توابع نمایی و لگاریتمی

فصل ۳

۱ تابع نمایی

۲ تابع لگاریتمی و لگاریتم

۳ ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

توابع‌نمایی در تخمین قدمت اشیای باستانی کاربرد دارند

توابع نمایی و لگاریتم

نگاه کلی به فصل

این فصل شامل ۳ درس است. در درس اوّل، توابع نمایی و رفتار نمایی معرفی می‌شوند و به بررسی خواص این توابع پرداخته می‌شود. در درس دوم ابتدا مفهوم تابع لگاریتمی معرفی می‌شود و به دنبال آن لگاریتم تعریف می‌شود. پس رابطه بین توان و لگاریتم بیان می‌شود و در ادامه برخی از ویژگی‌های تابع لگاریتم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در درس سوم، ویژگی‌های لگاریتم را بیان می‌کنیم و در ادامه یک معادله لگاریتمی را تعریف می‌کنیم. در انتهای این فصل، برخی از کاربردهای لگاریتم در حل مسائل بیان می‌شوند.

با توجه به اینکه در ابتدای فصل توضیحاتی در مورد قدمت اشیای باستانی یا پیدا کردن سن یک فسیل مطرح می‌شود و در لابه‌لای فصل، کاربردهای زیادی از توابع نمایی و لگاریتمی بیان می‌شود، از این رو تصویر عنوانی که یکی از بناهای تاریخی کشور عزیزمان می‌باشد، یادآور اهمیت و نقش توابع نمایی، در پیدا کردن سن این بناهاست.

دانستنی‌هایی برای معلم

مفهوم لگاریتم برای اولین بار در این کتاب مطرح می‌شود و تابع لگاریتم به عنوان معکوس تابع نمایی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بسیاری از مسائل روزمره، برای مدل‌سازی یک مسئله می‌توان از توابع نمایی استفاده کرد. برخی از این مسائل همانند محاسبه نیمه عمر، جرم توده باکتری، مقدار دارو در بدن انسان، محاسبه انرژی آزاد شده در یک زلزله و تابع جمعیت در این فصل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

دانش‌آموزان برای آنکه بتوانند درک درستی از لگاریتم داشته باشند و از آن به‌طور مناسب در محاسباتشان استفاده کنند، نیاز به درک مناسب از سه مفهوم تابع نمایی، تابع لگاریتمی و لگاریتم دارند.

علاوه بر درک جنبه‌های مختلف مفاهیم توابع نمایی و لگاریتمی توسط دانش‌آموزان به این نکته باید توجه شود که در معرفی هر مفهوم موارد زیر نیز به همراه آن ارائه شود :

۱ به‌کارگیری توابع نمایی و لگاریتمی در حل مسائل کاربردی،

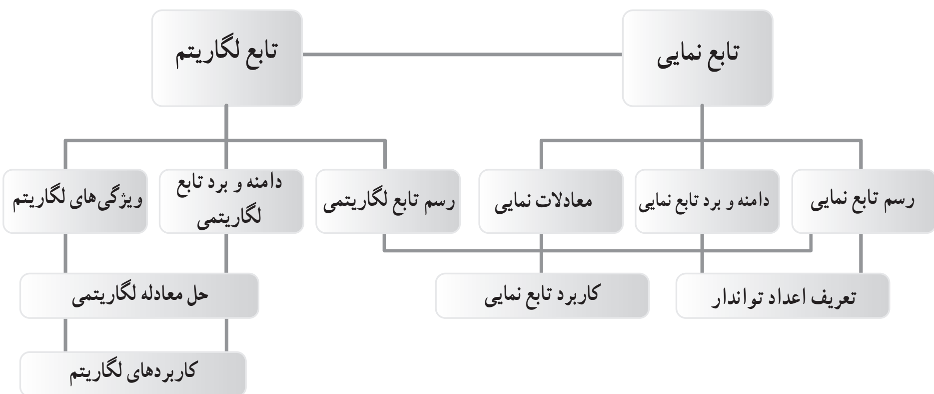
۲ استفاده از ماشین حساب برای حل مسائل واقعی،

۳ مقایسه توابع نمایی در حالت‌های مختلف که پایه بیشتر از یک و یا کمتر از یک است.

۴ مقایسه تابع نمایی با تابع چند جمله‌ای

۵ پیداکردن مقدار تقریبی تابع $f(x)=a^x$ برای نقاط اصم

نقشه مفهومی فصل ۳



در این فصل، اگر چه دانش‌آموز با مفاهیم توابع نمایی و لگاریتمی آشنا می‌شود، اما مهم‌تر از آن ابعاد درک و تصویر درست از روابط بین آنهاست. دانش‌آموز باید درک کند که تابع نمایی رشد سریع‌تری نسبت به توابعی مثل چند جمله‌ای‌ها دارد. دانش‌آموز باید بتواند از مفهوم لگاریتم برای حل مسائل استفاده کند.

مشابه مثال نمک حل نشده در آب یا مثال زلزله یا جرم کربن ۱۴ می‌توان مسائلی از این قبیل را طرح کرد و با محاسبات ساده به نتایجی مهم دست پیدا کرد. در بسیاری از کتاب‌ها سن برخی از موجودات زنده با مدل‌سازی‌هایی که در همه آنها توابع رفتار نمایی وجود دارد صورت گرفته است و نتایجی که به‌دست آمده است همچون سن جسد یک انسان ما قبل تاریخ، سن یک ماموت و... ارزش فراوانی دارد.

در قسمت لگاریتم نیز می‌توان از مسایلی همچون تعیین pH یک محلول که معیاری از میزان اسیدی یا بازی بودن یک محلول است استفاده کرد که دانش‌آموزان در درس شیمی با آنها سرو کار دارند. همچنین برای این قسمت مطرح کردن مسایلی ساده در ریاضیات مالی که به نوعی به رشد و زوال مربوط است حائز اهمیت است. مشابه نمونه های ذکر شده در کتاب، مثال‌های فراوانی از کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی و فناوری نانو می‌توان یافت.

استفاده از ابزار و تکنولوژی

استفاده از ماشین‌حساب برای انجام محاسبات تقریبی یا دقیق با عددهای بزرگ و یا اصم بخشی از کار می‌باشد. می‌توان مسایل خاصی در این ارتباط برای دانش‌آموزان با هوش‌تر طرح کرد برای مثال، دانش‌آموز باید بداند چگونه از ماشین حساب برای محاسبه مقدار تقریبی $۳^{\sqrt{۵}}$ استفاده کند. همچنین او باید بتواند مقدار تقریبی $log_{۷}۵۰$ یا $\log_{۳}{}^{\sqrt{۲}}$ را پیدا کند.

توصیه می‌شود، دانش‌آموزان در این کتاب و به‌خصوص در این فصل با نرم‌افزار جئوجبرا آشنایی داشته باشند. استفاده از این نرم‌افزار برای رسم توابع نمایی و لگاریتمی بسیار ارزشمند است در فرصت کم می‌توان توابع زیادی را برای دانش‌آموز رسم کرد و همچنین می‌توان با مقایسه آنها نتایج لازم را به صورت تصویری به‌دست آورد. به عنوان مثال، می‌توان تابع $f(x)=a^x$ را برای مقادیر مختلف $a>1$ یا $0<a<1$ رسم کرد و دانش‌آموزان با مشاهده نمودار آنها در کنار هم می‌توانند در نهایت درک کنند کدام تابع صعودی است و کدام نزولی یا اگر $a > b > 1$ آن‌گاه $f(x)=a^x$ و $g(x)=b^x$ چه ارتباطی با هم دارند.

تاریخچه لگاریتم

لگاریتم طبیعی، لگاریتم بر مبنای عدد e است و این عدد توسط نپر و بریگز کشف شد ولی اهمیت آن را نیکولاس مرکاتور در سال ۱۶۸۸ نشان داد. عدد e که یک گنگ است (یعنی نمی‌توان آن را به صورت یک کسر نشان داد) تا چندین رقم بعد از اعشار محاسبه شده است و تا ۵ رقم بعد از اعشار این عدد مساوی ۲/۷۱۸۲۸ است. این عدد مبنایی برای انجام محاسبات پیچیده مانند محاسبه سرعت واپاشی هسته‌ای یک ایزوتوپ رادیواکتیو می‌باشد. این عدد در طبیعت هم دیده می‌شود، مثلاً در اشیاء یا نظام‌هایی که دستخوش روند رشد ثابت یا نمایی می‌شود. در سال ۱۶۱۴ جان نپر، کتابی با عنوان «توضیح قانون حیرت‌آور لگاریتم‌ها منتشر کرد در آن به توضیح اصول محاسبه با لگاریتم‌ها پرداخت. نپر دریافته بود که هر عددی را می‌توان به صورت توانی از ۱۰ را نشان داد که او آن را لگاریتم نامید. او همچنین افزود اگر لگاریتم دو عدد با هم جمع شوند، نتیجه حاصل‌ضرب آن دو عدد می‌شود.

درس ۱
تابع نمایی

اهداف درس

۱ رسم تابع $y=a^x$ برای دو حالت $a>1$ و $0<a<1$

۲ پیدا کردن مقدار تقریبی اعدادی مثل $3^{\sqrt{2}}$ و $2^{\sqrt{5}}$ روی نمودار توابع مربوطه.

۳ پیدا کردن دامنه و برد توابع نمایی

۴ درک مفهوم تابع نمایی و تابع رفتار نمایی و به‌کارگیری آنها در حل مسایل

۵ تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع $y=a^x$ برای دو حالت $a>1$ و $0<a<1$

۶ مقایسه تابع نمایی با توابع چند جمله‌ای

روش تدریس

درس اول با یک فعالیت در مورد جرم توده باکتری شروع می‌شود. برای معرفی تابع $y=2^x$ سه مرحله در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم دامنه اعداد x همه اعداد طبیعی‌اند. برای این منظور جرم توده باکتری مثال خیلی خوبی است، زیرا در هر مرحله جرم دو برابر می‌شود و از این رو مقدار تابع در مرحله nام از رابطه $f(x)=2^n$ پیروی می‌کند.

از دانش‌آموز خواسته می‌شود تا جرم باکتری‌ها را در مرحله ۱۱ یا بالاتر پیدا کند که به‌طور تجربی او به این نتیجه خواهد رسید که باید از ضابطه تابع برای یافتن این مقدار استفاده کند که در فعالیت قبل آن را پیدا کرده است اما هنوز نمی‌توانیم تابع را رسم کنیم زیرا دامنه تابع $f(x)=2^x$ کل اعداد حقیقی است. بنابراین در پایان فعالیت اول تنها به رسم نقاط با دامنه اعداد طبیعی اکتفا شده است.

فعالیت ص ۷۲

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی $m(۰)=۱$، آن‌گاه باتوجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

جدول (۱)

$m(t)$ جرم باکتری‌ها	t زمان (ساعت)
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	?=۴
?=۳۲	۵
?=۶۴	۶
⋮	⋮
۱۰۲۴	?=۱۰

الف) در زمان‌های $t=۶$ و $t=۵$ جرم باکتری‌ها را به‌دست آورید.

$m(۵)=۳۲$

$m(۶)=۶۴$

ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟

$۶۴ \xrightarrow{\times ۲} ۱۲۸ \xrightarrow{\times ۲} ۲۵۶$

با توجه به جدول، پس از ۸ ساعت جرم باکتری‌ها به ۲۵۶ گرم می‌رسد.

و پس از ۱۰ ثانیه نیز جرم باکتری‌ها به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد.

پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به‌دست آورد؟

در هر مرحله جرم باکتری‌ها دو برابر مرحله قبل است.

جدول (۲)

$m(t)$	t
$۲^۰=۱$	۰
$۲^۱=۲$	۱
$۲^۲=۴$	۲
$۲^۳=۸$	۳
⋮	⋮
$۲^۹=۵۱۲$	?=۹

در فعالیت بعدی، هدف گسترش دامنه این تابع است، بنابراین با پرکردن اعداد جدول نقاط بیشتری از نمودار تابع $y=۲^x$ نمایان می‌شوند. سرانجام، به‌صورت دستوری به دانش‌آموز آموزش داده می‌شود که اگر نقاط بیشتری از این تابع را داشته باشد که این نقاط شامل نقاط گویا و اصم است شکل این تابع شبیه نموداری است که در صفحه ۷۴ رسم شده است. برای اینکه دانش‌آموز متوجه باشد که دامنه این تابع اعداد حقیقی است، در ادامه این فعالیت از وی خواسته می‌شود تا مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کند. همچنین یکی از اهداف دیگر این فعالیت، آموزش این مطلب است که نمودار تابع $y=a^x$ هرگز محور xها را قطع نمی‌کند.

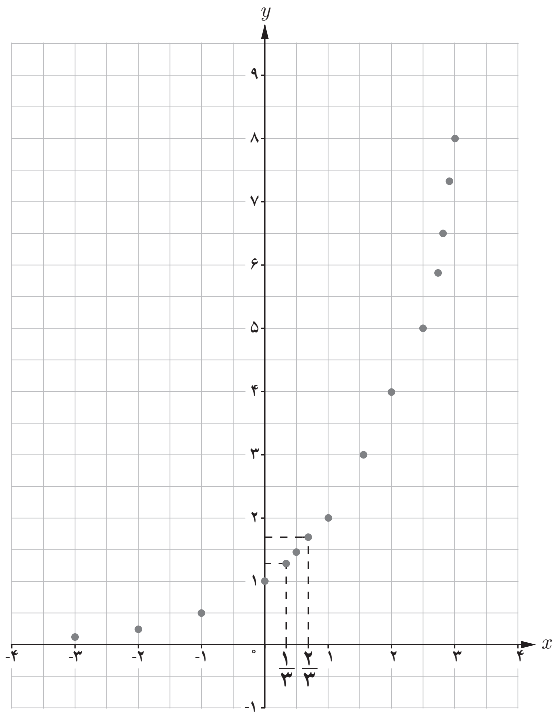
فعالیت ص ۷۳

در نمودار فعالیت قبل، نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به‌دست آورد.

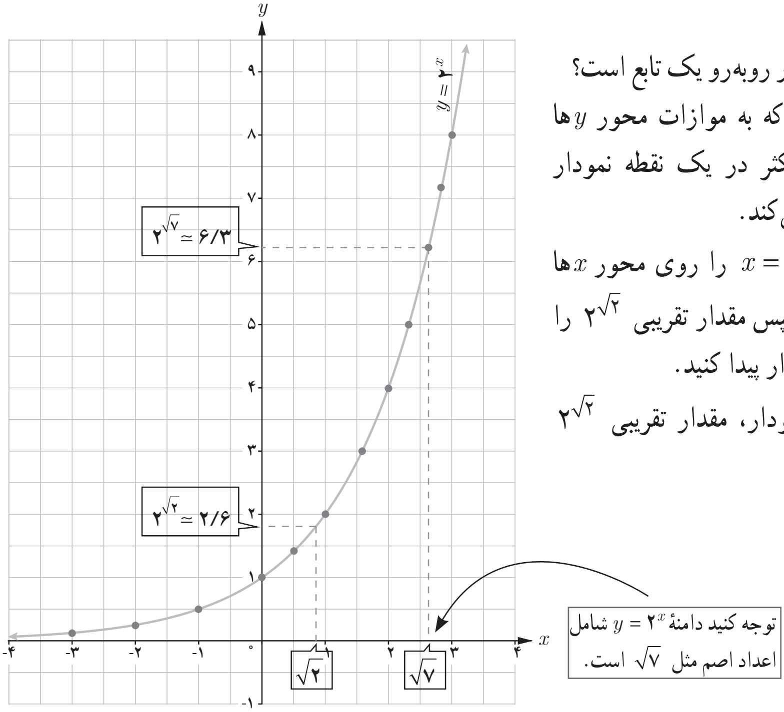
الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
۲^x	$۲^{-۳}$	$۲^{-۲}$	$۲^{-۱}$	$۲^{۰}$	$۲^{\frac{۱}{۳}}$	$۲^{\frac{۱}{۲}}$	$۲^{\frac{۲}{۳}}$	$۲^{۱}$	$۲^{\frac{۳}{۲}}$	$۲^{۲}$	$۲^{۳}$
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\sqrt[۳]{۲} \simeq ۱/۲۶$	$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$	$\sqrt[۳]{۴} \simeq ۱/۵۶$	۲	$\sqrt{۸} \simeq ۲/۸۳$	۴	۸

ب) نقاط به‌دست آمده را در یک صفحهٔ شطرنجی مشخص کنید (برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).



همان‌طور که ملاحظه می‌شود دامنهٔ تابع $y=۲^x$ همهٔ اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است.
اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار زیر حاصل می‌شود.



پ) چرا نمودار روبه‌رو یک تابع است؟

زیرا هر خط که به موازات محور yها رسم شود، حداکثر در یک نقطه نمودار روبه‌رو را قطع می‌کند.

ت) نقطهٔ $x = \sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

با توجه به نمودار، مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ برابر ۲/۶ است.

ث) کدام‌یک از اعداد زیر، بین دو عدد $۲^۳$ و $۲^۲$ قرار دارد؟

$$۲^{\frac{۵}{۲}} \qquad ۲^{\frac{۳}{۲}} \qquad ۲^۵ \qquad ۲^{-۱}$$

عدد $\frac{۵}{۲}$ بین دو عدد ۲ و ۳ قرار دارد. از این رو عدد $۲^{\frac{۵}{۲}}$ بین دو عدد $۲^۲$ و $۲^۳$ قرار دارد.

ج) چرا نمودار تابع $y=۲^x$ محور xها را قطع نمی‌کند؟

با توجه به نمودار $y=۲^m$، مقدار این تابع به ازای هر عدد حقیقی همواره بزرگ‌تر از صفر است و هیچ عدد حقیقی وجود ندارد که به ازای آن ۲^m برابر صفر شود بنابراین نمودار این تابع هرگز محور xها را قطع نمی‌کند.

هدف کار در کلاس آشنایی با توابع $f(x)=a^{-x}$ و کشف رابطه $f(x) = a^{-x} = (\frac{۱}{a})^x$ است و در ادامه از دانش‌آموز انتظار می‌رود بتواند دو تابع $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ را با هم مقایسه کند و دامنه و برد هریک را به‌دست آورد.

کار در کلاس ص ۷۵

الف) نمودار تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y=۲^x$ مقایسه کنید.

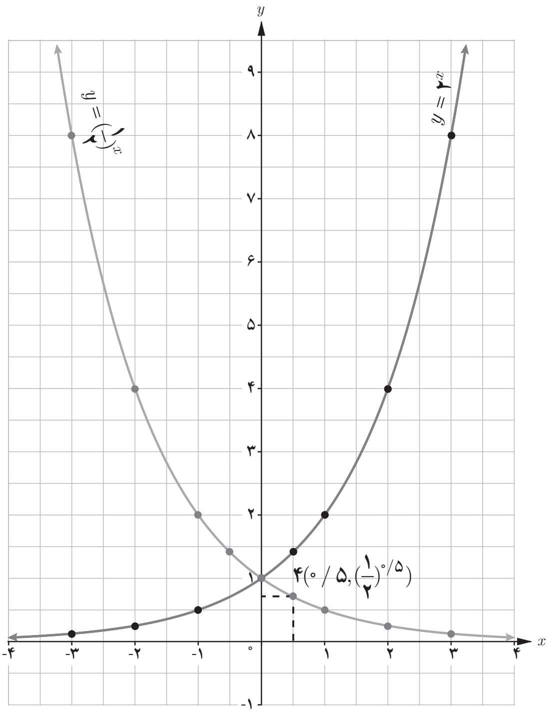
هر دو تابع دو نقطه (۰,۱) محور yها را قطع می‌کنند.

در تابع $y=۲^x$ با افزایش x، مقدار تابع افزایش می‌یابد و در تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ با افزایش x، مقدار تابع کاهش می‌یابد.

ب) دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

با توجه به نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ ، دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

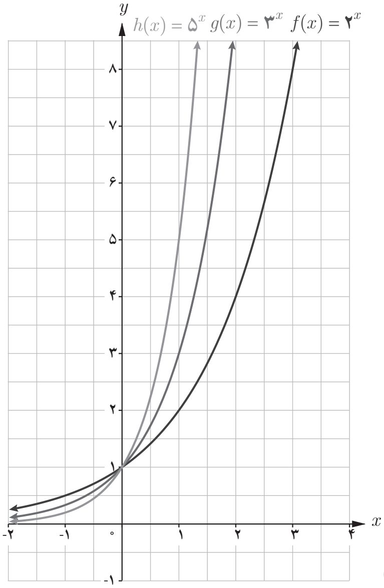
پ) نقطه $\left(۰/۵\ ,\ (\frac{۱}{۲})^{۰/۵}\right)$ را روی نمودار مشخص کنید.



بعد از کار درکلاس مثال‌هایی برای کاربرد مفهوم تابع نمایی و استفاده از آن در حل مسایل آورده شده است که انتظار می‌رود، در این قسمت مثال‌های بیشتری ارائه شود.

هدف کار در کلاس صفحه ۷۶، مقایسه نمودار تابع $f(x)=a^x$، $y(x)=b^x$ و $h(x)=c^x$ است که در آن $۱<a<b<c$ یا $۰<c<b<a<۱$ است. سؤال پنجم این کار درکلاس در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع نمایی $y=a^x$ بحث می‌کند.

کار در کلاس ص ۷۶



شکل (۱)

۱ نمودارهای سه تابع $f(x)=۲^x$، $g(x)=۳^x$ و $h(x)=۵^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن بنویسید.

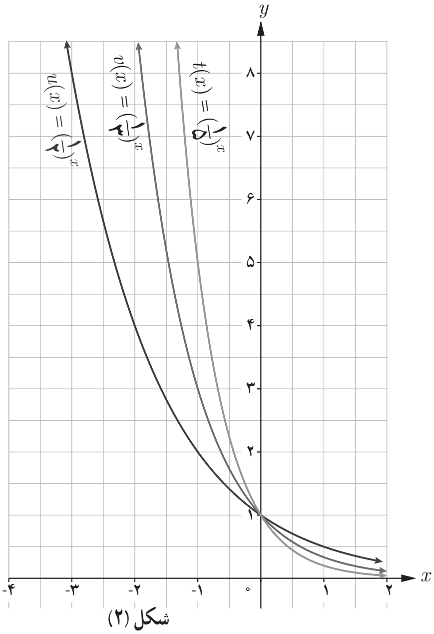
۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید.

دامنه هر سه تابع، مجموعه اعداد حقیقی و برد آنها مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

۳ آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟ بله

زیرا هر خط موازی محور yها نمودار توابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۴ نمودارهای توابع $u(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$، $v(x)=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ و $t(x)=\left(\frac{۱}{۵}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به‌دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟



شکل (۲)

با توجه به نمودار توابع، دامنه در همه موارد مجموعه اعداد حقیقی و برد مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

این توابع یک به یک هستند. زیرا به ازای هر خط موازی محور xها، نمودار هر یک از توابع، حداکثر در یک نقطه قطع می‌شود.

۵ــ الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$۲^۴, \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲, ۲^۲, ۲^۳, \left(\frac{۱}{۲}\right)^۴, \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ \rightarrow ۲^{-۴}, ۲^{-۳}, ۲^{-۲}, ۲^۲, ۲^۳, ۲^۴$$

ب) جاهای خالی را پر کنید :

در تابع $f(x)=a^x$ ،

ــ اگر $a>۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر f افزایش می‌یابند.

ــ اگر $۰<a<۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر تابع f کاهش می‌یابند.

توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شودکه از دادن تمرین‌های زیاد پرهیز شود و در عوض تمرین‌ها و مثال‌های کتاب با دقت بیشتری مورد بحث و بررسی قرار گیرد. بسیاری از اهداف و مسایلی که در کتاب‌های کمک آموزشی مورد بررسی قرار می‌گیرند از اهداف این فصل نیست و از مطرح کردن آنها در کلاس جداً خودداری شود. همچنین توصیه می‌شود برای یادگیری و تعمیق و تثبیت مفاهیم مربوط به رسم تابع نمایی چندین مثال از رسم توابع رفتار نمایی نیز در کلاس مطرح شود.

تمرین ص ۷۷

۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

$g(t)=100\times2^t$

gجرم توده پس از t ساعت است.

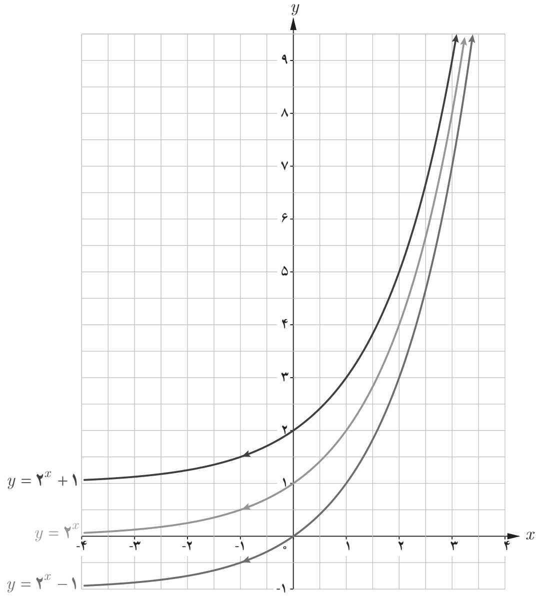
ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

$g(20)=100\times2^{20}$

۲ نمودار توابع $y=2^x$ ، $y=2^x+1$ و $y=2^{-x}-1$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y=a^x$ ، $y=a^x+2$ و $y=a^x-2$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a>1$).

این تمرین، در مورد انتقال تابع $y=a^x$ است. دانش‌آموزان قبلاً برای تابع $y=f(x)$ در حالت کلی، با این مسئله آشنا شده‌اند.

نمودار تابع $y=a^x+۲$ از انتقال دو واحد به بالای همه نقاط نمودار $y=a^x$ و نمودار تابع $y=a^x-۲$، از انتقال دو واحد به پایین نمودار تابع $y=a^x$، حاصل می‌شود.



۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t)=۱۰(۰/۸)^t$ به‌دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

حل :

الف) $A(۸)=۱۰(۰/۸)^۸ \simeq ۱/۶۷$

ب)

میزان از بین رفتن دارو در هر ساعت : $B(t)=۱۰-۱۰(۰/۸)^t$

$$=۱۰^۲(۱-(۰/۸)^t)$$

پس به مقدار $۱۰^۲(۱-(۰/۸)^t)$ درصد از دارو در هر ساعت از بین می‌رود.

۴ الف) سه عدد بین اعداد $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید.

$$۳^{۲/۵}<۳^{۲/۶}<۳^{۲/۷}<۳^{۲/۷۱}<۳^{۲/۸}<\ldots<۳^{\sqrt{۱۰}}$$

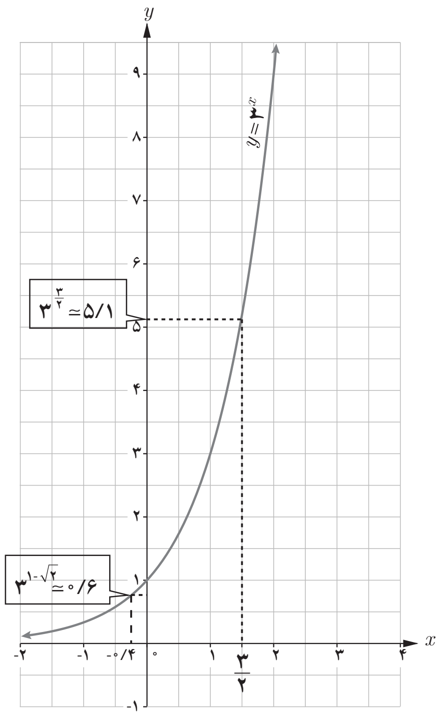
ب) نامعادلهٔ توانی $۴^{۲x-۱}>\frac{۱}{۱۰۲۴}$ را حل کنید.

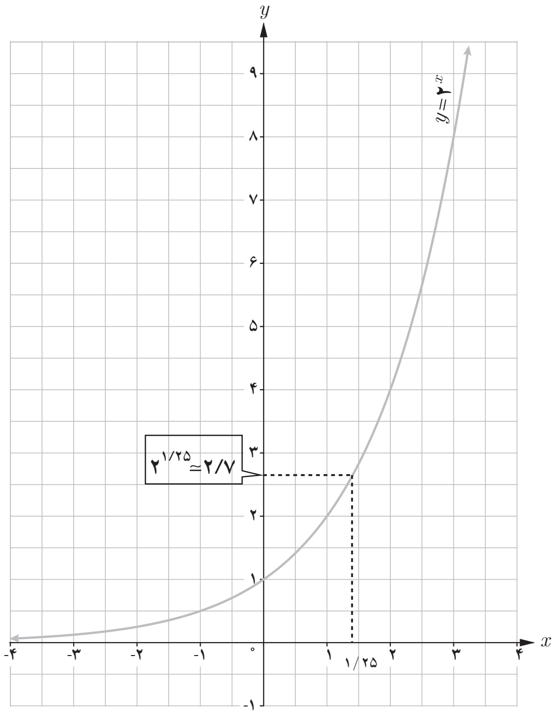
$$۲^{۴x-۲}>۲^{-۱۰}\to ۴x-۲>-۱۰\to x>-۲$$

پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $a^x>a^y>a^z$، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ ($a>۱$).

چون $a>۱$ و $a^x>a^y>a^z$ پس $x>y>z$.

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.





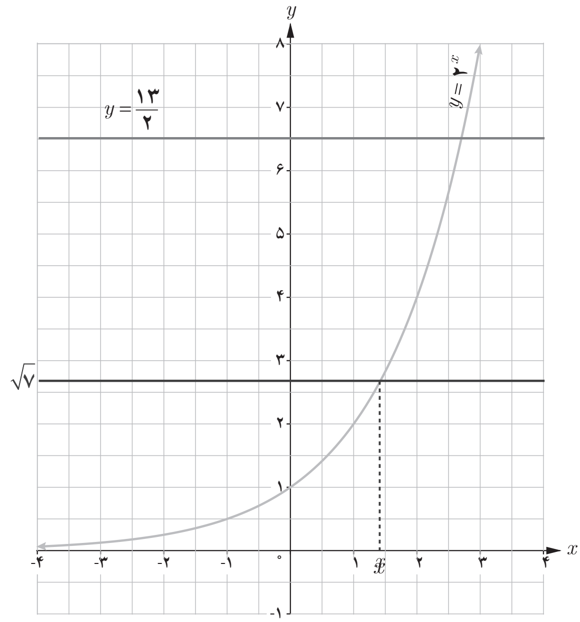
الف) $3^{1-\sqrt{2}} \simeq ۰/۶۳$

ب) $2^{۱/۲۵} \simeq ۲/۸۲$

پ) $3^{\frac{3}{2}} \simeq ۵/۱۹$

۶ الف) در شکل زیر خط $y=\frac{۱۳}{۲}$ نمودار $y=2^x$ راقطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟چرا؟

با توجه به نمودار $۲^۳ > \frac{۱۳}{۲} > ۲^۲$ ، پس طول نقطه برخورد بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ است.



ب) خط $y=\sqrt{۷}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

با توجه به نمودار $۲^۲>۲^x>۲^۱$

پس طول نقطه برخورد بین دو عدد صحیح ۱ و ۲ است.

۷ در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آن‌گاه $۰/۴۹ = ۰/۷ \times ۰/۷$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟ $f(t)=۱۰۰(۰/۷)^t$

t تعداد لایه فیلتر مورد استفاده است.

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

رابطه درصد ناخالصی آب که به ازای تعداد فیلتر t از بین می‌رود : $h(t)=۱۰۰(۰/۳)^t$

$$۱۰۰(۰/۳)^t < ۴ \rightarrow (۰/۳)^t < ۰/۰۴ \rightarrow t=۳$$

درس ۲
تابع لگاریتمی و لگاریتم

اهداف درس

۱ درک مفهوم تابع لگاریتمی و لگاریتم

۲ رسم تابع لگاریتمی

۳ ارتباط بین دامنه و برد تابع نمایی و تابع لگاریتمی به عنوان تابع وارون

۴ پیدا کردن مقدار تقریبی لگاریتم اعداد با استفاده از ماشین حساب

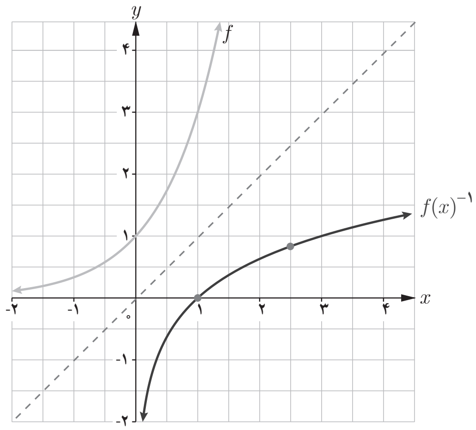
۵ مقایسه تابع لگاریتمی با سایر توابع مثل چند جمله‌ای‌ها

روش تدریس

در درس دوم از دانش‌آموز خواسته می‌شود تا بار دیگر مسئله ابتدای فصل در مورد رشد توده باکتری را در نظر بگیرد. هدف این قسمت و فعالیت اول این درس معرفی تابع لگاریتمی به عنوان معکوس تابع نمایی و ارتباط این دو تابع است. برای این منظور، در پایان صفحه ۸۰، دامنه و برد این دو تابع با هم مقایسه شده است. در فعالیت ۱، دانش‌آموز مقدار تابع $y=۳^x$ را در نقاط مختلف به‌دست می‌آورد و با استفاده از مفهوم تابع معکوس، قرینه هر نقطه نسبت به خط $y=x$ را به‌دست می‌آورد تا با استفاده از آن نمودار تابع $y=f^{-۱}(x)$ را رسم کند و در انتهای آن تعریف تابع لگاریتمی آمده است.

فعالیت ص ۸۱

۱ باتوجه به نمودار تابع $f(x)=۳^x$ نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم کنید و جدول زیر را کامل کنید.



$f(-۲)=۳^{-۲}=\frac{۱}{۹}$	⇔	$f^{-۱}(\frac{۱}{۹})=-۲$
$f(-۱)=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$	⇔	$f^{-۱}(\frac{۱}{۳})=-۱$
$f(۰)=۳^{۰}=۱$	⇔	$f^{-۱}(۱)=۰$
$f(۱)=۳^{۱}=۳$	⇔	$f^{-۱}(۳)=۱$
$f(\frac{۳}{۲})=۳^{\frac{۳}{۲}}\simeq ۵/۱$	⇔	$f^{-۱}(۳^{۳/۲})=\frac{۳}{۲}$
$f(۲)=۳^{۲}=۹$	⇔	$f^{-۱}(۹)=۲$

۲ گزینهٔ درست را با ✓ و گزینه غلط را با × علامت بزنید.

ـ نقطهٔ ($\frac{۱}{۹}$ و ۲−) روی نمودار f قرار دارد. ✓

ـ نقطه ($\frac{۱}{۳}$ و ۱−) روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد. ×

ـ نقطهٔ (۰ و ۱) روی نمودار f قرار دارد. ×

ـ نقطه (۲− و $\frac{۱}{۹}$) روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد. ✓

ـ تابع $f^{-۱}$ یک به یک است. ✓

مثال‌های بعد، سعی دارد تا با استفاده از مقدار تابع لگاریتمی در یک نقطه مفهوم لگاریتم را معرفی کند و آن را با توان‌های اعداد مقایسه کند از آنجایی که رسم این توابع مستلزم پیدا کردن نقاط زیادی می‌باشد، پیشنهاد می‌شود اگر تمرین اضافه‌ای برای این قسمت در نظر گرفته می‌شود، نمودار آنها رسم شود. در این قسمت ویژگی‌های لگاریتم گفته نشده است و در مثال‌های داده شده، انتظار می‌رود تا دانش‌آموز فقط با استفاده از تعریف، بتواند لگاریتم برخی از اعداد را پیدا کند.

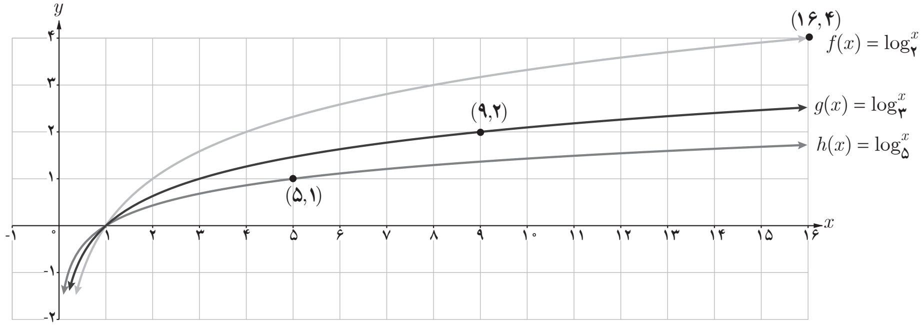
کار در کلاس ص ۸۳

۱

الف) نمودار سه تابع $f(x)=\log_{۲} x$ ، $g(x)=\log_{۳} x$ و $h(x)=\log_{۵} x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هریک را روی نمودار آن بنویسید.

ب) محل دقیق هریک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

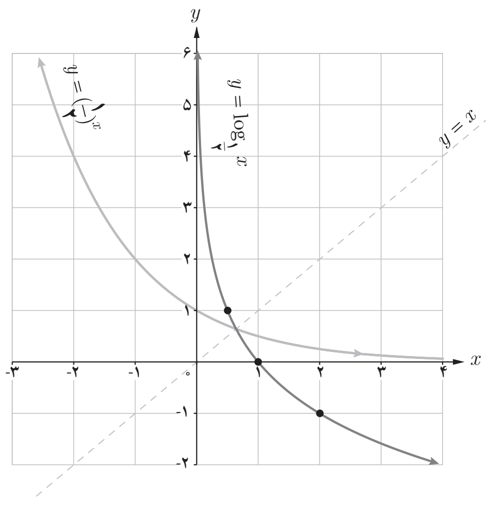
(۱۶ , ۴) و (۹ , ۲) و (۵ , ۱)

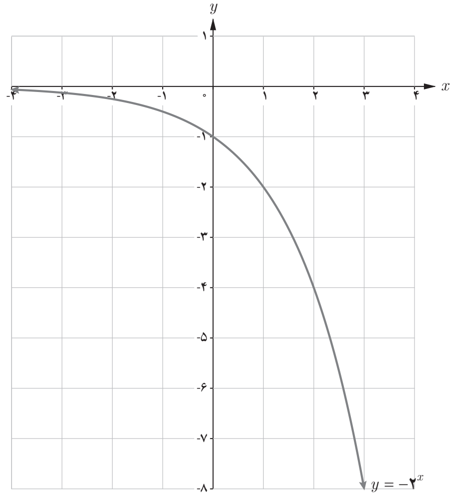


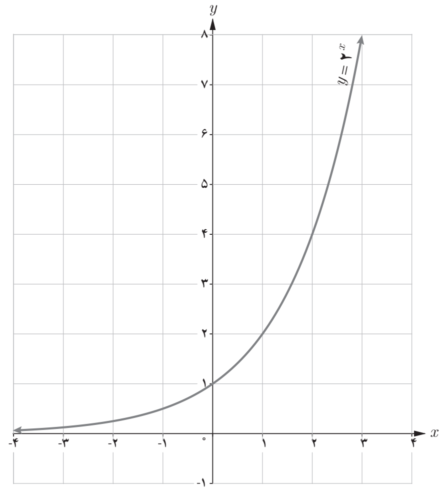
هدف این سؤال، ۱ مقایسه توابع لگاریتمی $f(x)=\log_{a}^{x}$ ، $g(x)=\log_{b}^{x}$ و $h(x)=\log_{c}^{x}$ در حالت مختلف a,b,c است که $a,b,c\neq ۱$.

پ) با توجه به نمودار $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$ نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

نمودار تابع $y=\log_{۱/۳}^{x}$ قرینه نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x}$ نسبت به خط $y=x$ است.







۲ مشخص کنید هر یک از نمودارهای زیر به کدام‌یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

در این سؤال، از دانش‌آموزان انتظار می‌رود تا بتوانند، نمودار توابع نمایی و لگاریتمی را با هم مقایسه کنند.

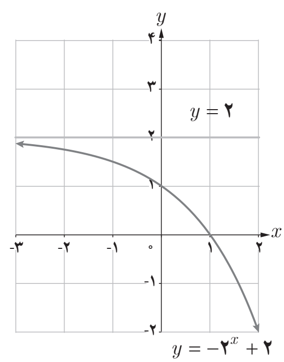
نکته :

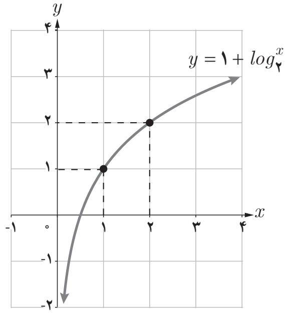
در کاردرکلاس ۲، دانش‌آموز به‌راحتی می‌تواند با استفاده از نقطه‌یابی نیز ضابطه هر تابع را پیدا کند و این کار منعی ندارد ولی هدف اصلی این کاردرکلاس، استفاده از خواص توابع می‌باشد.

حل :

الف) $y=-۲^x+۲$، ابتدا تابع $y=۲^x$ را رسم می‌کنیم و سپس با استفاده از تعریف، قرینه آن نسبت به محور xها را رسم می‌کنیم.

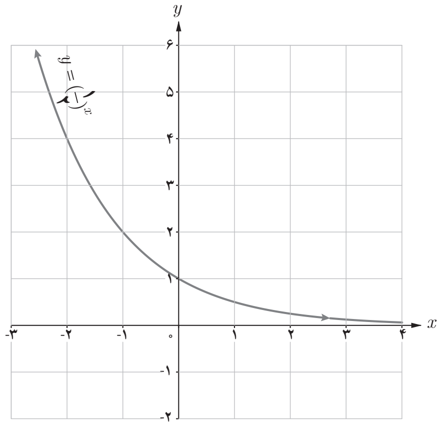
سپس تابع $y=-۲^x$ را دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا شکل زیر حاصل شود.

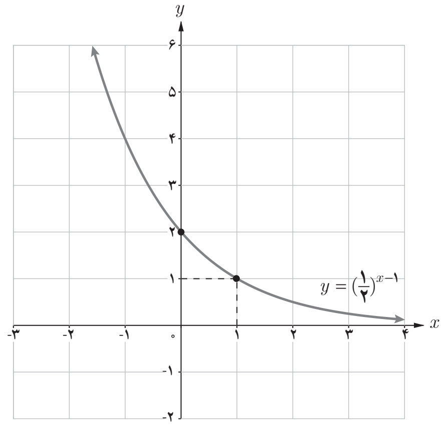




ب) برای رسم تابع $y=(\log x)+۱$، با استفاده از مطالب فصل تابع می‌دانیم کافی است ابتدا نمودار $y=\log_۲ x$ را رسم کنیم سپس، شکل آن را یک واحد به سمت بالا منتقل کنیم. دقت کنید که پرانتز اضافی است و تابع $y=۱+\log_۲ x$ صحیح است که شکل آن به‌صورت روبه‌رو است:

پ) سرانجام برای رسم نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$ کافی است ابتدا نمودار $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کرده و سپس نمودار آن را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم.





۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_۳^{۸۱}$ — اگر $a=\log_۳^{۸۱}$، آن‌گاه $۳^a=۸۱$ در نتیجه $a=۴$.

ب) $\log_{۱/۶}^{\frac{۱}{۶}}$ — اگر $b=\log_{۱/۶}^{\frac{۱}{۶}}$، آن‌گاه $۱/۶ = (۱/۶)^b$ در نتیجه $b=۱$.

پ) $\log_۲^۸$ — اگر $c=\log_۲^۸$، آن‌گاه $۲^c=۸$ در نتیجه $c=۳$.

توصیه‌های آموزشی

۱ در این درس، از حل تمرین‌ها یا مسائلی که به استفاده از ویژگی لگاریتم منجر می‌شود، خودداری شود.

۲ استفاده از ماشین‌حساب برای رسم دقیق نمودارها توصیه می‌شود.

۳ استفاده از کاغذ لگاریتمی یا شطرنجی برای رسم نمودارهای دقیق توصیه می‌شود.

۴ دانش‌آموز باید به درستی درک کند که چرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

تمرین ص ۸۵

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید :

$a=\log_{۱۰} ۰/۰۱ \rightarrow ۱۰^a=۰/۰۱ \rightarrow a=-۲$

$b=\log_۶^{\frac{۱}{۶}} \rightarrow ۶^b=\frac{۱}{۶} \rightarrow b=-۱$

$c=\log_۲^{\sqrt{۲}} \rightarrow ۲^c=\sqrt{۲} \rightarrow c=\frac{۱}{۲}$

$d=\log_۷^{\sqrt[۳]{۷^۲}} \rightarrow ۷^d=\sqrt[۳]{۷^۲} \rightarrow d=\frac{۲}{۳}$

۲ نمودار تابع $y=\log_a x$ را برای دو حالت $a>۱$ و $۰<a<۱$ با هم مقایسه کنید.
در نمودار تابع $y=\log_a x$ اگر $a>۱$ ، با افزایش x مقدار y افزایش می‌یابد.
و در نمودار تابع $y=\log_a x$ اگر $۰<a<۱$ ، با افزایش x مقدار y کاهش می‌یابد.
همچنین هر دو نمودار در نقطه $x=۱$، محور xها را قطع می‌کنند.

۳

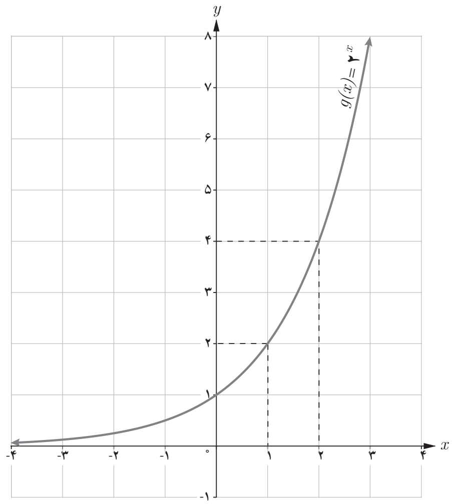
الف) خط $y=۲۷$ نمودار تابع $y=۳^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

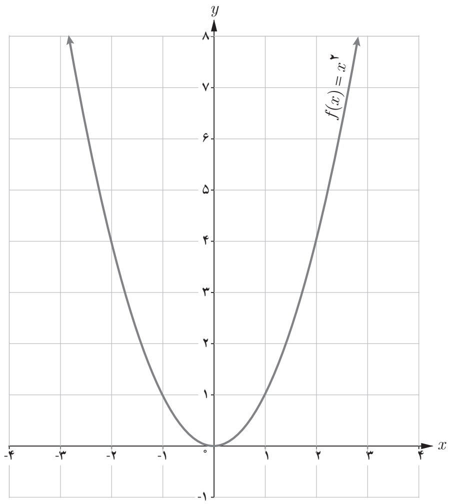
$۲۷=۳^x$ در نتیجه $x=۳$

ب) خط $y=۱۰$ نمودار تابع $y=(۰/۰۱)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

اگر $(۰/۰)^x=۱۰$ آن‌گاه $-۲x=۱$ و در نتیجه $x=-\frac{۱}{۲}$.

۴ نمودار دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=۲^{x}$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.





تابع $y=x^{۲}$ نسبت به محور yها متقارن است، یک به یک نیست و یک نقطه مینیمم دارد و به ازای $x=۰$، دارای عرض صفر است.

تابع $y=۲^{x}$ یک به یک است و با افزایش مقدار x، مقدار تابع افزایش می‌یابد. این تابع در هیچ نقطه‌ای محور xها را قطع نمی‌کند و اصطلاحاً صفر ندارد.

دامنه هر دو تـابع مجموعه اعداد حقیقی و برد تابع $y=x^{۲}$ بازه $[۰,+\infty)$ و برد تابع $y=۲^{x}$ بازه $(۰,+\infty)$ است.

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

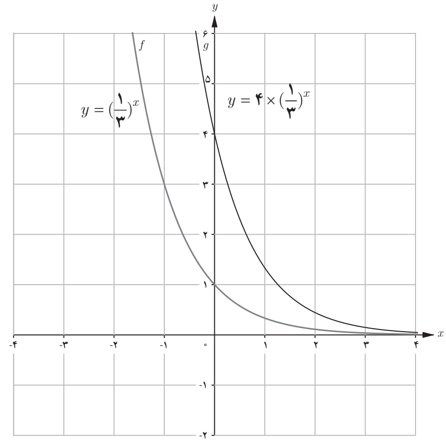
- لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. ✓
- لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. ✓
- تابع لگاریتم، تابعی یک‌به‌یک است. ✓
- تابع لگاریتم محور yها را قطع می‌کند. ×
- اگر نقطه (b,d) روی نمودار $y=a^{x}$ قرار داشته باشد، آن‌گاه (d,b) روی نمودار $y=\log_a x$ قرار دارد. ✓
- اگر $a>b>۰$ آن‌گاه $\log_{۱۰} a<\log_{۱۰} b$. ×

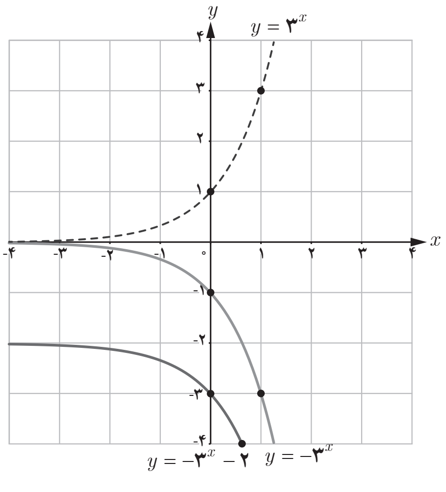
۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

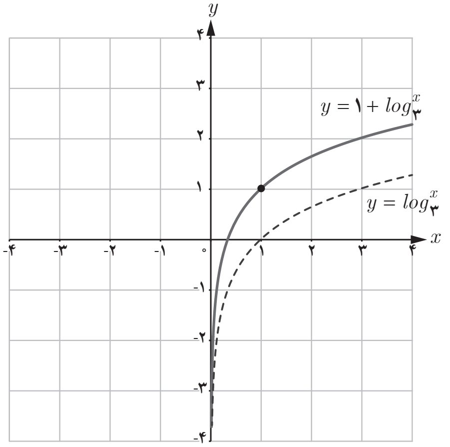
الف) $y = ۱ + \log_۳ x$

ب) $y = -۳^x - ۲$

پ) $y = ۴(\frac{۱}{۳})^x$







درس ۳
ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

اهداف درس

۱ آموزش ویژگی‌های اصلی لگاریتم مثل لگاریتم ضرب و تقسیم
۲ استفاده از ویژگی‌های لگاریتمی در حل معادلات لگاریتمی
۳ بررسی کردن جواب‌های یک معادله لگاریتمی برای پیدا کردن جواب درست
۴ تعمیم برخی از ویژگی‌های لگاریتم که از خواص داده شده در این درس به‌دست می‌آیند.

روش تدریس

این درس با چند مثال و حل آنها شروع می‌شود و در واقع چندین ویژگی ساده ولی پر اهمیت و اساسی لگاریتم آموزش داده می‌شود. در مثال اول دانش‌آموز با استفاده از یافته‌های قبلی به سادگی می‌تواند نشان دهد که $\log_a^{۱} = ۰$ و $\log_a^a = ۱$

در مثال دوم، لگاریتم حاصل‌ضرب دو عدد به‌دست می‌آید و به عنوان تعمیمی از آن در مثال بعد، ثابت می‌شود $\log_a^{b^n} = n\log_a^b$.

هدف کار در کلاس، پیداکردن لگاریتم تقسیم دو عدد و استفاده از آن برای پیدا کردن لگاریتم برخی از اعداد اعشاری است.

کار در کلاس ص ۸۷

۱ نشان دهید که اگر $a, b, c>0$ و $c\neq 1$، آن‌گاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

حل : فرض کنید $x = \log_c^a$ و $y = \log_c^b$ پس طبق تعریف $a=c^x$ و $b=c^y$.

پس $\log_c^a = x$ و $\log_c^b = y$ و

$$\frac{a}{b} = \frac{c^x}{c^y} = c^{x-y} \Rightarrow \log_c^{\frac{a}{b}} = x - y$$

$$\Rightarrow \log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

۲ اگر $a=\log ۲$ و $b=\log ۳$، حاصل عبارت‌های زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log ۰/۷۵ = \log \frac{۷۵}{۱۰۰} = \log ۷۵ - \log ۱۰۰ = \log ۵^۲ \times ۳ - \log ۱۰^۲$

$= \log ۵^۲ + \log ۳ - ۲\log ۱۰ = ۲\log ۵ + \log ۳ - ۲$

$= ۲(۱-a) + b - ۲ = b - ۲a$

ب) $۳\log^{\sqrt[۳]{۴}} - \log ۲۵۰ = ۳\log ۲^{\frac{۲}{۳}} - \log ۵^۲ \times ۱۰$

$= ۳ \times \frac{۲}{۳}\log ۲ - (\log ۵^۲ + \log ۱۰)$

$=۲\log^۲ - ۲\log ۵ - ۱$

$=۲a - ۲(۱-a) - ۱$

$=۴a + ۱$

پ) $\log ۰/۰۰۵ = \log \frac{۵}{۱۰۰۰} = \log ۵ - \log ۱۰^۳$

$=\log ۵ - ۳\log ۱۰$

$=۱ - a - ۳$

$=-(a+۲)$

در بخش معادلات لگاریتمی، پس از معرفی معادلات لگاریتمی، چندین مثال و حل آنها ارائه شده است که نکته مهم در همه آنها این است که به دانش‌آموز یاد داده می‌شود که پس از پیدا کردن جواب‌ها باید همواره جواب‌ها را آزمایش کند و از دبیران محترم تقاضا می‌شود تا در این قسمت معادلات بیشتری حل کرده و همواره درستی جواب‌ها را آزمایش کنند. در ادامه، کاربردهای لگاریتم در حل مسایل مدل شده هستند که هدف اصلی این فصل را دنبال می‌کند. مثال‌هایی از قبیل رشد جمعیت، شدّت زلزله و نیمه عمر مواد هسته‌ای که در همه آنها از توابع لگاریتمی استفاده شده است.

فعالیت ص ۸۸

معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید :

الف) $\log_{۵}(۲x-۱)=\log_{۵}x$

$$۲x-۱=x \rightarrow \boxed{x=۱}$$

ب) $\log_{۳}(x-۱)+\log_{۳}(\frac{x}{۲}+۱)=۲$

$$\log_{۳}(x-۱)(\frac{x}{۲}+۱)$$

$$=۲\times\log_{۳}۳ \Rightarrow (x-۱)(\frac{x}{۲}+۱)=۳^{۲}$$

$\Rightarrow x=۴\ ,\ x=-۵$ غ ق

پ) $\log x+\log(x+۳)=۱$

$$\log_{۱۰} x(x+۳)=\log_{۱۰}۱۰$$

$x(x+۳)=۱۰ \Rightarrow x=۲\ ,\ x=-۵$ غ ق

توصیه‌های آموزشی

۱ برشمردن ویژگی‌های لگاریتم به جز آنچه آموزش داده شده است جزء اهداف این فصل نیست.

۲ حل مسایلی که در آنها از ویژگی‌های مقدماتی لگاریتم استفاده می‌شود اکیداً توصیه می‌شود.

۳ هدف از حل معادله، معادلات ساده لگاریتمی هستند که برای حل آنها از خواص مقدماتی استفاده می‌شود.

۴ از طرح و حل سؤالاتی که جزو اهداف اصلی این فصل است به شدت پرهیز شود.

۵ چنانچه فرصت کافی برای طرح سؤالات اضافی وجود داشته باشد مطرح کردن مسایل رشد و زوال و همچنین سود و زیان اشکالی ندارد ولی در همه آنها اهداف اصلی این فصل مدنظر باشد.

تمرین ص ۹۰

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_۴ m^۲ - \log_۴ m - ۳ = ۰$

$$\log_۴ \frac{m^۲}{m-۳} = \log_۴ ۱ \rightarrow \frac{m^۲}{m-۳} = ۱ \rightarrow m^۲ - m + ۳ = ۰$$
$$\rightarrow \Delta < ۰$$

معادله جواب ندارد.

ب) $\log_۲(۱۲b-۲۱)-\log_۲(b^۲-۳)=۲$

$$\log_۲ \frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳}$$

$$= ۲ \times \log_۲ ۲$$

$$\frac{۱۲b-۲۱}{b^۲-۳} = ۴ \rightarrow ۴b^۲ - ۱۲b + ۹ = ۰ \rightarrow b = \frac{۳}{۲}$$

چون $۱۲(\frac{۳}{۲}) - ۲۱ = -۴$ پس جواب به‌دست آمده، قابل قبول نیست.

۲

الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = ۲^t$ به‌دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

$m^{-۱}(t) = \log_۲ t$

که دور آن t جرم باکتری و $m^{-۱}(t)$ زمان سپری شده برحسب ساعت است.

ب) با استفاده از وارون تابع $m\,(t)$، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$$\log ۲ \simeq ۰/۳۰۱$$

$$\log_{۲} ۵۰۰۰ = \frac{\log_{۱۰} ۵۰۰۰}{\log_{۱۰} ۲} = \frac{\log ۵\times ۱۰۰۰}{\log ۲} = \frac{\log ۵ + \log ۱۰۰۰}{\log ۲}$$

$$= \frac{\log ۵ + ۳}{\log ۲} \simeq \frac{۱-۰/۳۰۱+۳}{۰/۳۰۱} \simeq ۱۲/۲۸$$

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $a^{\log_b a} = a \quad (b \neq ۱ \,,\, a \,,\, b > ۰)$

نادرست است به عنوان مثال اگر a=۱۰۰ و b=۱۰ آن‌گاه

$$۱۰۰^{\log_{۱۰} ۱۰۰} \stackrel{?}{=} ۱۰۰^{۲} = ۱۰^{۴} \neq ۱۰۰$$

ب) $\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c \quad (d \neq ۱ \,,\, a \,,\, b \,,\, c \,,\, d > ۰)$

درست است. تعمیم حالت $\log_d ab = \log_d a + \log_d b$

پ) $\log x \log y = \log x + \log y$

نادرست. مثال

$$\log ۱۰ \log ۱۰۰ \stackrel{?}{\neq} \log ۱۰ + \log ۱۰۰$$

$$۱\times ۲ \quad \neq \quad ۱+۲$$

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

نادرست. (به ازای هر x در بازه $(۰,۱)$ $\log_a x < ۰$, $\log_a ۱ = ۰$, $a \neq ۱, a >$)

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی‌ می‌ماند، بیابید. $m(t) = ۱ \times ۲^{\frac{-t}{۴}}$

ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟

$$۰/۰۱ = ۲^{\frac{-t}{۴}}$$

$$\log ۰/۰۱ = -\frac{t}{۴} \log ۲ \rightarrow -۲ = -\frac{t}{۴} \log ۲$$

$$t = \frac{۸}{\log ۲} \simeq \frac{۸}{۰/۳} \simeq ۲۶/۶$$

پس طی ۲۷ روز، جرم این عنصر به ۰/۰۱ کاهش می‌یابد.

۵ عبارات زیر را ساده کنید. ($\log ۲ \simeq ۰/۳۰۱$, $\log ۳ \simeq ۰/۴۷۷۱$).

الف) $\log(۱۸\times۳۷۵)=\log ۱۸+\log۳۷۵=\log۲+۲\log۳+۳\log۵+\log۳$

$=\log۲+۳\log۳+۳\log۵$

$\simeq ۰/۳+۳\times۰/۴+۳\ (۱-۰/۳)$

$=۳/۶$

ب) $\log\sqrt{۰/۷۵}=\frac{۱}{۲}[\log۷۵-\log۱۰۰]$

$=\frac{۱}{۲}[\log۳+۲\log۵-۲]$

$\simeq\frac{۱}{۲}[۰/۴+۲(۱-۰/۳)-۲]$

$=-۰/۱$

پ) $\log_۲\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt[۴]{۲}}=\log_۲ ۲^{\frac{۲}{۳}}\div۲^{\frac{۱}{۴}}=\log_۲ ۲^{\frac{۵}{۴}}=\frac{۵}{۴}\log_۲ ۲=\frac{۵}{۴}$

۶ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.

✓ $\log_b a\times\log_a b=۱$

$\frac{\log a}{\log b}\times\frac{\log b}{\log a}=۱$

× $\log ۵=\log ۳+\log ۲$

۷ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

$m(t)=۱۲۸\times۲^{\frac{-t}{۳۰}}$

$m(۳۰۰)=۱۲۸\times۲^{-\frac{۳۰۰}{۳۰}}=۱۲۸\times۲^{-۱۰}=۰/۱۲۵$ میلی گرم

نمونه تمرین‌های حل شده

کدام‌یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است.

پ) $h(x) = (۰/۰۰۱)^x$ ب) $g(x) = \frac{۲^x}{۳^x}$ الف) $f(x) = (۲x-۱)^۲$

ث) $r(x) = (-۲)^x$ ت) $t(x) = x^{\frac{۱}{۵}}$

حل : طبق تعریف، هر تابع به‌صورت $y = a^x$ که در آن a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابعی نمایی است.

الف) همان‌طور که ملاحظه می‌شود،تابع، صورت کلی تابع نمایی را ندارد. پس $f(x)$ تابع‌نمایی نیست.
چون دانش‌آموزان با تابع درجه ۲ آشنا هستند. برای رد این قسمت، می‌توان از رسم تابع نیز استفاده کرد.

ب)
$$g(x) = \frac{۲^x}{۳^x} = (\frac{۲}{۳})^x$$

$a = \frac{۲}{۳} > ۰$ و $a \neq ۱$. پس این تابع نمایی است زیرا به‌صورت $y = a^x$ است.

پ)
$$h(x) = (۰/۰۰۱)^x$$

$a = ۰/۰۰۱ > ۰$ و $a \neq ۱$. پس این تابع نمایی است زیرا به‌صورت $y = a^x$ است.

ت)
$$t(x) = x^{\frac{۱}{۵}}$$

در تعریف تابع نمایی، پایه یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است ولی در تابع $t(x)$، پایه، یک متغیر است. پس این تابع نمایی نیست.

ث) در تابع $r(x)$، $a = -۲$ عددی منفی است پس $r(x)$ شرط لازم در تعریف تابع نمایی را ندارد.

بین اعداد $۲^{۳/۱}$ و $۲^{\sqrt{۷}}$ سه عدد پیدا کنید

می‌دانیم اگر دو عدد حقیقی مثبت توان‌دار پایه‌های برابر داشته باشند، هرچه توان بزرگ‌تر می‌شود، عدد هم بزرگ‌تر می‌شود از این خاصیت در پاسخ این سؤال استفاده می‌کنیم.

$\sqrt{۷}$ عددی گنگ با تقریب ۲/۶ است.

$$۲^{\sqrt{۷}=۲/۶} < ۲^{۳/۱}$$

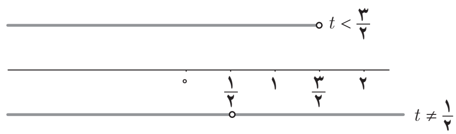
همه اعداد به‌صورت ۲^a که در آن $۲/۶ < a < ۳/۱$ بین دو عدد مذکور واقع هستند. پس اعداد $۲^{۲/۷}$، $۲^{۲/۸}$ و $۲^{۲/۸۱}$ و $۲^{۲/۸۱۲}$ و ... همگی جواب‌های مسئله‌اند.

■ حدود t را چنان بیابید که تابع $y=(\frac{۳}{۲}-t)^x$ یک تابع نمایی باشد.

طبق تعریف تابع نمایی به‌صورت $y=a^x$، a باید عددی مثبت و مخالف یک باشد پس

$$-- > \quad و \quad \frac{۳}{۲}-t\neq ۱$$

$$\frac{۳}{۲}>t \quad و \quad -\neq$$



که از اشتراک جواب‌های حاصل نتیجه می‌شود.

$$t\in(-\infty,\frac{۱}{۲})\cup(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$$

■ کدام یک از نقاط زیر روی نمودار تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$ واقع است؟

الف) $(۰/۵,\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ ب) $(۰\ ,۲)$ پ) $(-۲\ ,۴)$

حل :

$$(۵,\frac{\sqrt{۲}}{۲})\to\frac{\sqrt{۲}}{۲}\overset{?}{=}(\frac{۱}{۲})^{۰/۵=\frac{۱}{۲}}$$

$$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt[۲]{\frac{۱}{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=(\frac{۱}{۲})^{۰/۵}$$

و نقطه $(۰/۵,\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ روی نمودار تابع f واقع است.

ب) $(۰,۱)\to ۲\overset{?}{=}(\frac{۱}{۲})^{۰}$

$$(\frac{۱}{۲})^{۰}=۱\Rightarrow ۲\neq(\frac{۱}{۲})^{۰}$$

پس نقطه $(۲,\ ۰)$ روی نمودار تابع f قرار ندارد.

پ) $(-۲,۴)\to ۴\overset{?}{=}(\frac{۱}{۲})^{-۲}$

$$(\frac{۱}{۲})^{-۲}=۲^{۲}=۴\Rightarrow ۴=(\frac{۱}{۲})^{-۲}$$

پس نقطه $(-۲\,,\,۴)$ روی نمودار تابع f قرار دارد.

نامعادله توانی $۳^{۵x-۲} > \frac{۱}{۷۲۹}$ را حل کنید.

$$۳^{۵x-۲} > \frac{۱}{۷۲۹}$$

از تجزیه ۷۲۹ داریم $۷۲۹ = ۳^{۶}$

پس مسئله به‌صورت $۳^{۵x-۲} > (\frac{۱}{۳})^{۶}$ بازنویسی می‌شود. همچنین $۳^{۵x-۲} > (۳^{-۱})^{۶}$ در نتیجه $۳^{۵x-۲} > ۳^{-۶}$. از آنجا که پایه‌ها مثبت و برابر ۳ هستند. این نامساوی با شرط $۵x-۲>-۶$ صحیح است و جواب این نامعادله به‌صورت $x > -\frac{۴}{۵}$ است.

ـ اگر سه تابع نمایی به‌صورت $f(x) = ۳^{x}$ و $g(x) = (\frac{۱}{۳})^{x}$ و $h(x) = ۲^{x}$ داشته باشیم حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(\frac{۱}{۲})$ ب) $g(-۳)$ پ) $h(-۲) + g(-۱)$

ت) $(۳g + h)(۱)$ ث) $\frac{۵}{۲}h(۲) + \frac{۱}{۳}g(-۲)$

الف) $f(\frac{۱}{۲}) = ۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$

ب) $g(-۳) = ۳^{-۳} = (۳^{-۱})^{۳} = (\frac{۱}{۳})^{۳} = \frac{۱}{۲۷}$

پ) $h(-۲) + g(-۱) = ۳^{-۲} + (\frac{۱}{۳})^{(-۱)} = (\frac{۱}{۳})^{۲} + ۳ = \frac{۱}{۹} + ۳ = \frac{۲۸}{۹}$

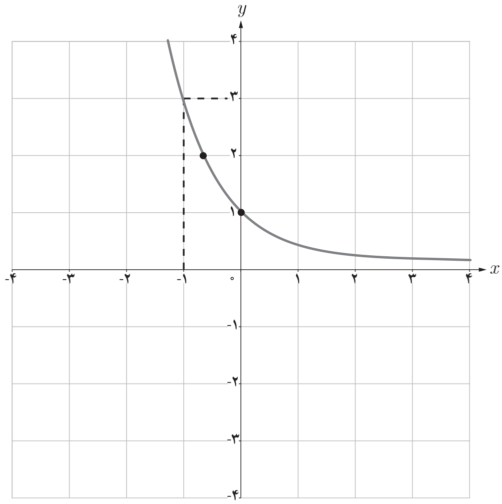
ت) $(۳g + h)(۱) = ۳g(۱) + h(۱) = ۳((\frac{۱}{۳})^{۱}) + ۲^{۱} = ۱ + ۲ = ۳$

ث)
$$\begin{aligned}\frac{۵}{۲}h(۲) + \frac{۱}{۳}g(-۲) &= \frac{۵}{۲}(۲^{۲}) + \frac{۱}{۳}((\frac{۱}{۳})^{-۲})\\ &= ۱۰ + ۳\\ &= ۱۳\end{aligned}$$

■ ضابطه تابع نمایی زیر را به‌دست آورید.

صورت کلی تابع نمایی به‌صورت $y = a^x$ ($a>۰$ و $a\neq۱$) نقطه $(۳ , ۱-)$ را در معادله قرار می‌دهیم تا مقدار a به‌دست آید.

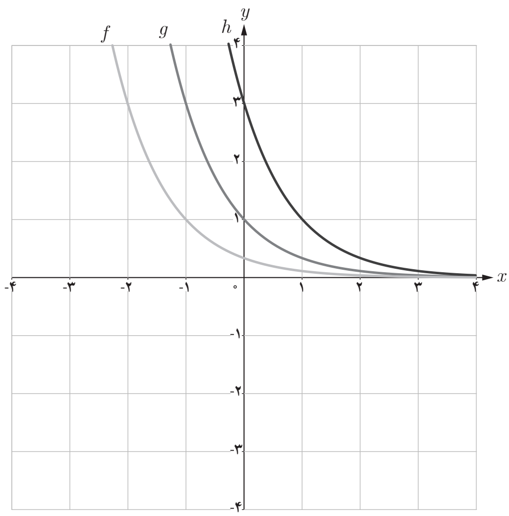
$$۳ = a^{-۱} \rightarrow a = \frac{۱}{۳}$$



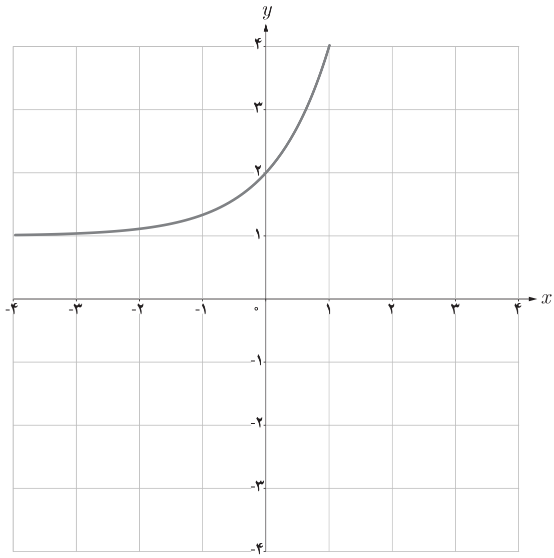
نمونه سؤالات ارزشیابی فصل ۳

۱ نمودار سه تابع نمایی دو دستگاه مختصات رسم شده است. در بین ۵ ضابطه‌ای که می‌بینید ضابطه هر تابع را معلوم کنید.

۹^x , ۳^{-x} , $\frac{۱}{۳}\times۳^{-x}$, $۳^{۱-x}$, $۳^{۱+x}$



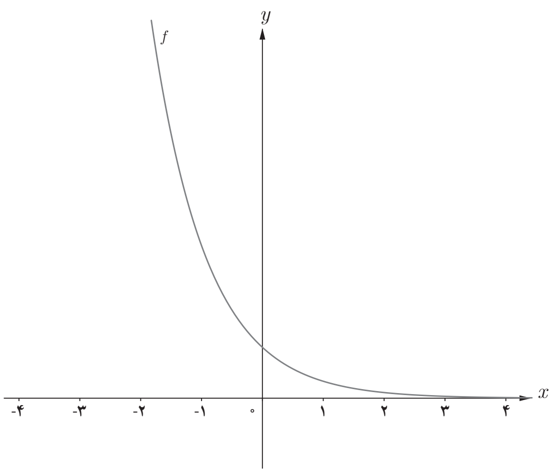
۲ نمودار زیر متعلق به تابعی با ضابطه $y = ۳^{ax} + b$ است. مقدارهای ممکن a را بیابید.



۳ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۲^{x} + ۱$ ب) $y = ۲^{-x} - ۱$ پ) $y = ۲^{x-۳}$

۴ اگر f یک تابع نمایی باشد محل تقاطع نمودار f با محور yها را به‌دست آورید.



۵ اگر $\frac{۱}{۶۲۵} < ۵^{۳a+۲} < ۳۱۲۵$ ، حدود a را به‌دست آورید.

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۱} = \frac{۱}{۹}$

ب) $(\frac{۱}{۵})^{۱+x} = ۶۲۵$

پ) $۴^{x-۱} = ۸\times ۱۶^{۳x+۱}$

ت) $۳^{x+۱}+۳^{x+۲}+۳^{x+۳} = ۲۷$

ث) $۷^{۲x-۳}\times ۷^{۲x-۳} = ۴۹$

ج) $۲^{x-۵}+۲^{x-۵} = ۱۶$

۷ حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(۱۲۱)^{x-۳} = ۱۱^{x+۱}$

۸ نمودار تابع $f(x)=۲^x$ در چند نقطه نمودار تابع $f(x)=x-۲$ را قطع می‌کند؟

۹ نمودار تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$ و وارون آن را رسم کرده و مختصات محل تقاطع هر یک با محورهای مختصات را مشخص کنید. سپس فاصله نقاط تقاطع را از یکدیگر به دست آورید.

۱۰ اگر $f(x)=۲^x$ و $g(x)=۵^x$، حاصل $fog(۱)$ را به‌دست آورید.

۱۱ نمودار توابع لگاریتمی زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = -۲+\log_۲ x$

ب) $g(x) = \log_۲ (x-۱)$

پ) $h(x) = -۲+\log_۲ (x-۱)$

۱۲

الف) حدود a را در تابع $f(x) = \log_{۳a-۵} ۲$ تعیین کنید.

ب) $g(x) = \log_{۹x-۲} ۳x+۱$ یک تابع لگاریتمی است حدود x را به‌دست آورید.

۱۳ دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x) = \log_۲ \frac{|x|}{|x|+۱}$

ب) $g(x) = \log_۵ (x^۲+۲)$

پ) $h(x) = ۱+۲^x$

ت) $r(x) = ۲^{x-۱}$

۱۴ اگر $\log_۵ ۳ = x$ و $\log_۵ ۷ = y$ حاصل $\log_{۲۵} ۲۱$ را برحسب x و y بنویسید.

۱۵ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید $(a = \log_{۱۰} ۲)$

الف) $\log_{۱۰} ۴\times\log_{۱۰} ۱۲۵+(\log_{۱۰} ۵)^۲$

ب) $\log_{۱۰} \frac{۱۲۵}{۱۰۰۰}-\log_{۱۰} ۰/۲۴+\log_{۱۰}(\log_{۱۰} ۱۰۰۰۰)$

۱۶ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

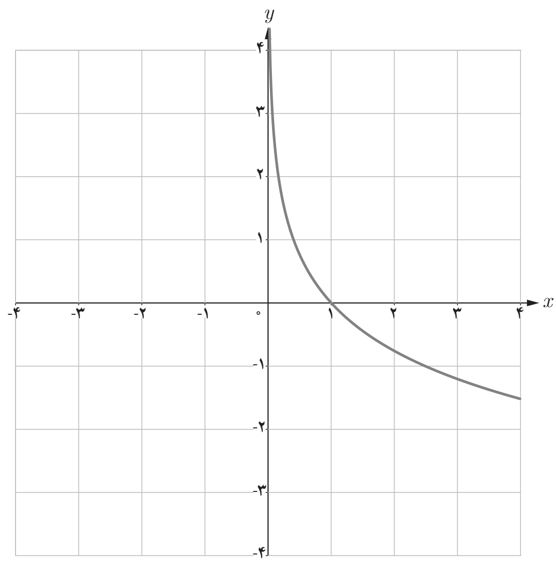
الف) $\log_{۹}(x^{۲}-۳)=\log_{۹} x$ ب) $\log_{x} ۹=۲$

پ) $\log_{۶}(x^{۲}-۳x)=۲\log_{۶}\sqrt{۲x+۱۴}$ ت) $\log_{۳} ۳+\log_{۲}(\frac{۲x-۱}{۲x+۱})=۱$

ث) $\log_{۱۰}(۲x-۱)+\log_{۱۰}(x-۱)=۱+۲\log_{۱۰} ۵$ چ) $\log_{۳}\sqrt{x+۲}\times\log_{۳}\sqrt{x-۲}=\frac{۱}{۲}$

ج) $\begin{cases}\log_{۵} a+\log_{۵} b=۰\\ a+b=۷\end{cases}$

۱۷ اگر نمودار تابع $y=\log_{۲a+۱} x$ به‌صورت زیر باشد حدود a را تعیین کنید.



۱۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دامنه تابع $f(x)=\log_{a} x$ با دامنه تابع $g(x)=a^{x}$ برابر است .

ب) تابع $f(x)=\log_{a} x$ یک به یک است.

پ) توابعی به شکل $f(x)=a^{x}+b$ ($a>۰$ و $a\neq۱$) رفتار نمایی دارند.

ت) حاصل $f(-x)\,.\,f(x)$ با فرض نمایی بودن تابع f برابر ۱ است.

۱۹ نقطه $x=\sqrt{۳}$ را روی محور xها مشخص کنید و سپس مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۳}}$ را با استفاده از نمودار $y=۲^x$ پیدا کنید.

۲۰ تابع $y=۰/۳\times ۳^x$ را رسم کنید.

۲۱ اگر $۰<a<۱$ و x و y و z سه عدد حقیقی باشند به‌طوری که $x>y>z$، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین a^x، a^y و a^z برقرار است؟

۲۲ نمودار تابع $y=\log_۳ x$ را رسم کنید و آن را با $y=۳^x$ مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

۲۳ نمودار توابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲^x$ را رسم کنید و نقطه تقاطع آنها را به‌دست آورید. تعبیر هندسی آن را بیان کنید.

۲۴ اگر $a=\log ۲$ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$\log ۱۰۰۰\ ,\ \log ۰/۰۰۸\ ,\ \log ۵۰۰$

۲۵ معادلات لگاریتمی زیررا حل کنید.

الف) $\log_۳ x+\log_۳(x-۲)=۱$ ب) $\log_۳(x^۳-۱)=\log_۳(x-۱)+۱$

ج) $\log_۲\dfrac{x+۱}{x-۱}=۱$ د) $\log x+\log x^۲+\log x^۳+\dots+\log x^n=n(n+۱)$

۲۶ نشان دهید $a^{\log_a x}=x$.

معرفی منابع

آدام هارت دیویس، تاریخ علم از دوران باستان تا انقلاب صنعتی، انتشارات سبزان، مترجمان شادی مشکات السادات، سارا فروغی اصل