایگی دوطرفه است و هر جا که هدف همسایگی یک طرفه باشد، همسایگی راست (یا چپ) ذکر می‌شود.
 کار در کلاس بالای صفحه ۱۱۹ پس از ارائه تعریف همسایگی، در خصوص مسائل مرتبط با تمرین همسایگی آورده شده است.

سؤال ۱: این کار در کلاس، سؤالی باز پاسخ می باشد که دانش آموزان می توانند با توجه به سطح درک خود به آن، پاسخی متفاوت و درست ارائه دهند. به عنوان مثال دو نمونه پاسخ برای هر یک از قسمت های این سؤال در زیر ارائه شده است:

کار در کلاس ص ۱۱۹

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

همسایگی محذوف ۳: $\{3\} - (2, 6)$ یا $\{3\} - (1, 4)$

همسایگی راست ۳: $(3, 5)$ یا $(3, 10)$

همسایگی چپ ۳: $(1, 3)$ و $(-1, 3)$

۲ آیا بازه $(2, 3)$ یک همسایگی ۲ می باشد؟ چرا؟ نه چون شامل ۲ نمی باشد ولی این بازه یک همسایگی راست ۲ می باشد.

پس از این کار در کلاس، تعریف حد بر اساس تعریف همسایگی ارائه شده است. در این تعریف بر دو واژه به میزان دلخواه و به قدر کافی تأکید شده است و اساس این تعریف در واقع این دو واژه می باشد به همین دلیل پیشنهاد می شود در نمونه های قبل از این تعریف و بعد از این تعریف، بر این دو واژه و درک جایگاه آن در مشخص کردن حد داشتن یک تابع یا نداشتن حد تأکید زیادی داشته باشند.

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می گوئیم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به شرط آنکه متغیر x با مقادیر مخالف a از دو طرف) به قدر کافی به a ، نزدیک شود.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

در این صورت می نویسیم:

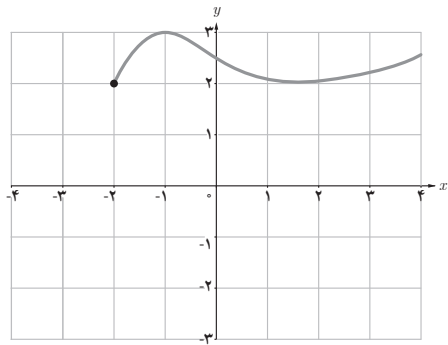
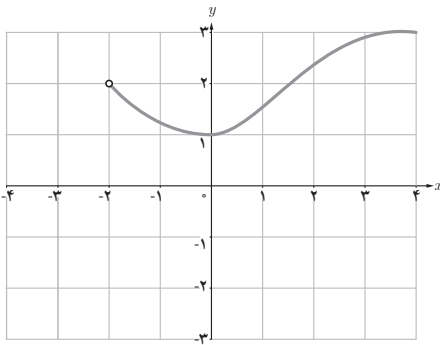
عدد L را حد تابع f در a می نامیم.

کار در کلاس دوم صفحه ۱۱۹ در خصوص حد توابع می باشد که در صفحه بعد حل آنها ارائه می شود: سؤال اول این کار در کلاس سؤال های باز پاسخی هستند که دانش آموزان می توانند پاسخ های متفاوت درستی به این سؤال ها بدهند.

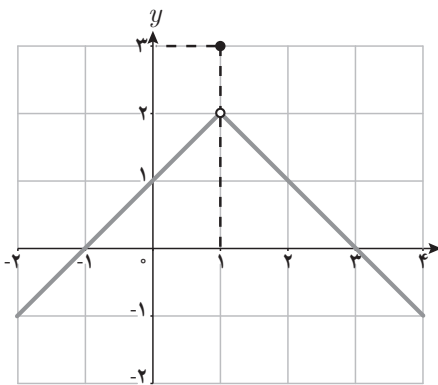
به عنوان نمونه ۲ پاسخ برای هر یک از سؤال‌های ۱ تا ۴ این کار در کلاس به شرح زیر می‌باشد :

کار در کلاس ص ۱۱۹

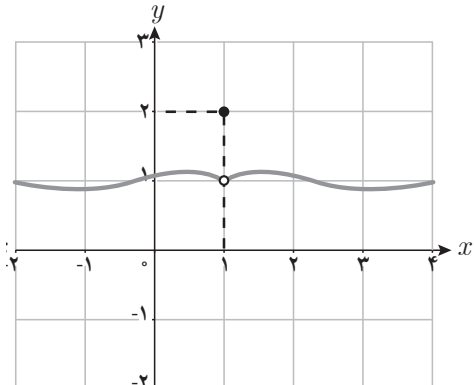
۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.



۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

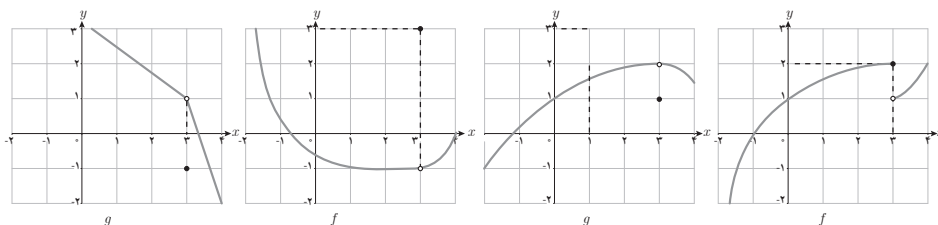


g

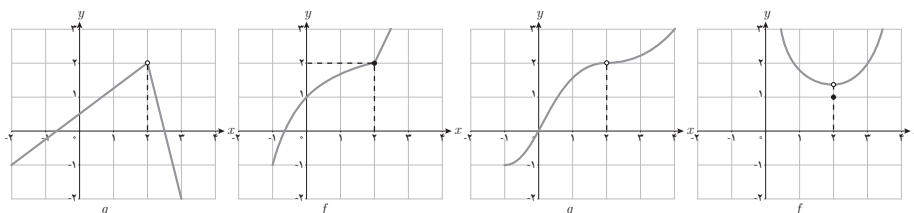


f

۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(3) \neq g(3)$.



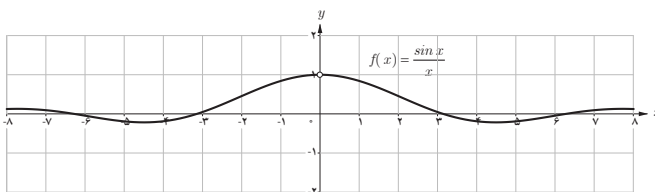
۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما g در ۲ تعریف نشده باشد.



x	$\frac{\sin x}{x}$
± 1	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99234665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99995839
± 0.01	0.99999833
± 0.005	0.99999958
± 0.001	0.99999998

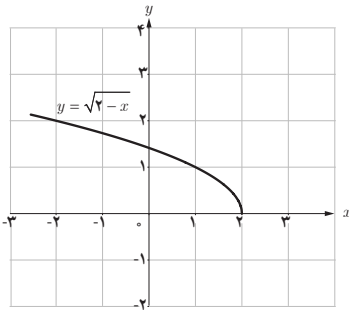
۵ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور x ها برحسب رادیان است).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



با اینکه این سؤال، سؤالی باز پاسخ نیست ولی سؤالی است که از نتیجه این سؤال در درس‌های بعد این فصل و حل مسائل آن به خصوص در محاسبه حدود کسری (حالت \neq) شامل توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. با توجه به اینکه قضیه فشردگی در این کتاب ارائه نشده است، در محاسبه این تمرین یعنی محاسبه $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x}{x}$ با استفاده از جدول مقادیر و نمودار رسم شده حد تابع ۱ به دست می‌آید.

پس از کار در کلاس صفحه ۱۱۹ و صفحه ۱۲۰، مثال حل شده‌ای ارائه شده است که در آن بر تعریف شدن تابع در حداقل یک همسایگی محذوف برای حد داشتن تأکید شده است و چون $f(x) = \sqrt{2-x}$ در هیچ همسایگی محذوف ۲ تعریف نشده است پس این تابع در نقطه $x=2$ حد ندارد.



مثال: آیا تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در نقطه $x=2$ حد دارد؟

چرا؟

حل: می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f = (-\infty, 2]$ می‌باشد.

چون تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است

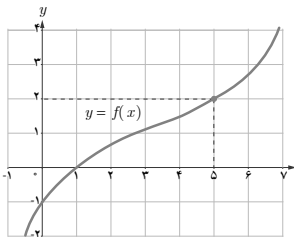
(مقادیر بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه

$x=2$ حد ندارد.

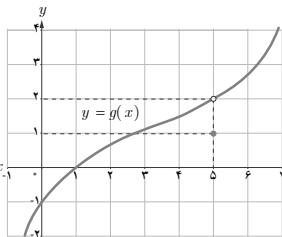
تمرین ص ۱۲۰

۱ نمودار سه تابع f ، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطه $x=5$ ، مشخص

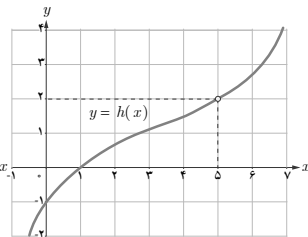
کنید



$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$$

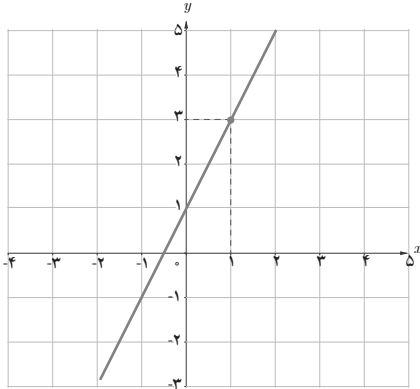


$$\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2$$

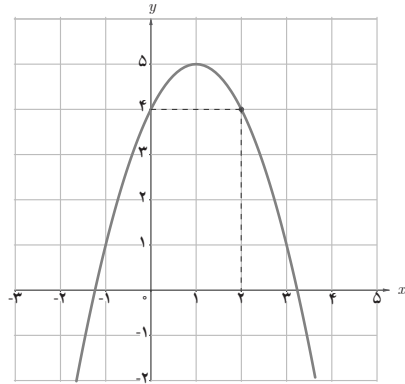


$$\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 2$$

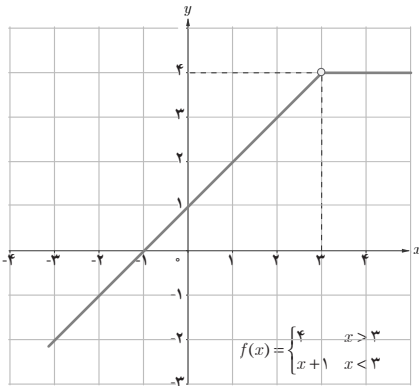
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



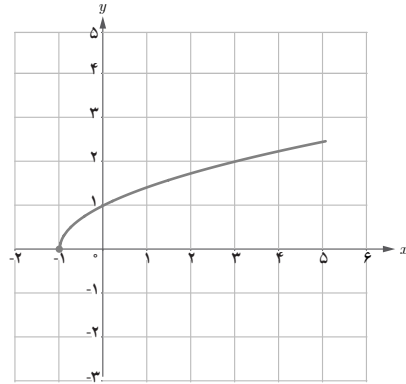
$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2 + 2x + 4) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x + 1} = \text{حد ندارد}$$

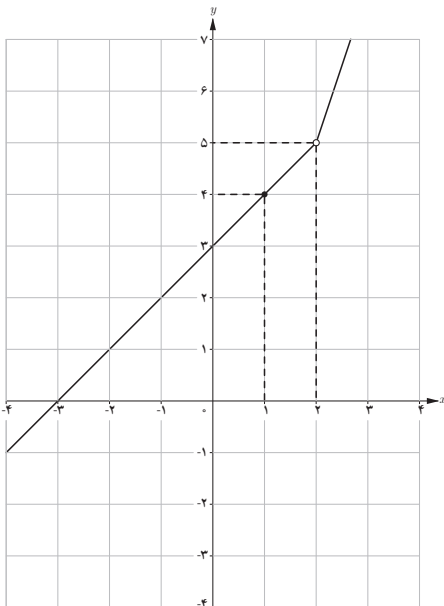
۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطه مورد نظر بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} (-3x + 4) = 4$

x	-۱	-۰/۹	-۰/۱	-۰/۰/۱	\rightarrow	\circ	\leftarrow	$\circ/\circ/\circ/۱$	$\circ/\circ/۱$	$\circ/۱$	$\circ/۵$	۱
$f(x)$	۷	۶/۷	۴/۳	۴/۰/۳	\rightarrow	۴	\leftarrow	۳/۹۹۷	۳/۹۷	۳/۷	۲/۵	۱

ب) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5$ ، $f(x) = \begin{cases} x-4 & x \neq -1 \\ 3 & x = -1 \end{cases}$

x	-۲	-۱/۵	-۱/۱	-۱/۰.۱	-۱/۰.۰۱	→	-۱	←	-۰/۹۹۹	-۰/۹۹	-۰/۹	-۰/۸
$f(x)$	-۶	-۵/۵	-۵/۱	-۵/۰.۱	-۵/۰.۰۱	→	۳	←	-۴/۹۹۹	-۴/۹۹	-۴/۹	-۴/۸



۴ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x > 2 \\ x+3 & x < 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

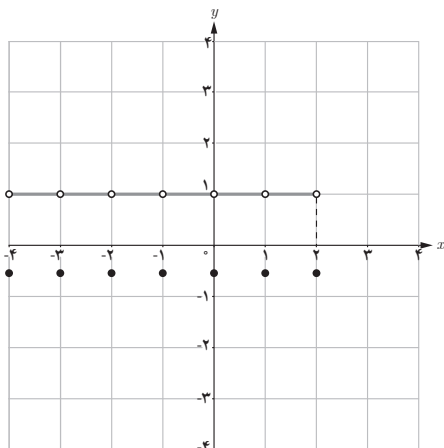
الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$ ، تعریف شده است؟

خیر

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در

همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$



۵ تابع g با ضابطه $g(x) = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ 2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را

در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله $[-4, 2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g ، حدود زیر را محاسبه

کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$$

۶ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید:
الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

$$D_f = \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-1, 1] - \{0\}$$

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟
شامل همسایگی محذوف تمام نقاط دامنه به غیر از ۱ و -۱ و همچنین شامل همسایگی محذوف ۰ نیز هست.

پ) آیا این تابع در همسایگی $0/9$ تعریف شده است؟ بله
ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟
بله، این تابع در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده ولی در همسایگی راست $x=1$ تعریف نشده است.
۷ اگر بازه $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$$2 \in (x-1, 2x+3) \Rightarrow x-1 < 2 < 2x+3 \Rightarrow \begin{cases} x-1 < 2 \Rightarrow x < 3 \\ 2x+3 > 2 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 3 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

توصیه‌های آموزشی

با توجه به مشکلات دانش‌آموزان در یادگیری حد، توصیه می‌شود در این درس و در حد امکان فرصت‌های آموزشی زیادی را برای مشاهده حد توابع در نقاط مختلف با استفاده از بازنمایی‌های مختلف از جمله جدول مقادیر و رسم نمودار در کلاس تدارک ببینند. همچنین در تمامی مثال‌ها و نمونه‌های ارائه شده، تأکید ویژه‌ای بر دو عبارت «به اندازه دلخواه» و «به مقدار کافی» که در تعریف حد آمده است، داشته باشند. همچنین با ارائه سؤال‌هایی که در آنها تابع در یک نقطه حد دارد، از دانش‌آموزان بخواهند که با تعیین مقدار دلخواه، مقدار کافی را به دست آورند. به عنوان مثال:

در تابع $f(x) = x+1$ داریم: $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$. اگر بخواهیم فاصله $f(x)$ به ۲ از دو طرف کمتر از $0/1$ باشد، مقدار x باید در چه فاصله‌ای از ۱ قرار گیرد؟

حل :

$$2 - 0/1 < x + 1 < 2 + 0/1 \Rightarrow 1/9 < x + 1 < 2/1 \Rightarrow 0/9 < x < 1/1$$

بدفهمی های رایج دانش آموزان

مفهوم حد به دلیل اینکه جزء مفاهیم دشوار برای دانش آموزان می باشد به همین دلیل بدفهمی های رایج این مفهوم برای دانش آموزان بسیار متنوع می باشد که مهم ترین آنها به شرح ذیل می باشد :
برخی از دانش آموزان فکر می کنند که :

۱ تابع باید لزوماً در نقطه حدی خود تعریف شده باشد و مقدار تابع در آن نقطه با مقدار حدش در آن نقطه برابر باشد.

۲ حد تابع، همان مقدار تابع در آن نقطه است.

۳ حد به عنوان مقداری غیر قابل دسترس محسوب می شود.

۴ حد، یک نقطه مرزی است و مقدار تابع به ازای تمامی مقادیر تعریف شده در دامنه آن همواره از حد تابع کوچک تر است.

۵ حد، مقدار تقریبی است.

۶ توابعی حد دارند که پیوسته باشند و فقط توابع پیوسته حد دارند.

برای رفع این بدفهمی ها، استفاده از بازنمایی شهودی مختلف از جمله رسم نمودار و جدول مقادیر برای مفهوم بخش حد و تأکید بر جنبه های مختلف تعریف و توصیف حد و تبیین شهودی آنها می تواند بسیار مفید باشد.

۲

درس

حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)

اهداف درس

درک شهودی مفهوم حد چپ و حد راست به کمک رسم نمودار و آشنایی با تعریف ریاضی غیررسمی حد چپ و حد راست

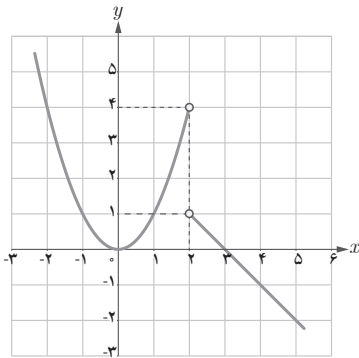
روش تدریس

در شروع این درس بهتر است ابتدا به توابعی مانند $y = \sqrt{x+2}$ ، که دامنه آنها شامل نقاطی است که تابع فقط در یک طرف آنها تعریف شده است، اشاره کرده و این نکته را متذکر شد که با اینکه تابع در هیچ همسایگی این نقاط تعریف نشده است یعنی در این نقاط حد ندارد ولی رفتار تابع را در همسایگی چپ یا همسایگی راست این نقاط می توان بررسی نمود.

دانش آموزان با انجام فعالیت اول درس می توانند مفهوم حد چپ و حد راست را به طور شهودی درک کنند و پس از این فعالیت با تعاریف ریاضی غیررسمی آنها آشنا می شوند. در ادامه دانش آموزان به این درک می رسند که اگر تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد آنگاه:

حد f در نقطه a وجود دارد \Leftrightarrow حد چپ و حد راست f در a موجود و با هم برابرند.

فعالیت ص ۱۲۳



نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x+3 & x > 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت روبه‌رو است:

الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک

شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شوند.

ب) اگر x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود

آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

پ) آیا تابع f در نقطه $x=2$ حد دارد؟ خیر

اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a ، تعریف شده باشد، آن‌گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می‌توان گفت:

حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نتیجه

اگر حد چپ و حد راست f در نقطه $x=a$ ، دو مقدار متمایز باشند آن‌گاه تابع f در نقطه $x=a$ ، حد ندارد.

کار در کلاس ص ۱۲۵

در خصوص مفاهیم ارائه شده در این درس در خصوص حد چپ و حد راست و همچنین ارتباط آنها با حد توابع می‌باشد. سؤال ۲ این کار در کلاس، سؤال باز پاسخ است که می‌تواند پاسخ‌های درست بسیاری داشته باشد.

دانش‌آموزان با انجام فعالیت صفحه ۱۲۶ به این نتیجه می‌رسند که اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد، آنگاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند. یعنی:

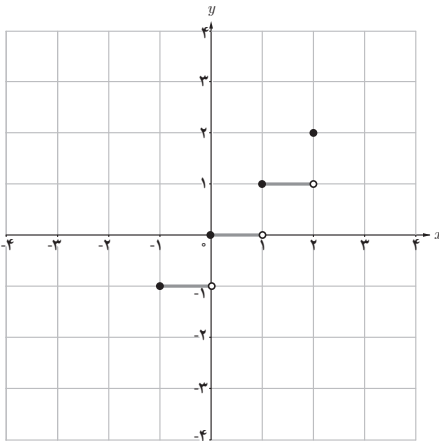
$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

به طریق مشابه با بیان مطالب بالا در خصوص همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

فعالیت ص ۱۲۶



۱ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $[-1, 2]$

رسم کنید.

۲ اگر x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک شود، آنگاه مقادیر $f(x)$ به عدد صفر نزدیک می‌شوند،

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

۳ حد راست تابع f در نقطه $x=1$ را به دست

آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

۴ آیا تابع f در نقطه $x=1$ حد دارد؟ چرا؟ خیر چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازه $(1, 2)$ که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$

بر نمودار تابع ثابت $g(x)=1$ منطبق است و داریم $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1$.

به همین ترتیب، در $(0, 1)$ که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت

$$h(x)=0 \text{ منطبق است و داریم } \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 0$$

در کار در کلاس صفحه ۱۲۷ انتظار می‌رود دانش‌آموزان با توجه به درک شهودیشان از حد چپ و حد راست توابع و با توجه به برابر نبودن حد راست تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ با حد چپ این تابع در نقطه $x=0$ به این نتیجه برسند که تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ حد ندارد.

کار در کلاس ص ۱۲۷

۱ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{x}$ را در نظر بگیرید:

(الف) با استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

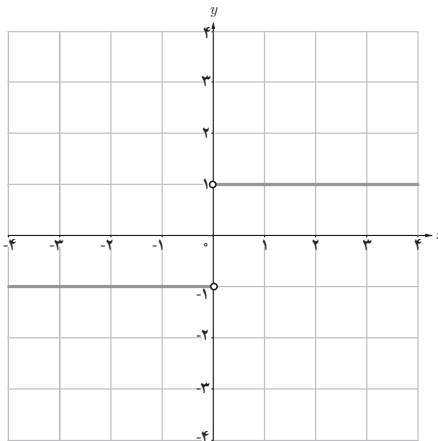
(ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

(پ) با استفاده از نمودار f ، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

(ت) آیا تابع f در نقطه صفر حد دارد؟ چرا؟ خیر چون



۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود نیست

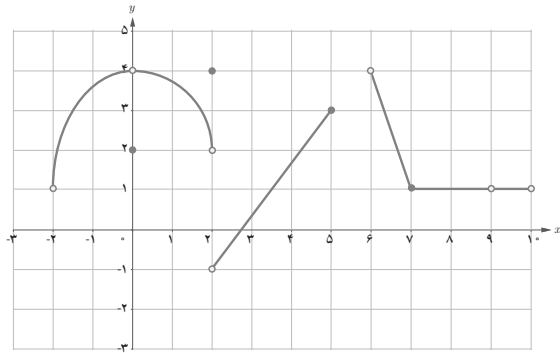
پ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ موجود نیست

ت) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$ موجود نیست

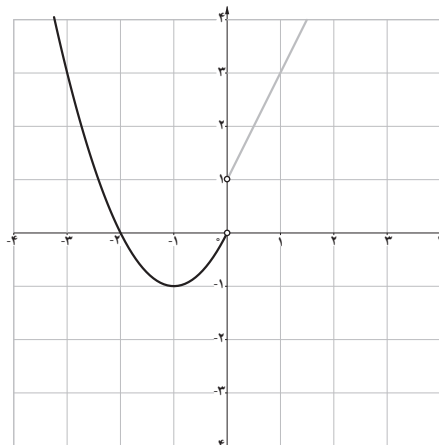
ث) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1$

ج) $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 1$

چ) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 1$



۲ با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \\ x^2+2x & x < 0 \end{cases}$ به سؤالات صفحه بعد پاسخ دهید:



الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن گاه مقادیر $f(x)$ به عدد صفر نزدیک می شوند،

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

بنابراین:

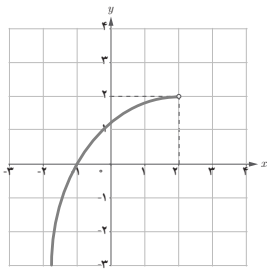
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

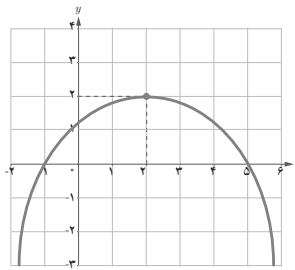
ب) حد راست تابع f در نقطه $x=0$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع f در نقطه $x=0$ حد دارد؟ چرا؟ خیر چون

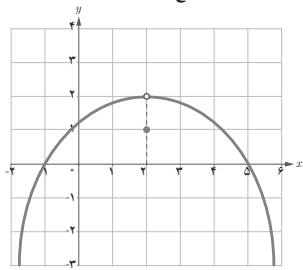
۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



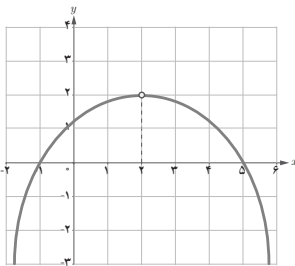
(ب)



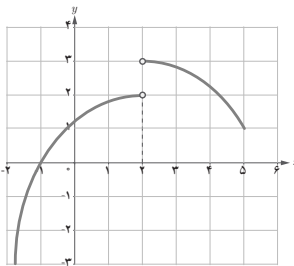
(ب)



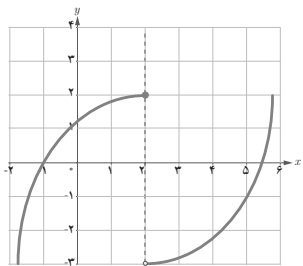
(الف)



(ج)



(ت)



(ت)

– تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. (الف)، (ب) و (ج)
 – تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. (الف)

– تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (پ)، (ت) و (ث)

– تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. (پ)

– تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (چ)

– تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. (ت) و (ث)

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ در نقطه $x=1$ چه می توان

گفت:

$$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

چون تابع در هیچ همسایگی چپ $x=1$ تعریف نشده است پس تابع در $x=1$ حد چپ ندارد.

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می توان گفت؟

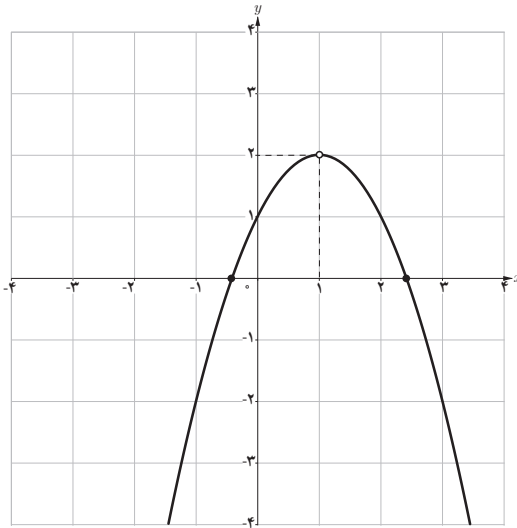
$$[x] - 2 = 0 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty) = \mathbb{R} - [2, 3)$$

چون تابع در هیچ همسایگی راست $x=2$ تعریف نشده است پس $f(x)$ در $x=2$ حد راست ندارد.

۶ با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ ، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 1$

ب) $\left[\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right] = 2$



[] نماد جزء صحیح است)

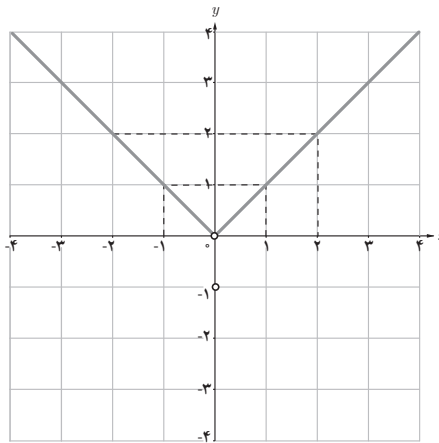
از این سؤال دانش آموز می تواند نتیجه بگیرد که در حالت کلی $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] \neq \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$

۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

ب) اگر $a \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow a} |x| = a$ برقرار است؟ بله برقرار است.



۳

درس

قضایای حد

اهداف درس

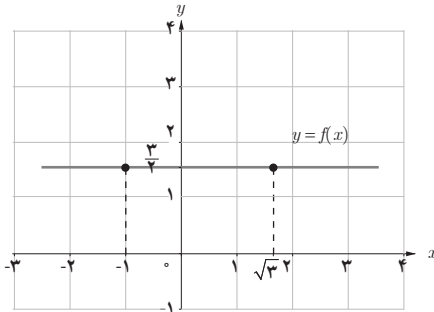
- ۱ آشنایی با قضایای اولیه حد توابع مانند مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، خارج قسمت و ...
- ۲ آشنایی با قضایای حد توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$

روش تدریس

دانش آموزان در دو درس اول این فصل با مفهوم حد تابع آشنا شده اند. همچنین آنها یاد گرفته اند که برای محاسبه حد توابع در یک نقطه، از نمودار آنها یا جدول مقادیر استفاده کنند، که هر دو روش برای توابع نه چندان پیچیده، قابل استفاده است.

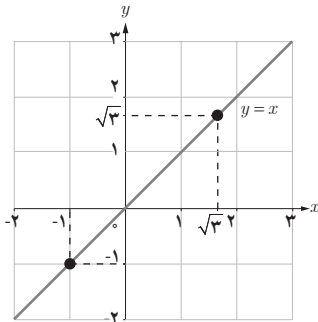
در این درس به بیان قضایای اولیه دربارهٔ حد تابع می پردازیم تا به کمک آنها دانش آموزان قادر به محاسبه حد توابع پیچیده تر شوند. هر چند اثباتی برای قضایای این درس آورده نشده است ولی در فعالیت ها و کار در کلاس های ارائه شده، سعی شده است به وسیله رسم نمودارها اثباتی شهودی برای درک بهتر قضایا فراهم شود.

اولین فعالیت این درس، فعالیتی است که دانش آموزان با انجام دادن آن به طور شهودی به درک قضایایی در خصوص نحوه محاسبه توابع ثابت و همانی دست می یابند.



الف) فرض کنید f تابع ثابت $\frac{3}{4}$ باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{3}{4} \qquad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \frac{3}{4}$$



ب) فرض کنید g تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $g(x) = x$. با توجه به نمودار، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1 \qquad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} g(x) = \sqrt{3}$$

قضیه :

الف) حد تابع ثابت $f(x) = c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است. یعنی،

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

ب) حد تابع همانی $g(x) = x$ در هر عدد دلخواه a ، برابر a است. یعنی،

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

فعالیت صفحه بعد (صفحه ۱۳۱) به مفهوم بخشی شهودی قضایایی در خصوص حد مجموع توابع و تفاضل دو تابع می پردازد. نتیجه این فعالیت به عنوان قضیه اصلی این درس در صفحه ۱۳۲ بیان شده است. در بخش نتیجه فعالیت قضایای مربوط به محاسبه حد حاصل ضرب دو تابع و خارج قسمت دو تابع نیز ارائه شده است.

قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ ، آن گاه

(الف) (حد مجموع) مجموع این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

(ب) (حد تفاضل) تفاضل این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$

(پ) (حد حاصل ضرب) حاصل ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 \cdot L_2$$

(ت) (حد خارج قسمت) به شرط آنکه $L_2 \neq 0$ ، تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

کار در کلاس صفحه ۱۳۲ فرصتی را فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان در مسائل ارائه شده در آن از قضایای ارائه شده در خصوص حد مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و خارج قسمت استفاده کنند.

کار در کلاس ص ۱۳۲

فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیه فوق، توضیح دهید

چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

$$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = \lim_{x \rightarrow a} c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow a} f^\gamma(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^\gamma$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f^\gamma(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^\gamma$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} -1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0 \text{ به شرط آنکه } \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} 1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

در صفحه ۱۳۳ طی تذکری این قضایا از دو تابع به n تابع تعمیم داده شده است. در این تذکر تأکید ویژه‌ای بر محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow a} x^n$ شده است که برابر a^n می‌باشد. یعنی $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$. بیان این مطلب به همراه قضیه حد توابع ثابت و قضیه حاصل ضرب توابع، دانش‌آموزان را برای درک قضیه حد توابع چند جمله‌ای آماده می‌کند که در صفحه ۱۳۴ به آن پرداخته شده است.

تذکر: قضیه قبل را می‌توان برای سه تابع و بیشتر نیز بیان کرد. یعنی، اگر n یک عدد طبیعی و توابع

f_1, \dots, f_n همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \dots + \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \times \dots \times f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \times \dots \times \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n \quad \text{به ویژه، اگر تابع } f \text{ در نقطه } x=a \text{ حد داشته باشد آن‌گاه:}$$

که در حالت خاص، اگر تابع f را تابع همانی $f(x)=x$ انتخاب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

در مثال حل شده و کار در کلاس صفحه ۱۳۴ از حد تابع قدر مطلق استفاده شده است که نیازمند یادآوری تمرین شماره ۷ صفحه ۱۲۹ قبل از حل این صفحه می‌باشد.

فعالیت صفحه ۱۳۵ به طور شهودی به دانش آموزان این درک را می دهد که :

۱ حد مجموع دو تابع می تواند وجود داشته باشد در حالی که هیچ کدام از دو تابع حد نداشته باشند.

۲ زمانی می توانیم از قضایای حد مجموع، تفاضل، ضرب و ... استفاده کنیم که حد هر یک از توابع،

موجود باشد.

از این نکات در طرح سؤالات کار در کلاس صفحه ۱۳۶ استفاده شده است که بایستی در پاسخ دادن به

آنها به این نکته توجه کرد.

کار در کلاس ص ۱۳۶

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده اند.

الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود باشد، آیا می توان نتیجه گرفت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$

وجود دارند؟ چرا؟

برای حل این سؤال می توان از نمونه ارائه شده در فعالیت صفحه ۱۳۵ و یا موارد مشابه به عنوان

مثال نقض، استفاده کرد.

ب) ثابت کنید اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود باشند، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ نیز وجود

دارد.

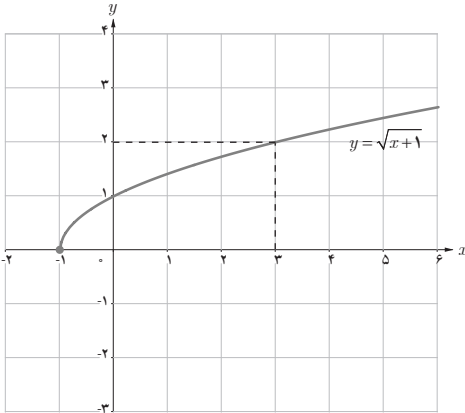
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = k \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (g(x) + f(x) - f(x))$$

$\frac{\text{طبق قضیه حد}}{\text{مجموع و تفاضل}}$
 $\frac{K}{L}$

$$\lim_{x \rightarrow a} (g(x) + f(x)) - \lim_{x \rightarrow a} f(x) = K - L = M$$

یعنی $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ وجود دارد.

در ادامه فعالیت پایین صفحه ۱۳۶، قضیه حد ریشه n ام تابع به صورت شهودی مفهوم بخشی شده است.



در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+1}$ رسم شده است.

الف) با توجه به نمودار، مقدار حد $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1}$ را بیابید.

ب) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)}$ برقرار است؟

برقرار است؟

قضیه :

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

به‌طور کلی، برای هر عدد طبیعی n ، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

دانش‌آموزان با انجام فعالیت صفحه ۱۳۷ می‌توانند به‌صورت شهودی و به کمک نمودار ارائه شده، قضیه حد توابع مثلثاتی در خصوص $\sin x$ و $\cos x$ را درک کنند.

برای هر عدد حقیقی a ،

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

در ادامه پس از ارائه کار در کلاس در خصوص استفاده از قضایای حد توابع مثلثاتی، حل تذکری تمامی قضایای مطرح شده در خصوص حد توابع در کتاب به حد چپ و حد راست توابع نیز تعمیم داده می‌شود و در کار در کلاس مسئله مرتبط با این موضوع ارائه می‌شود.

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^3 = -216$ ب) $\lim_{x \rightarrow -1} (-6x^3 - 4x^2 + 5) = 6 - 4 + 5 = 7$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{(x + \pi)(3x + 5)}{(3x + 6)(x^3 + 1)} = 0$ ت) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{7}^+} \frac{1 - x^2}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}$ ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{4x^2 + 6x} = 2$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = \frac{0}{1} = 0$ ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} |\cos x| = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} |\cos x| = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\cos x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = 0$

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ آیا می توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟

خیر. به عنوان مثال $f(x) = \begin{cases} 3x & x \leq \frac{3}{2} \\ x+1 & x > \frac{3}{2} \end{cases}$ مثال نقضی است برای رد این ادعا. البته این سؤال باز

پاسخ است و می توان مثال های نقض دیگری نیز ارائه کرد.

۳ تابع g را به گونه ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4$

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ اگر $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 1} = 4 \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 12$ $\begin{cases} g(x) = 6x \\ g(x) = 10 + x \\ g(x) = 2x + 8 \end{cases}$

۳

موجود باشد، این سؤال نیز سؤالی باز پاسخ است.

۴ نشان دهید اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

بله چون

$$\begin{aligned} \text{اگر } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L + L) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) + \lim_{x \rightarrow a} L = 0 + L = L \end{aligned}$$

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y = 3x + 2, \quad y = x^2 - 1, \quad y = [x] - 1, \quad y = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

(الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 3 + 2 = 5 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1} y = -2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} y$$

پس حد ندارد

(ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

$f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 1$	$g(x) = 3x + 2$	$f(x) = x^2 - 1$	هر سه تابع f ، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.
$f(x) \cdot g(x) = x^2 + [x] - 2$	$g(x) = x^2 - 1$	$f(x) = [x] - 1$	تابع $f \cdot g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\frac{f(x)}{g(x)} = 3x + [x] + 1$	$g(x) = [x] - 1$	$f(x) = 3x + 2$	توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.
$f^2(x) = 4(x + 1)$		$f(x) = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$	تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$		$f(x) = x^2 - 1$	تابع f در ۱ حد دارد اما تابع \sqrt{f} در ۱ حد ندارد.

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

حد تابع $f+g$ در a وجود ندارد زیرا اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود باشد آنگاه بنابر تساوی $g(x) = (f(x) + g(x) - f(x))$ قضیه حدتفاضل حد تابع g نیز باید در a موجود باشد که خلاف فرض است.

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = -1$ حد داشته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + [x] & x < -1 \\ \sqrt[3]{x+b} & x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + [x]}{|x|} = \frac{1-2}{1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt[3]{x+b} = -3+b \end{cases} \Rightarrow -3+b = -1 \rightarrow b = 2$$

۸ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt[2]{g(x)} - f(x))$$

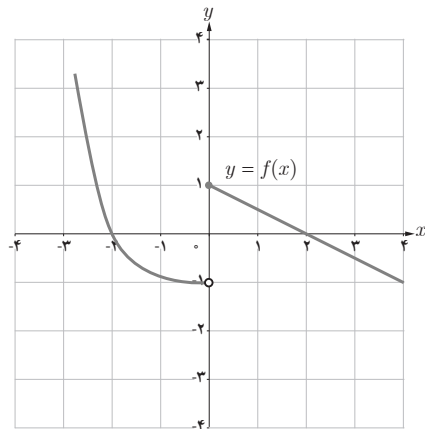
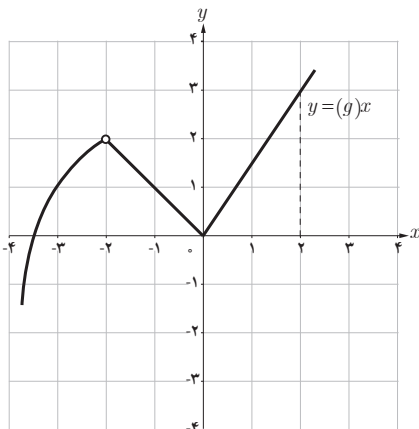
$$\lim_{x \rightarrow -3} -\sqrt[3]{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\sqrt[4]{g(x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt[2]{g(x)} - f(x)) = \sqrt[2]{\lim_{x \rightarrow -2} g(x)} - \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2 - 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} -\sqrt[3]{g(x)} = -\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -3} g(x)} = -\sqrt[3]{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\sqrt[4]{g(x)}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[12]{3}$$



محاسبه حد توابع کسری (حالت \div)

اهداف درس

۱ درک نحوه محاسبه حد توابع کسری که هم حد صورت و هم حد مخرج در نقطه مورد نظر صفر است.

تذکر: همان طور که در زیرنویس کتاب در صفحه اول این درس اشاره شده است در این کتاب حد کسرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد که صورت و مخرج کسر متعلق به یکی از دسته‌های زیر باشند:

۲ چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۲

۳ عبارت رادیکالی به صورت $\sqrt{ax+b}$

۴ توابع سینوس و کسینوس با حداکثر توان ۲ و کمان به صورت $x+b$ و یا $2x+b$

روش تدریس

در محاسبه حد توابع کسری که به حالت \div منجر می‌شود سعی می‌شود با ساده کردن صورت و مخرج کسر و حذف عامل‌های صفرکننده، به جواب نهایی دست یابیم. در توضیح اینکه در محاسبه حد چرا مجاز به ساده کردن هستیم باید به نکته زیر (که در صفحه ۱۲۶ کتاب آمده است) اشاره شود:

«هرگاه دو تابع f و g در دو طرف نقطه $x=a$ (به جز احتمالاً خود نقطه a) با هم برابر باشند و حد یکی از آنها در $x=a$ موجود باشد آنگاه حد دیگری نیز در این نقطه موجود است و هر دو مقدار حد با هم برابرند».

به عنوان مثال اگر دو تابع $x+3$ و $\frac{x^2-9}{x-3}$ را در نظر بگیریم با این شرط که $x \neq 3$: دامنه و برد این دو تابع در همسایگی محذوف ۳، با یکدیگر برابر است به همین دلیل با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 3} x+3 = 6$ طبق نکته بیان شده (صفحه ۱۲۶)، $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ نیز وجود دارد و برابر ۶ است. به همین دلیل می‌توانیم $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ را به صورت زیر با حذف عامل‌های صفرکننده از صورت و مخرج از طریق ساده کردن حل کنیم :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(\cancel{x-3})}{(\cancel{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

هدف اصلی این درس، ایجاد این توانایی در دانش‌آموزان است که چگونه از دانشی که قبلاً کسب کرده‌اند برای درک و محاسبه مفاهیم جدید استفاده کنند. در واقع، دانش‌آموزان در این درس یاد می‌گیرند که چگونه از مطالب قبلی که دربارهٔ اتحادهای جبری و مثلثاتی آموخته‌اند در محاسبه حد توابع استفاده کنند.

در این درس، همه روش‌های مورد نظر برای رفع ابهام (محاسبه حد توابع کسری در حالت $\frac{0}{0}$) به وسیله مثال‌های مختلف توضیح داده شده است. حالات کلی که به نحوهٔ رفع ابهام آنها پرداخته شده است به شرح زیر هستند :

۱ چند جمله‌ای‌ها : در حالتی که با چند جمله‌ای‌هایی (البته با درجه حداکثر ۲) سروکار داریم، برای تجزیه آنها از اتحادهای جبری نظیر اتحاد مزدوج، اتحاد مربع دو جمله‌ای و ... استفاده می‌کنیم.

۲ عبارات گنگ : در صورت وجود عبارات رادیکالی در صورت یا مخرج کسر، برای رفع ابهام و حذف عامل‌های صفرکننده، با ضرب و تقسیم کسر بر مزدوج عبارت گنگ مورد نظر به حل مسئله می‌پردازیم.

۳ توابع مثلثاتی : در حالتی که کسر شامل توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس است با استفاده از اتحادهای مثلثاتی نظیر $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ، $\sin^2 x = 2 \sin x \cos x$ و $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$ به محاسبه حد می‌پردازیم.

در پایان این درس نیز با ارائهٔ مثالی، روش تغییر متغیر توضیح داده شده است. حل یک مسئله هم به روش تغییر متغیر و هم به روش‌های دیگر می‌تواند برای دانش‌آموزان جالب باشد.

در استفاده از روش تغییر متغیر، تغییر متغیری که معمولاً می‌تواند کمک مناسبی به محاسبه حد در حالت $\frac{0}{0}$ بکند زمانی که حد تابع در $a \rightarrow x$ خواسته شده است تغییر متغیر $t = x - a$ است. به عنوان مثال برای حل کار در کلاس صفحه ۱۴۳ به صورت صفحه بعد عمل می‌کنیم :

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{4x - \pi} &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2(t + \frac{\pi}{4}) - 1}{4(t + \frac{\pi}{4}) - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(2t + \frac{\pi}{2}) - 1}{4t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos 2t - 1}{4t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{1} \sin^2 t}{4t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin 2t}{2t} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin t}}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \cancel{\sin t} \\ &= -\frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{x - \frac{\pi}{4} = t} \Rightarrow t \rightarrow 0, x \rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ پس اگر}$$

$$x = t + \frac{\pi}{4}$$

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$2x^2 + x - 1 = x^2 - 1 + x^2 + x = (x-1)(x+1) + x(x+1) = (x+1)(2x-1)$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(2x-1)}{\cancel{3x}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{3x} = \frac{-2-1}{-3} = +1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 4) = 8 \end{aligned}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \times \frac{(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned} \text{ت) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}} &\times \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \right) \times \left(\frac{3 + \sqrt{2x+1}}{3 + \sqrt{2x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4-x)(3 + \sqrt{2x+1})}{(8-2x)(2 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(4-x)}(3 + \sqrt{2x+1})}{2 \cancel{(4-x)}(2 + \sqrt{x})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{2} \cancel{x}}{\cancel{x}(x^2+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} &\times \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cancel{(x-1)}(\sqrt{x} + 1)}{\cancel{(x-1)}(x + \sqrt{x})} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

۲ اگر $f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1}$ و $g(x) = \frac{2x+1}{x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)g(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)}{\cancel{(2x+1)}(x-1)} \times \frac{\cancel{(2x+1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{-3}{2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos x}(1 + \sin x)} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{(\cancel{\cos x} - \cancel{\sin x})}{(\cancel{\cos x} - \cancel{\sin x})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $x-1=t$ ، اگر $x \rightarrow 1$ پس $t \rightarrow 0$ و داریم $x=t+1$

$$\begin{aligned}
 \text{ح) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t + 2 - 3\sqrt{t+1} + 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t + 3 - 3\sqrt{t+1}}{t} \\
 &= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} + 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{t+1})}{t} \times \frac{(1 + \sqrt{t+1})}{(1 + \sqrt{t+1})} = 2 + 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\cancel{t}}{\cancel{t}(1 + \sqrt{t+1})} = 2 + \left(3 \times \frac{-1}{2}\right) \\
 &= 2 - \frac{3}{2} = +\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

پیوستگی



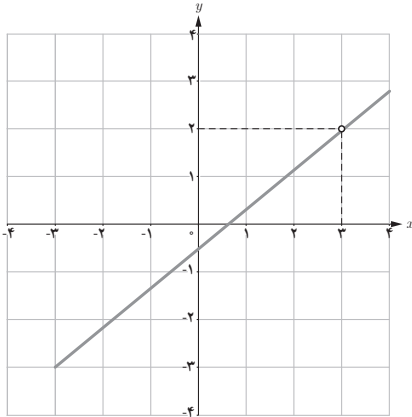
درس

اهداف درس

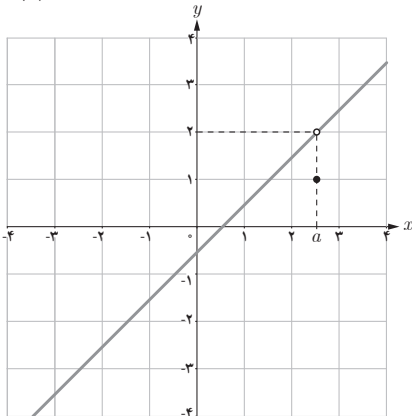
- ۱ آشنایی با مفاهیم پیوستگی
- ۲ توانایی تعیین نقاط ناپیوستگی یک تابع با استفاده از نمودار تابع
- ۳ توانایی تعیین نقاط ناپیوستگی دسته‌های خاصی از توابع

روش تدریس

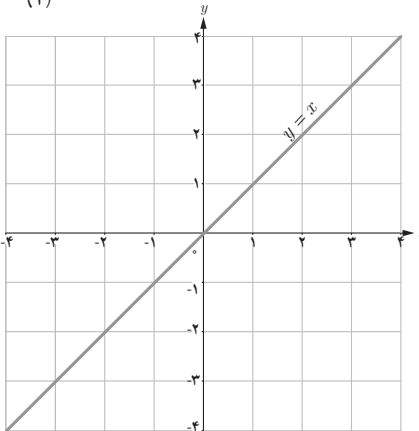
درس با یک فعالیت که شامل نمودارهای چند تابع است آغاز می‌شود. دانش‌آموزان با انجام این فعالیت با مفهوم پیوستگی یک تابع در یک نقطه به صورت شهودی آشنا می‌شوند. در صفحه بعد، تعریف پیوستگی و نتایج آن ارائه می‌شود و سپس نمونه‌هایی از توابع پیوسته و ناپیوسته در یک نقطه، با ارائه نمودارهای آنها برای تقویت درک شهودی دانش‌آموزان از مفهوم پیوسته بودن و ناپیوسته بودن توابع در یک نقطه، ارائه شده است. طی این نمونه‌ها دانش‌آموزان می‌توانند به این درک برسند که هرگاه نمودار یک تابع در نقطه‌ای به طول $x=a$ قطع شده باشد (گسستی داشته است) حتماً تابع در $x=a$ ناپیوسته است. برای تثبیت این مطلب، کار در کلاس صفحه ۱۴۷ مطرح شده است. تمامی سؤالات کار در کلاس صفحه ۱۴۷ باز پاسخ می‌باشند و می‌توانند شامل پاسخ‌های درست بسیاری باشند که به عنوان نمونه برای هر کدام از آنها یکی از پاسخ‌های درست در صفحه بعد ارائه شده است:



(۱)



(۲)



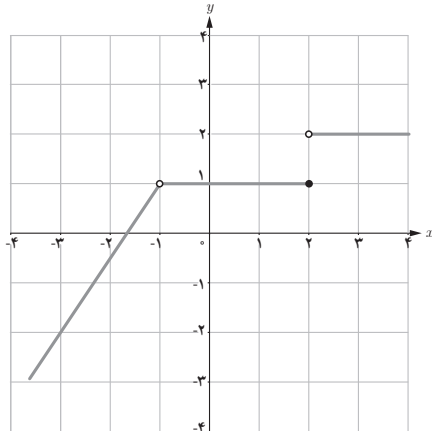
(۳)

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=3$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=3$ پیوسته نیست)

۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به جز در دو نقطه.



(۴)

تذکر: دو نکته مهم که در مورد پیوستگی باید به آن توجه شود موارد زیر می باشد:

۱ در این کتاب و این فصل فقط مفهوم «پیوستگی تابع در نقطه» بیان شده است و از «تابع پیوسته» هیچ حرفی زده نمی شود و جزء اهداف کتاب نمی باشد.

۲ با توجه به تعریف حد و مطالب ارائه شده و بنابر تعریف پیوستگی، در شرایط زیر باید گفته شود که تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته نیست اگر یکی از شرایط زیر را دارا باشد:

الف) $a \notin D_f$

ب) f فقط در یک نقطه a تعریف شده باشد (مانند تابع \sqrt{x} در $a = 0$).

دانش آموزان با انجام فعالیت صفحه ۱۴۸، با مفهوم «پیوستگی یک طرفه» تابع در نقطه به صورت شهودی آشنا می شوند و پس از درک شهودی آن تعریف «پیوستگی راست تابع در یک نقطه مانند a و پیوستگی چپ تابع در همان نقطه» ارائه شده است.

پس از بیان این تعاریف، ارتباط بین پیوستگی راست و چپ تابع برای پیوستگی آن (در یک نقطه) در قالب یک قضیه دو شرطی مطرح شده است. پس از آن مثال حل شده ای برای ارائه نمونه ای که از تعاریف و قضایای پیوستگی در آن استفاده شده، بیان شده است و پس از این مثال، کار در کلاسی برای تعیین پیوستگی راست، چپ و دو طرفه توابع در یک نقطه با استفاده از نمودار آنها ارائه گردیده است.

تعریف

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

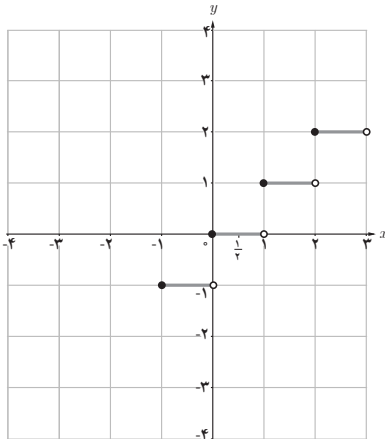
گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دو طرفه) a تعریف شده باشد:

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

در سؤال ۱ کار در کلاس صفحه ۱۴۹ تعیین پیوستگی تابع $f(x) = [x]$ در چند نقطه و همچنین پیوستگی راست و چپ آن با توجه به رسم نمودار تابع در نقاط ارائه شده خواسته شده است.



الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام یک از نقاط مجموعه $\{0, \frac{1}{4}, 2\}$ ،

۱) تابع f پیوسته است. فقط در نقطه $\frac{1}{4}$ پیوسته است.

۲) تابع f پیوستگی راست دارد. در نقاط $\{0, \frac{1}{4}, 2\}$ پیوستگی راست دارد.

۳) تابع f پیوستگی چپ دارد. در نقطه $\frac{1}{4}$ پیوستگی چپ دارد.

پایین صفحه ۱۴۹ تعریف پیوستگی تابع بر یک بازه بیان شده است.

تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازه $[a, b]$ پیوسته گوئیم هرگاه در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازه بسته $[a, b]$ پیوسته گوئیم هرگاه تابع f در هر نقطه (a, b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

همان طور که دبیران محترم اطلاع دارند تعریف پیوستگی تابع بر یک بازه بسته صرفاً جهت سهولت بیان صورت قضایایی مانند قضیه مقدار میانگین و ... بیان می شود و به نوعی آن را به عنوان قرارداد تلقی می کنند و نه یک مفهوم جدید!

تذکر: «پیوستگی تابع f بر بازه $[a, b]$ » با مفهوم «پیوسته بودن تابع f در هر نقطه $[a, b]$ » کاملاً متفاوت است. به عنوان مثال تابع $y=[x]$ بر بازه بسته $[\frac{1}{4}, 0]$ پیوسته است اما نمی توان گفت تابع $y=[x]$ در هر نقطه از $[-, 0]$ پیوسته است. در این فصل از کتاب پیوستگی تابع بر یک بازه ارائه شده است نه پیوسته بودن تابع در تمام نقاط یک بازه. در کار در کلاس های صفحه ۱۵۰ نیز به این مطلب (پیوستگی تابع بر یک بازه) پرداخته شده است.

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

$$\text{الف) } y = |x - 1| + 2 \quad \text{ب) } y = x - [x]$$

$$\text{پ) } y = [x] + [-x] \quad \text{ت) } y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases} \quad \text{ب)} \quad \text{الف) } f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ a & x = 1 \\ -x + 2 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{ت) } k(x) = ([x] - a)[x] \quad \text{پ) } h(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & 0 < x < 1 \\ x-1 & x = 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a ، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{ب)} \quad \text{الف) } f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \\ 2x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

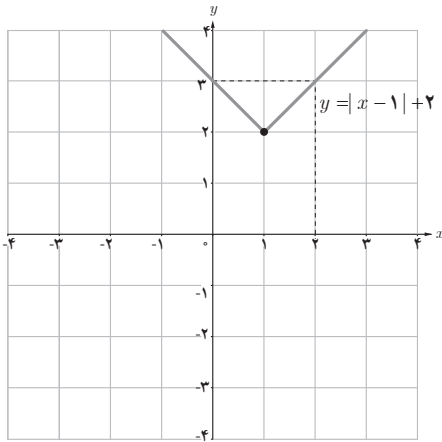
۵ تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(2, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

۶ بازه بسته ای را ارائه کنید که تابع $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)$ در $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & x > 0 \\ b - 1 & x = 0 \\ x - 2a & x < 0 \end{cases}$$

تمرین ص ۱۵۱

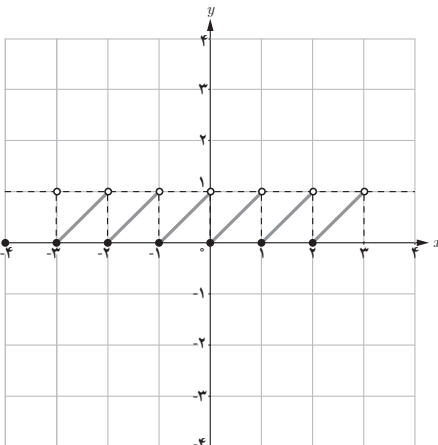


۱

(الف)

تابع هیچ نقطه ناپیوستگی ندارد

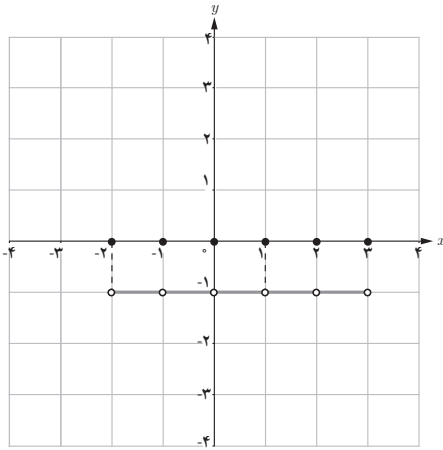
$$y = |x - 1| + 2$$



(ب)

مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع برابر \mathbb{Z} است

$$y = x - [x]$$

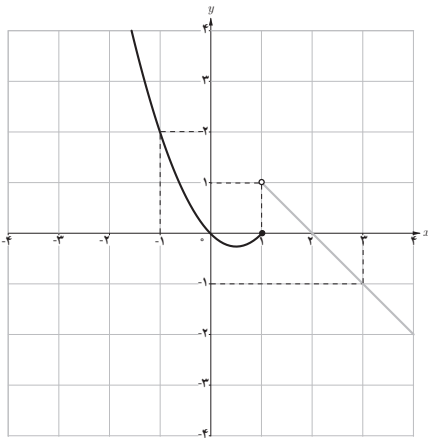


(ب)

مجموعه نقاط ناپوستگی تابع برابر مجموعه

 \mathbb{Z} است

$$y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



(ت)

تابع فقط در نقطه $x=1$ ناپوسته است

$$y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$$

۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

(الف)

چون $f(1) = a$ پس برای آنکه شرط $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ برقرار باشد باید داشته باشیم $a = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}} = 3$$

(ب)

چون $f(1) = a$ پس باید $a = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{(\sqrt{x} - 1)}}{\cancel{(\sqrt{x} - 1)}(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{2} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a$$

پس برای آنکه $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ موجود باشد باید داشته باشیم

$$\frac{1}{2} = 1 + a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

حال چون $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \frac{1}{2} = h(1)$ پس h در $x=1$ پیوسته می شود.

(ت) چون $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a)[x] = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - a)[x] = (0 - a)(0) = 0$$

پس برای وجود حد باید داشته باشیم $1 - a = 0$ پس $a = 1$ و در این صورت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = 0 = k(1) \quad \text{پس } k \text{ در } x=1 \text{ پیوسته می شود.}$$

۳

(الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1$ پس $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود

ندارد پس a هر مقدار هم که باشد تابع f در $x=0$ پیوسته نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a \quad (\text{ب})$$

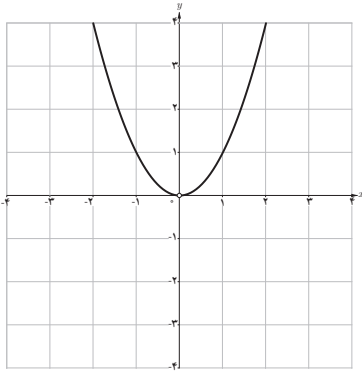
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{-x} = -a$$

پس برای آنکه $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ موجود باشد باید داشته باشیم: $a = -a \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0$

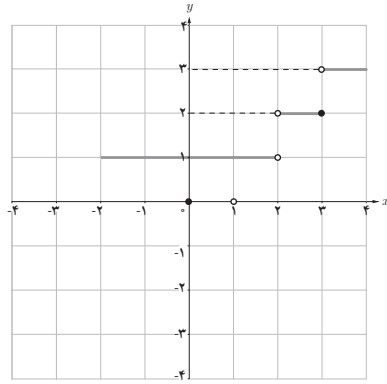
اما در این صورت خواهیم داشت $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \neq 1 = g(0)$ پس برای $a = 0$ نیز تابع g در $x=0$

نمی تواند پیوسته باشد.

۴ سؤالی باز پاسخ می باشد که یک پاسخ به عنوان نمونه آورده شده است.



(الف)



(ب)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \\ 3 & 2 \leq x \end{cases} \quad (\text{پ})$$

۵ تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(2, 3)$ پیوسته است اما چون دو نقطه $x=3$ پیوسته نیست پس حداکثر مقدار k برابر ۳ است.

۶ دامنه تابع $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$ برابر است با $(-\infty, 3]$ و تابع f روی بازه های بسته ای مانند $[2, 3]$ ، $[1, 2/5]$ و ... پیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (x - 2a) = -2a$$

۷

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \right)^2 \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \cos x} \right) = (1)^2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f(0) = b - 1$$

$$\text{مقدار تابع} = \text{حد چپ} = \text{حد راست} \Rightarrow \frac{1}{2} = -2a = b - 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{4}, b = \frac{3}{2}$$

- ۱ استوارت، جیمز، (۲۰۰۲)، حسابگان عام، دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه محمدحسین علامت ساز و علی اکبر محمدی حسن آبادی، چاپ اول، تهران، انتشارات آبیژ، ۱۳۹۸.
- ۲ استوارت، جیمز، (۲۰۱۲)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه ارشک حمیدی، جلد اول، تهران، انتشارات فاطمی، ۱۳۹۵.
- ۳ اصلاح پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛ عالمیان، وحید، حسابان (کد کتاب ۲۵۸/۱). تهران: سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۹۵.
- ۴ ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید، ریاضیات ۲ (کد کتاب ۲۳۴/۲). سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۹۴.
- ۵ ایوز، هاوارد و، (۱۹۸۳). آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمه محمدقاسم وحیدی اصل، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.
- ۶ تورنس، نلسون. (۲۰۰۳)، ریاضیات در عمل، ترجمه فاطمه معصومه راعی، تهران: کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۸۴.
- ۷ سافیر، فرد، (۲۰۰۲). ریاضیات سری شومز جلد ۱. ترجمه محمد مازوچی، تهران: کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۸۴.
- ۸ سیلورمن، ریچارد، (۱۹۶۹)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمه علی اکبر عالم زاده، جلد اول، تهران انتشارات علمی و فنی، ۱۳۹۰.

- 9** Adams, R. A. Essex, C. (2010) *Calculus: A Complete Course*. Toronto, Ontario: Pearson Education, Inc.
- 10** Barnett, R. Ziegler, M. Byleen, K. and Sobecki, D. (2008). *College Algebra with Trigonometry* (9th Edition). Mc Graw – Hill Education.
- 11** Beecher, J. A. Penna, J. A. & Bittinger, M. L. (2012). *Precalculus. A Right Triangle Approach* (4th Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.
- 12** Crauder, B. Evans, B. & Noell, A. (2008). *Functions and change, a modeling approach to college algebra and trigonometry*. Boston. AM. Houghton Mifflin.
- 13** Hungerford, T. W. Shaw, D. J. (2008). *Contemporary Precalculus: A Graphing approach*. (5th Edition). Belmont, CA. Thomson Brooks/Cole.
- 14** Larson, R. Hostetler, R. P. Edwards, B. H. (2004). *College algebra. a graphing approach*. New Jersey. Brooks Cole.
- 15** Rockswold, K. (2011) *Essentials of College Algebra with Modeling and Visualization* (4th Edition) Boston, MA. Pearson Education, Inc.
- 16** Sullivan, M. (2008). *Algebra and Trigonometry*. New Jersey. Pearson Education. Inc.
- 17** Sullivan, M. (2012). *Precalculus* (9th Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.
- 18** Sullivan, M. Sullivan III, M. (2015). *Precalculus Concepts Through Functions, A Unit Circle Approach to Trigonometry* (3th Edition). Upper Saddle River, New Jersey. Pearson Education, Inc
- 19** Swokowski, E. W. Cole, J. A. (2009). *Cole–algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Classic 12th Edition*. New Jersey. Brooks Cole.
- 20** Swokowski, E. W. Cole, J. A. (2012). *Precalculus, functions and graphs*. Belmont, CA. Cengage Learning.



معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۸۷۴ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email)

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تالیف کتاب های درسی عمومی و متوسط نظری

