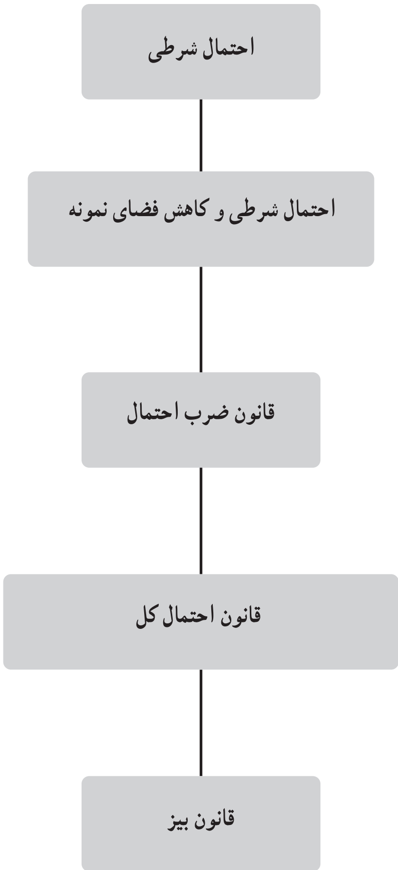
درس سوم : احتمال شرطی

نقشه مفهومی



اهداف

۱ توانایی محاسبه احتمال شرطی (با کاهش فضای نمونه و بدون آن)

۲ توانایی محاسبه احتمال وقوع دو یا سه پیشامد به‌طور هم‌زمان به کمک قانون ضرب احتمال

۳ افراز فضای نمونه به چند قسمت و محاسبه احتمال یک پیشامد در هر قسمت به کمک قانون احتمال کل

۴ رسم نمودار درختی در مسائل مربوط به قانون احتمال کل

۵ درک قانون بیز و تبدیل احتمال قبل از وقوع به احتمال بعد از وقوع به کمک این قانون

روش تدریس

اهم مطالب این درس، احتمال شرطی، قانون ضرب احتمال، قانون احتمال کل و قانون بیز است. شروع این درس با طرح یک فعالیت در صفحه ۵۲ است که می‌توانید اطلاعات موجود در شماره ۲ را در یک جدول به‌صورت زیر وارد کنید.

اکنون به کمک آن‌که به‌طور ضمنی فضای نمونه کاهش یافته است، به‌راحتی می‌توان احتمال‌های خواسته شده را به دست آورد.

	نمره کامل	نمره غیرکامل	مجموع
کلاس ۱ــ۱۱	۸	۲۴	۳۲
کلاس ۲ــ۱۱	۹	۲۴	۳۳
کلاس ۳ــ۱۱	۶	۲۹	۳۵
مجموع	۲۳	۷۷	۱۰۰

الف) ۱۰۰ عضوی ب) $\frac{۷۷}{۱۰۰}$، پ) $\frac{۳۲}{۱۰۰}$ و ت) $\frac{۸}{۳۲}=\frac{۱}{۴}$

برای رسیدن به یک تعریف جامع از احتمال شرطی، از رابطه $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$ که از دستور کاهش فضای به‌دست آمده، صورت و مخرج سمت راست را به $n(s)$ تقسیم می‌کنیم تا به رابطه $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ برسیم. مثال‌هایی که در صفحات ۵۴ و ۵۵ می‌آید به هر دو روش، یعنی کاهش

فضای نمونه و استفاده از فرمول اخیر، قابل حل است که همگی از فرمول اخیر استفاده کرده‌اند. کار در کلاس صفحه ۵۵ با طرح فعالیت نخست درس، در قسمت‌های الف و ب احتمال‌های شرطی را می‌پرسد که به سادگی می‌توانید به کمک جدول رسم شده آن را به‌دست آورید و برای پاسخ به قسمت پ، از قسمت الف استفاده می‌کنیم و کلاس ۱ـ۱۱ موفق‌تر از کلاس‌های دیگر است، قسمت ب نسبت افراد موفق هر کلاس را به تعداد کل افراد موفق نشان می‌دهد.

قانون ضرب احتمال برای دو پیشامد به‌صورت $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$ ، در صفحه ۵۶ مطرح می‌شود. از این قانون برای محاسبه احتمال وقوع هم‌زمان دو پیشامد استفاده می‌کنیم که به‌صورت متوالی رخ داده‌اند. اگر پیشامد B بعد از پیشامد A رخ دهد، برای محاسبه احتمال وقوع هم‌زمان آنها یعنی $A\cap B$، از این قانون استفاده می‌کنیم.

به‌طور مشابه اگر A_3 بعد از A_2 و A_2 بعد از A_1 رخ دهند، برای محاسبه $P(A_1\cap A_2\cap A_3)$ از دستور زیر استفاده می‌کنیم.

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)$$

اثبات این تساوی در تمرین‌های پایانی خواسته شده که بهتر است عبارت‌های سمت راست را ساده کنیم تا به عبارت سمت چپ برسیم. مثالی از این قسمت در اولین کار در کلاس صفحه ۵۷ آمده است و در ادامه، دومین کار در کلاس مثال دیگری از محاسبه احتمال وقوع سه پیشامد است که به‌طور متوالی رخ می‌دهند. تمرین پانزدهم از این درس شبیه آخرین مثال این بخش در صفحه ۵۸ است.

سومین بخش از این درس قانون احتمال کل است. در محاسبه $P(A)$ اگر مطمئن نباشیم که A دقیقاً در کدام قسمت فضای نمونه است، فضای نمونه S را به مجموعه‌های $B_i\ (1\leq i\leq n)$ افراز می‌کنیم و احتمال وقوع A را در هرکدام از آنها تعیین می‌کنیم :

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+...+P(B_n)P(A|B_n)$$

کشف این قانون از فعالیت صفحه ۵۸ است و در ادامه رسم نمودار درختی می‌تواند شهود مناسبی برای جواب این فعالیت و مسائل مشابه باشد.

ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل هنگامی است که فضای نمونه S بر B و B' افراز شود :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

و این رابطه به همراه مثال آن در صفحه ۶۰ آمده است. تمرینات ۹ـ۶ و ۱۱ از این درس

مربوطه به قانون احتمال کل است.

قاعده بیز آخرین بخش از این درس است. این قانون مشخص می‌کند که چگونه می‌توان «احتمال قبل از مشاهده» را به «احتمال پس از مشاهده» تبدیل کرد : $P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$

معمولاً استفاده از این رابطه برای تعیین $P(A|B)$ هنگامی توصیه می‌شود که محاسبه $P(B|A)$ به سادگی انجام شود. معمولاً تعیین $P(B)$ در مخرج کسر به کمک قانون احتمال کل است و رسم نمودار درختی در مسائل مربوط به این قانون می‌تواند در بعضی مواقع مفید باشد. تمرینات ۱۰، ۱۵، ۱۷، ۱۸و ۱۹ مربوط به این قانون هستند.

حل تمرین

۱ با وجود حداقل یک فرزند پسر، تعداد فضای نمونه که از روش کاهشی به دست آمده، عبارت است از : $n(s)=۲^۴-۱=۱۵$ ، بنابراین احتمال اینکه دقیقاً ۲ فرزند پسر در این خانواده باشد، عبارت است از :

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}}{۱۵}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

۲ الف) اگر A پیشامد مردودی و S فضای نمونه شامل کل مراجعه‌کنندگان باشد،

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{۲۵۸}{۸۷۰}=\frac{۴۳}{۱۴۵}$$

ب) $P(B)=\frac{۲۶}{۷۹}$

پ) اگر A پیشامد مردودی و B پیشامد مراجعه به مرکز شماره ۵ باشد، داریم :

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۱۳}\times\frac{۲۶}{۷۹}}{\frac{۴۳}{۱۴۵}}=\frac{۱۳}{۱۲۹}$$

به روش کاهش فضای نمونه نیز می‌توان مسئله را حل کرد.

۳ اگر $B_۱$ و $B_۲$ به ترتیب پیشامدهای طوفانی بودن در روزهای اول و دوم باشند، سپس :

$$P(B_۱\cap B_۲)=P(B_۱)P(B_۲|B_۱)=۰/۱\times۰/۵=۰/۰۵$$

۴ سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم تا به سمت چپ برسیم.

$$P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|A_۱\cap A_۲)=P(A_۱)\frac{P(A_۱\cap A_۲)}{P(A_۱)}\frac{P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)}{P(A_۱\cap A_۲)}=P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)$$

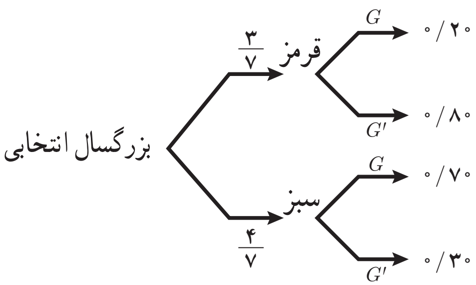
۵ یکی از روش‌ها به‌صورت زیر است :

$$P(A_۱\cap A_۲\cap...\cap A_n)=P(A_۱)P(A_۲|A_۱)...P(A_n|A_۱\cap A_۲\cap...\cap A_{n-۱})$$

بسته به انتخاب پیشامدهای موردنظر در سمت راست تساوی بالا، تعداد روش‌هایی که می‌توان سمت چپ را باز کرد، عبارت است از :

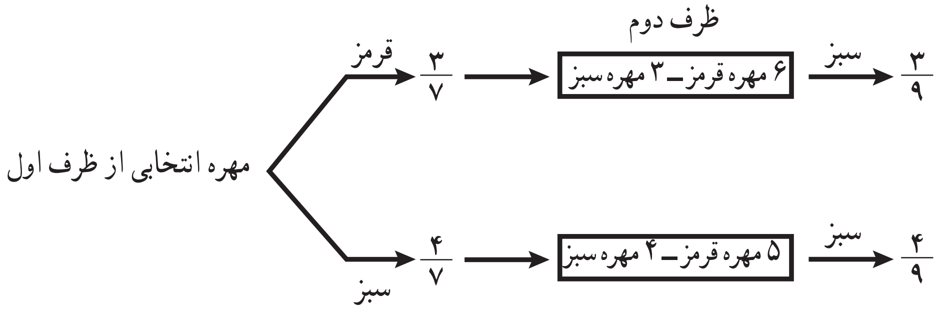
$$n\times(n-۱)\times...\times۲\times۱=n!$$

۶ اگر M، W و G به ترتیب پیشامدهای مرد، زن و داشتن گواهینامه تراکتور باشند، با توجه به نمودار درختی مقابل و قانون احتمال کل داریم :



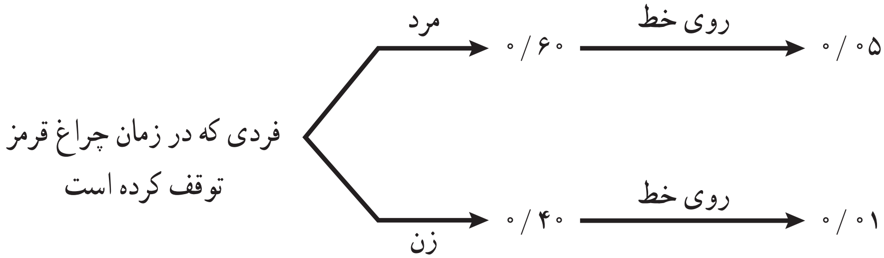
$$P(G)=P(W)P(G|W)+P(M)P(G|M)=۰/۵۵\times۰/۲+۰/۴۵\times۰/۷=۰/۴۲۵$$

۷ از نمودار درختی زیر استفاده کرده و احتمال خواسته شده را به‌دست می‌آوریم.



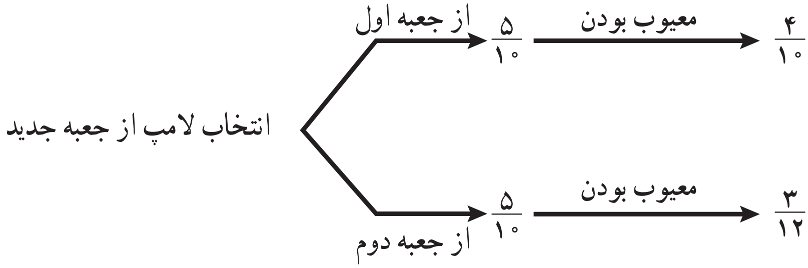
$$P(\text{سبز})=\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۹}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۴}{۹}=\frac{۲۵}{۶۳}$$

۸ از نمودار درختی زیر استفاده کرده و احتمال خواسته شده را به‌دست می‌آوریم.



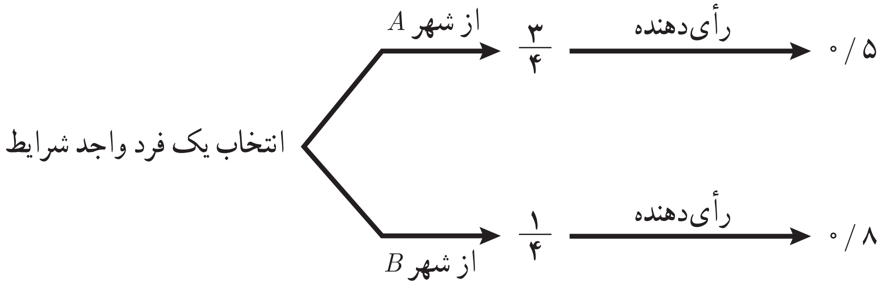
P (روی خط توقف کردن) $= ۰/۶ \times ۰/۰۵ + ۰/۴ \times ۰/۰۱ = ۰/۰۳۴$

۹ به کمک نمودار درختی زیر، مسئله را حل می‌کنیم.



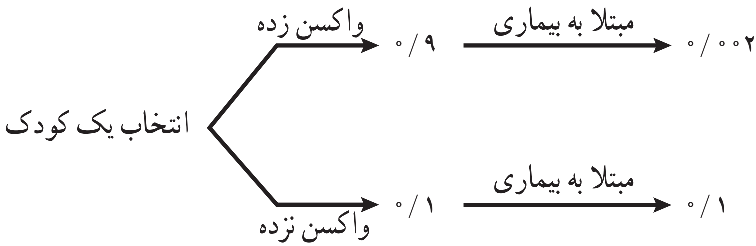
P (معیوب بودن) $= \frac{۵}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰} + \frac{۵}{۱۰} \times \frac{۳}{۱۲} = ۰/۵ \times ۰/۴ + ۰/۵ \times ۰/۲۵ = ۰/۳۲۵$

۱۰ اگر $n(s)$ تعداد کل واجدین شرایط و $n(A)$ و $n(B)$ به ترتیب تعداد واجدین شرایط از شهرهای A و B باشند، سپس $n(A) = ۳n(B)$ و با توجه به اینکه $n(A) + n(B) = n(S)$ ، سپس $n(A) = \frac{۳}{۴}n(S)$ و $n(B) = \frac{۱}{۴}n(S)$ ، بنابراین احتمال اینکه فرد انتخاب شده از شهر A و B باشد، به ترتیب $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۱}{۴}$ است. احتمال خواسته شده (رأی دهنده | از شهر A) P است و چون محاسبه (از شهر A | رأی‌دهنده) P به راحتی قابل محاسبه است، از قاعده بیز استفاده می‌کنیم. برای تعیین (رأی‌دهنده) P از نمودار درختی زیر استفاده می‌کنیم.



$$P(\text{از شهر }A|\text{رأی‌دهنده})=\frac{P(\text{رأی‌دهنده}|\text{از شهر }A)\,P(\text{از شهر }A)}{P(\text{رأی‌دهنده})}=\frac{\frac{3}{4}\times 0/5}{\frac{3}{4}\times 0/5+\frac{1}{4}\times 0/8}=0/65$$

۱۱ به کمک نمودار درختی زیر، احتمال خواسته شده را پیدا می کنیم.



$$P(\text{مبتلا به بیماری})=0/9\times 0/002+0/1\times 0/1=0/0018+0/01=0/0118$$

۱۲ سمت راست و سمت چپ را از تعریف احتمال شرطی بازمی‌کنیم :

$$\begin{cases} P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i\cap A)}{P(A)} \\[2ex] \dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}=\dfrac{P(B_i)\times\dfrac{P(A\cap B_i)}{P(B_i)}}{P(A)}=\dfrac{P(A\cap B_i)}{P(A)} \end{cases}$$

بنابراین : $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$.

۱۳ فرض کنیم ماکزیمم و مینیمم مجموعه $\{P(A|B_i), \ldots, P(A|B_n)\}$ به‌ترتیب $P(A|B_s)$ و $P(A|B_t)$ باشند، از قانون احتمال کل برای محاسبه $P(A)$ شروع کرده و مسئله را حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}P(A) &= P(B_۱)P(A|B_۱) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n)\\ &\le P(B_۱)P(A|B_s) + \ldots + P(B_n)P(A|B_s)\\ &= P(A|B_s)\big(P(B_۱) + \ldots + P(B_n)\big)\\ &= P(A|B_s)\times ۱\\ &= P(A|B_s)\end{aligned}$$

بنابراین $P(A) \le P(A|B_s)$. مشابهاً با تغییر $P(A|B_s)$ به $P(A|B_t)$ و $\le$ با $\ge$، نامساوی $P(A|B_t) \le P(A)$ حاصل می‌شود.

۱۴ از قبل می‌دانیم که اگر $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$، سپس $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$. به کمک این خاصیت داریم :

$$P(A|B) \le P(A|C) \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \le \frac{P(A\cap C)}{P(C)} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \le \frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B)+P(C)} \le \frac{P(A\cap C)}{P(C)}$$

$$\xrightarrow{\text{ناسازگار } C \text{ و } B} P(A|B) \le \frac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{P(B\cup C)} \le P(A|C) \Rightarrow P(A|B) \le \frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)} \le P(A|C)$$

$$\Rightarrow P(A|B) \le P(A|B\cup C) \le P(A|C)$$

۱۵ اگر A پیشامد امیر بلندقدترین عضو تیم و B پیشامد این باشد که امیر از بابک قدبلندتر است، باید $P(A|B)$ را به‌دست آوریم.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۵}$$

اکنون اگر C پیشامد این باشد که امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد، باید $P(C|B)$ را به‌دست آوریم.

$$P(C|B)=\frac{P(B\cap C)}{P(B)}=\frac{P(C)P(B|C)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۰}\times\frac{۱}{۹}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۴۵}$$

۱۶ اگر A و B پیشامدهای به ورزشگاه رفتن علی و مازیار باشد، سپس $P(A)=۰/۴$ ، $P(B)=۰/۳$ و $P(B|A)=۰/۰۸$ و باید $P(B'|A')$ را به‌دست آوریم.

$$P(B|A)=۰/۰۸\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=۰/۰۸\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۴\times۰/۰۸=۰/۰۳۲$$

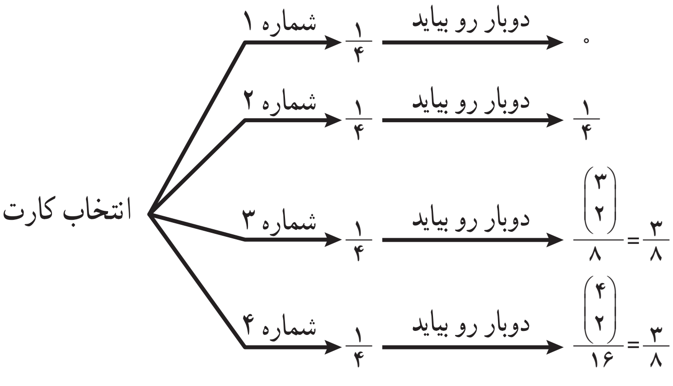
$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{۱-P(A\cup B)}{۱-P(A)}=\frac{۱-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]}{۱-P(A)}$$

$$=\frac{۱-(۰/۴+۰/۳-۰/۰۳۲)}{۰/۶}=۰/۵۵$$

۱۷ اگر A، B و C به ترتیب پیشامدهای نسخه خوانی خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی باشد و F پیشامد بی‌غلط تصحیح کردن صفحات باشد، باید $P(A|F')$ را به‌دست آوریم. برای این کار از قانون بیز استفاده می‌کنیم. برای تعیین $P(F')$ نیز از قانون احتمال کل استفاده شده است.

$$P(A|F')=\frac{P(A)P(F'|A)}{P(F')}=\frac{۰/۲\times۰/۱}{۰/۲\times۰/۱+۰/۳\times۰/۰۵+۰/۵\times۰/۰۱}=۰/۵$$

۱۸ باید P (۲ بار رو بیاید | شماره کارت ۳ باشد) را محاسبه کنیم. از قانون بیز و نمودار درختی زیر استفاده می‌کنیم.



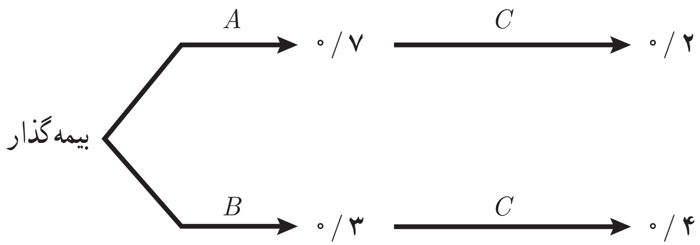
بنابراین :

$$P\,(\text{۲ بار رو بیاید | شماره کارت ۳ باشد})=\frac{P\,(\text{شماره کارت ۳ باشد})\;P\,(\text{۲بار روبیاید | شماره کارت ۳ باشد})}{P\,(\text{۲ بار روبیاید})}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۸}}{\frac{۱}{۴}\times ۰+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۸}}=\frac{۳}{۸}$$

۱۹ اگر A و B پیشامد بیمه‌گذاران کم‌خطر و پرخطر باشد، سپس $P(A)=۰/۷$ و $P(B)=۰/۳$ اکنون اگر C پیشامد تصادف کردن باشد،

الف) به کمک نمودار درختی زیر، $P(C)$ را به‌دست آوریم.



$$P(C)=۰/۷\times۰/۲+۰/۳\times۰/۴=۰/۲۶$$

ب) برای محاسبه $P(B|C)$ از قانون بیز استفاده می‌کنیم.

$$P(B|C)=\frac{P(B)P(C|B)}{P(C)}=\frac{۰/۳\times۰/۴}{۰/۲۶}=\frac{۰/۱۲}{۰/۲۶}=\frac{۶}{۱۳}$$

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ در یک کلاس ۶۰٪ دانش‌آموزان در درس فیزیک، ۵۰٪ در درس ریاضی و ۴۰٪ در هر دو درس نمره کامل دریافت کرده‌اند. اگر یک دانش‌آموز که نمره کامل فیزیک را کسب کرده به‌طور تصادفی انتخاب کنیم، با چه احتمالی در درس ریاضی نیز نمره کامل را گرفته است؟

۲ اگر در پرتاب دو تاس اعداد رو شده متفاوت باشند، احتمال آنکه متوالی باشند، کدام است؟

۳ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $P(A|B)=\frac{۲}{۵}$ و $P(B-A)=\frac{۱}{۲}$ ، حاصل $P(B)$ را به‌دست آورید.

۴ در یک جعبه ۴ کارت وجود دارد که دوروی کارت اول، آبی، دو روی کارت دوم قرمز، دوروی کارت سوم، قرمز و آبی و دوروی کارت چهارم، سبز و آبی است. یک کارت به تصادف برمی‌داریم. اگر یک روی این کارت قرمز باشد، احتمال اینکه وجه دیگر کارت، آبی باشد، چقدر است؟

۵ از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت قرمز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال :

الف) کارت اول سفید و کارت دوم قرمز است.

ب) هر دو کارت قرمز هستند.

پ) هر دو کارت هم‌رنگ هستند.

۶ در یک گروه ۶ نفر حضور دارند که دونفر آنها در سال ۱۳۵۹، دو نفر دیگر در سال ۱۳۶۰ و دو نفر آخر در سال ۱۳۶۳ به‌دنیا آمده‌اند. سه نفر از این گروه به ترتیب انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه :

الف) سن آنها از بزرگ به کوچک باشد.

ب) سن آنها مرتب باشد.

۷ صبا در هریک از آزمون‌های فیزیک و ریاضی، ۸۰٪ توانایی کسب نمره کامل را دارد ولی اگر نتواند نمره کامل را در یکی از آنها بگیرد، توانایی او برای کسب نمره کامل در درس بعدی

به ۶۰٪ کاهش می‌یابد. مطلوب است احتمال اینکه :

الف) در هر دو درس نمره کامل را کسب کند.

ب) فقط در یک درس نمره کامل بگیرد.

پ) در هیچ امتحانی نمره کامل را نگیرد.

۸ از ظرف I که شامل ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است، مهره‌ای به ظرف II که در آن ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است، منتقل می‌کنیم و سپس از ظرف II یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال آنکه این مهره سفید باشد، چقدر است؟

۹ در دو جعبه به ترتیب ۳۰ و ۲۰ لامپ وجود دارد. در جعبه اول ۵ لامپ معیوب و در جعبه دوم ۳ لامپ معیوب قرار دارد. از اولی ۱۰ و از دومی ۸ لامپ به تصادف خارج می‌کنیم و آنها را در جعبه‌ای جدید قرار می‌دهیم و سپس از جعبه جدید یک لامپ به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال معیوب بودن آن را به‌دست آورید.

۱۰ میزان مشارکت ۳ شهر A، B و C از یک استان در انتخابات، ۷۰٪، ۶۰٪ و ۸۰٪ است. اگر جمعیت این سه شهر به ترتیب $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ جمعیت استان را تشکیل دهند و فردی به تصادف از این سه شهر انتخاب شود، با چه احتمالی این فرد در انتخابات شرکت کرده است؟

۱۱ یک تاس را آن‌قدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار، عدد ظاهر شده مضرب ۳ شود. با چه احتمالی :

الف) در پرتاب دوم این نتیجه حاصل می شود.

ب) حداکثر در پرتاب دوم این نتیجه حاصل می‌شود.

۱۲ فردی در یک دادگاه محاکمه می‌شود. اگر احتمال خطای قاضی ۰/۱ و احتمال آنکه این فرد مجرم باشد، ۰/۳ باشد و قاضی حکم به بی‌گناهی این فرد دهد، احتمال اینکه این فرد واقعاً بی‌گناه باشد، چقدر است؟

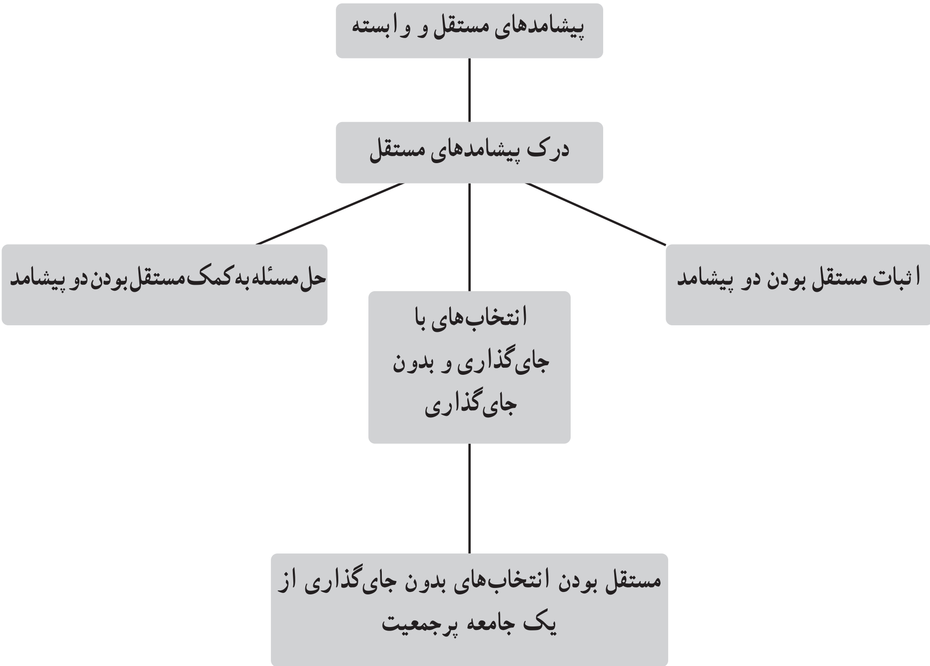
۱۳ در جعبه I، ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه و در جعبه II، ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. تاسی را پرتاب می‌کنیم، اگر شماره‌های ۱ یا ۲ بیاید از جعبه I و در غیراین‌صورت یک مهره از جعبه II خارج می‌کنیم. اگر رنگ مهرهٔ مشاهده شده سفید باشد، احتمال آنکه این مهره از جعبه I باشد، کدام است؟

۱۴ در یک آزمون، از دانش‌آموزان دو کلاس A و B به‌ترتیب از هرکدام، ۶۰ و ۸۰ درصد نمره کامل را کسب کرده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزان کلاس A، $\frac{۳}{۴}$ تعداد دانش‌آموزان کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین افرادی که نمره کامل را کسب کرده‌اند، انتخاب کنیم. با کدام احتمال این فرد از کلاس A است؟

۱۵ خانواده‌ای دارای یک فرزند است و از جنسیت آن فرزند اطلاعی نداریم. یک فرزند پسر به این خانواده اضافه می‌شود. اگر یکی از فرزندان این خانواده انتخاب و این فرزند، پسر باشد، با کدام احتمال، فرزند اول نیز پسر است؟

درس چهارم : پیشامدهای مستقل و وابسته

نقشه مفهومی



اهداف

۱ توانایی بررسی مستقل یا وابسته بودن دو یا چند پیشامد
۲ شناخت مستقل یا وابسته بودن بعضی از پیشامدها بدون بررسی علمی
۳ استفاده از مستقل بودن پیشامدها در حل مسائل
۴ محاسبه احتمال در انتخاب‌های با جایگزینی
۵ محاسبه احتمال در انتخاب‌های بدون جایگزینی
۶ مستقل گرفتن پیشامدها در انتخاب‌های بدون جایگزینی از یک جامعه پرجمعیت

روش تدریس

مفهوم مستقل بودن را به سادگی می‌توانید با مثال‌های متنوعی از جمله پرتاب دو سکه به‌راحتی به دانش‌آموز انتقال دهید. فعالیت نخست این درس برای کشف رابطه $P(A|B)= P(A)$ و سپس نتیجه‌گیری $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ برای پیشامدهای A و Bای هست که مستقل از یکدیگرند. هر دو رابطه مستقل بودن A و B را بیان می‌کنند؛ ولی در رابطه نخست، نیاز است که $P(A)$ و $P(B)$ صفر نباشند. استقلال دو پیشامد همیشه به‌سادگی دیده نمی‌شود. مثال ۱ برای این مورد آمده است و مثال ۲ برای کاربرد این مفهوم در حل مسائل مطرح شده است. کار در کلاس شماره‌های ۱ و ۲ در راستای کشف مستقل بودن دو پیشامد و کار در کلاس شماره ۳ در راستای مثال ۲ مطرح شده است.

در بخش دوم این درس، انتخاب‌های با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری مطرح می‌شوند. مثال ۳ برای انتخاب‌های بدون جای‌گذاری است و نشان می‌دهد که این انتخاب‌ها معمولاً مستقل نیستند. کار در کلاس صفحه ۷۰، همین مسئله را در حالتی مطرح می‌کند که انتخاب‌ها با جای‌گذاری انجام شده‌اند و در ادامه مستقل بودن آنها را در حالت کلی نتیجه می‌گیرد.

در بسیاری از مسائل بیش از دو پیشامد مستقل مطرح می‌شوند، بنابراین لازم است مفهوم استقلال برای سه پیشامد و در حالت کلی مطرح شود. مثال ۴ به همین جهت مطرح و حل شده است. آخرین مثال این درس برای این مطلب است که نشان دهد انتخاب‌های بدون جای‌گذاری از یک جامعه پرجمعیت را می‌توانیم مستقل درنظر بگیریم. برای فهم دقیق‌تر این مطلب از این مثال، جمعیت شهر را ۱۰۰ هزار نفر درنظر بگیرید، بنابراین ۸۰ هزار نفر از مردمان این شهر با سواد و

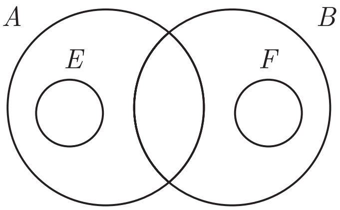
۲۰ هزار نفر بی‌سوادند. احتمال هر پنج نفر بی‌سواد را مطابق زیر از قانون ضرب احتمال‌ها به‌دست آورید تا نشان دهید که انتخاب‌های بدون جای‌گذاری با انتخاب‌های با جای‌گذاری تفاوت بسیار کمی دارند، (کمتر از $۱۰^{-۵}$).

$$P(\text{هر پنج نفر بی‌سواد})=\frac{۲۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰}\times\frac{۱۹۹۹۹}{۹۹۹۹۹}\times\cdots\cdots\times\frac{۱۹۹۹۶}{۹۹۹۹۶}\approx ۰/۰۰۰۳۱$$

حل تمرین‌های صفحه ۷۱

۱ خیر، اگر A و B ناتهی باشند، $P(A)$ و $P(B)$ مخالف صفر هستند و چون ناسازگارند، $P(A\cap B)=۰$ ، بنابراین $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ ، پس A و B مستقل نیستند.

۲ خیر، با توجه به شکل مقابل، E و F دو پیشامد ناتهی و ناسازگارند و طبق تمرین ۱ نمی‌توانند مستقل باشند.



۳ الف) باید نشان دهیم $P(A'\cap B)=P(A')P(B)$.

$$P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)P(B)$$

$$=P(B)(۱-P(A))=P(B)P(A')\ .$$

ب) باید نشان دهیم $P(A'\cap B')=P(A')P(B')$.

$$P(A'\cap B')=۱-P(A\cup B)=۱-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]$$

$$=۱-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=۱-P(A)-P(B)(۱-P(A))$$

$$= (۱ - P(A))(۱ - P(B)) = P(A')P(B') \ .$$

۴ در این مسئله،

$$A = \{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴)(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}$$

$$B = \{(۳,۱),(۳,۲),\cdots\cdots,(۳,۶)\}$$

بنابراین $A \cap B = \{(۳,۲),(۳,۴)\}$. با توجه به اینکه

$$P(A \cap B) = \frac{۲}{۳۶} = \frac{۱}{۱۸} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$$

بنابراین $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ ، پس A و B مستقل نیستند.

۵ در این مسئله،

$$A \cap B = \{۶\} \quad \text{و} \quad B = \{۳,۶,۹\} \quad \text{و} \quad A = \{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$$

با توجه به اینکه

$$P(A \cap B) = \frac{۱}{۱۰} \quad \text{و} \quad P(B) = \frac{۳}{۱۰} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ ، پس A و B مستقل نیستند.

۶ در این مسئله $P(A) = ۰/۶$ ، $P(B)=۰/۸$ و با توجه به مستقل بودن این دو پیشامد، داریم :

الف) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = ۰/۶ \times ۰/۸ = ۰/۴۸$

ب) $P(A' \cap B') = P(A')P(B') = ۰/۴ \times ۰/۲ = ۰/۰۸$

پ) $P(A' \cap B) = P(A')P(B) = ۰/۴ \times ۰/۸ = ۰/۳۲$

۷ با توجه به مستقل بودن پرتاب سکه با پرتاب دو تاس، داریم :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۷۲}$$

۸ با فرض اینکه پاسخ دادن به سؤالات مختلف، مستقل از یکدیگر است، داریم :

الف)

$$P(A)=\frac{۱}{۵}\times\cdots\cdots\times\frac{۱}{۵}=(\frac{۱}{۵})^{۱۰}$$

ب)

$$P(B)=\frac{۱}{۵}\times\cdots\cdots\times\frac{۱}{۵}\times\frac{۴}{۵}\times\cdots\cdots\times\frac{۴}{۵}=(\frac{۱}{۵})^{۵}(\frac{۴}{۵})^{۵}$$

پ)

$$P(C)=\binom{۱۰}{۵}(\frac{۱}{۵})^{۵}(\frac{۴}{۵})^{۵}$$

۹ انتخاب مهره‌ها با جای‌گذاری است، پس مستقل از یکدیگرند، بنابراین

الف)

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

$$P(C)=۱-P(C')=۱-\frac{۴}{۶}\times\frac{۴}{۶}=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}$$

پ) $P(D)=P$ (دو مهره قرمز یا دو مهره آبی) $=P$ (دو مهره قرمز) $+P$ (دو مهره آبی)

$$=\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۶}+\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۳}{۳۶}$$

۱۰ الف)

$$P(A)=\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۲}{۱۱}\times\frac{۱}{۱۰}$$

ب)

$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۹}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۱}\times\frac{۷}{۱۰}$$

۱۱ انتخاب افراد از یک جامعه پرجمعیت صورت می‌گیرد، پس آنها را مستقل می‌گیریم و داریم :

$$P(A)=\frac{۱}{۱۰}\times\cdots\cdots\times\frac{۱}{۱۰}=(\frac{۱}{۱۰})^{۱۰}$$

۱۲ با توجه به اینکه $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ ، پس $۰/۰۴=P(A)-۰/۱$ بنابراین $P(A)=۰/۱۴$. همچنین $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ ، پس $۰/۱۴\times P(B)=۰/۱$ و $P(B)=۰/۷۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین :

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=۰/۱۴+۰/۲۹-۰/۰۴=۰/۳۹$$

نمونه سؤالات ارزشیابی (درس چهارم)

۱ اگر A و B پیشامدهای مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل‌اند.

الف) A و B'

ب) A' و B'

۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B ناسازگار باشند، آن‌گاه A و B وابسته‌اند.

ب) اگر A و B مستقل باشند، آن‌گاه A و B ناسازگارند.

۳ محسن تصور می‌کند که اگر در پرتاب‌های زیاد یک سکه، همگی رو دیده شود، در پرتاب بعدی احتمال پشت دیده شدن، بیشتر از رو است. آیا با تصور محسن موافق هستید؟ چرا؟

۴ دو تاس به‌طور هم‌زمان پرتاب می‌شوند، اگر A پیشامد این باشد که تاس اول ۳ بیاید و B پیشامد مجموع دو تاس ۵ و C مجموع دو تاس ۷، آیا A و B مستقل‌اند؟ A و C چطور؟

۵ در یک آزمایش، عددی به تصادف را از مجموعه $\{۱,۲,......,۱۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A، B و C به ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیری عدد انتخاب شده بر ۲، ۳ و ۵ باشند، نشان دهید که :

الف) A و B وابسته‌اند.

ب) A و C مستقل‌اند.

۶ یک عقربه حول مرکز یک دایره که محیط آن به سه ناحیه A، B و C تقسیم شده است، می‌تواند بچرخد. در یک بازی، عقربه را چرخانده و بسته به اینکه عقربه در ناحیه A، B یا C توقف

کند، اعداد ۱، ۲ یا ۳ به بازیکن تعلق می‌گیرد. اگر دوبار عقربه را بچرخانیم و E، F و G به ترتیب پیشامدهای تعلق عدد ۱ درچرخش اول، مجموع ۳ در دوبار چرخش و مجموع ۴ در دوبار چرخش باشند، نشان دهید که

الف) E و G مستقل‌اند.

ب) E و F وابسته‌اند.

۷ ظرف I شامل ۵ مهره سفید و ۸ مهره سیاه و ظرف II شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. از هر جعبه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر A پیشامد همرنگ بودن دو مهره و B پیشامد سفیدبودن حداقل یک مهره باشد، آیا A و B مستقل‌اند؟

۸ دو تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه در پرتاب اول مضرب ۳ و در پرتاب دوم مضرب غیر ۳ دیده شود، چقدر است؟

۹ خانواده‌ای دارای چهار فرزند است و می‌دانیم که دو فرزند آخر آنها دختر است. احتمال آنکه دو فرزند اول آنها نیز دختر باشند، چقدر است؟

۱۰ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B-A)=\frac{۱}{۲}$ ، حاصل $P(B)$ را به‌دست آورید.

۱۱ دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند و $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B-A)=\frac{۱}{۴}$ ، حاصل $P(A\cap B)$ را به‌دست آورید.

۱۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(B-A)=\frac{۱}{۵}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ ، حاصل $P(A\cup B)$ را به‌دست آورید.

۱۳ خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است. احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) هر پنج فرزند، پسر باشند.

ب) دقیقاً یک فرزند، پسر باشد.

ج) فرزند اول و آخر پسر باشند.

د) حداقل دو فرزند پسر باشند.

۱۴ در یک فروشگاه بزرگ، مشاهده شده است که تقریباً ۲۵٪ افراد داخل فروشگاه خرید می‌کنند. اگر در یک زمان معین، ۵ نفر داخل فروشگاه باشند، مطلوب است احتمال اینکه،

الف) هر پنج نفر خرید کنند.

ب) دقیقاً یک نفر از آنها خرید کند.

ج) یک یا دو نفر خرید کنند.

۱۵ ۲۰ درصد مردم شهری روزنامه مطالعه می‌کنند. ۴ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال هر یک از پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) هر چهار نفر روزنامه مطالعه کنند.

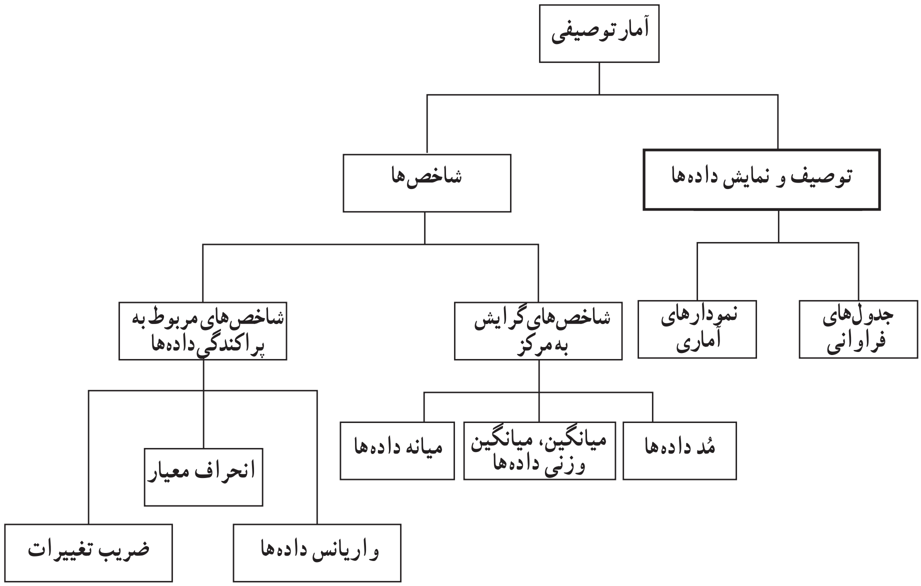
ب) دقیقاً ۳ نفر روزنامه مطالعه کنند.

ج) حداکثر یک نفر روزنامه مطالعه کند.

فصل سوم

آمار توصیفی

نقشه مفهومی فصل سوم



نگاه کلی به فصل

در این فصل که شامل سه درس است به موضوع آمار توصیفی پرداخته شده است. دانش‌آموزان با موضوع آمار توصیفی از کلاس دوم دبستان آشنایی داشته و بعضی مفاهیم آمار توصیفی را یادگرفته‌اند در مواردی همچون دسته‌بندی داده‌های آماری و رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای مطالبی را یادگرفته‌اند. همچنین آنها در سال ششم و هفتم با رده‌بندی کردن داده‌ها و رسم نمودار بافت نگاشت آشنا شده‌اند و در سال هشتم با مفهوم فراوانی در جدول‌های فراوانی مطالبی را خوانده‌اند. در همین سال با میانگین داده‌ها و نحوهٔ محاسبهٔ آن مطالبی را فرا گرفته‌اند. در سال دهم با مفهوم آمار، علم آمار و همچنین کاربردهای علم آمار آشنا شده و مفاهیم متغیرها و انواع آنها را آموخته‌اند با مفهوم جامعه، نمونه، حجم جامعه و حجم نمونه و غیره آشنا شده و اصطلاحات آماری را در جهت بالابردن سواد آماری فرا گرفته‌اند.

اما در کتاب آمار و احتمال سال یازدهم در فصل سوم، مطالب تکمیلی از آمار توصیفی را می‌آموزند.

در درس اول این فصل، که جنبه یادآوری برای دانش‌آموزان را نیز دارد با مفهوم فراوانی نسبی در جدول‌های آماری (جدول‌های فراوانی) آشنا می‌شوند. و درس دوم شاخص‌های گرایش به مرکز بیان می‌گردد که در این درس میانگین موزن داده‌ها مطلب جدیدی است که دانش‌آموزان آن را فرا می‌گیرند. همچنین مفهوم چارک اول و چارک سوم به همراه میانه داده‌ها بیان می‌شود، مد داده‌ها به عنوان آخرین شاخص گرایش به مرکز برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود در پایان این درس نکتهٔ حائز اهمیت استفادهٔ این سه شاخص گرایش (میانگین، میانه و مد) در کاربردهای روزمرهٔ زندگی است. دانش‌آموز می‌آموزد که این سه شاخص در همه حال می‌بایست مورد محاسبه قرار دهد ولی با توجه به هدفی که دنبال می‌کند می‌تواند حداقل یکی از این شاخص‌ها را مورد استفاده قرار دهد. در این قسمت مثال‌های متنوعی بیان شده است. در درس سوم علاوه بر یادآوری شاخص گرایش به پراکندگی انحراف معیار و واریانس داده‌ها شاخص ضریب تغییرات داده‌ها به‌عنوان مطلب جدید در این فصل معرفی می‌گردد. دانش‌آموزان با نمودار جعبه‌ای و کاربردهای آن آشنا می‌شوند.

دانستنی‌هایی برای معلم

نکته حائز اهمیت در این فصل، آن است که دانش‌آموز علاوه بر فراگیری رسم نمودارها، به توانایی تحلیل نمودارهای آماری برسد و همچنین کاربردهای علم آمار را که در این فصل به‌عنوان خواندنی مطرح شده است به‌خوبی بیاموزد. این کاربردهای هوشمندانه در این فصل قرار داده شده است. به‌ویژه کاربرد علم آمار در تفسیر تصاویر مغزی را می‌توان اشاره نمود. دانش‌آموز با معدل گرفتن از دو شکل می‌تواند به شکل جدیدی برسد. همچنین در تمرین‌های این فصل (تمرین ۷، صفحه ۸۲) یک بیت شعر آمده است دانش‌آموز یاد می‌گیرد که می‌تواند برای یک بیت شعر تولید داده و به توصیف و نمایشی آن اعداد بپردازد.

سعی شده است تصویر شاداب و خلاقانه‌ای از آمار توصیفی در این فصل ارائه شود. ذهن دانش‌آموز، با اعداد و ارقام خسته نمی‌شود و با استفاده در تکنیک‌های اینفوگرافی سعی شده است دانش‌آموز اعداد و ارقام را در قالب تصاویر حس کند.

منابع

۱ آمار و احتمال مهندسی/ نادر نعمت‌الهی/ ققنوس
۲ آمار و احتمال مقدماتی/ مجتبی گنجعلی و احسان بهرامی سامانی/ نگارنده دانش
۳ آمار و احتمال مقدماتی/ جواد بهبودیان/ دانشگاه امام رضا
۴ آمار مقدماتی/ رونالدوناکات ــ وناکات/ ترجمه محمدرضا شکانی/ مرکز نشر دانشگاهی

درس اول : توصیف و نمایش داده‌ها

اهداف

۱ یادآوری وتکمیل مفاهیم مربوط به توصیف و نمایش داده‌ها

۲ یادآوری دانش‌آموزان با رسم نمودارهای آماری مانند نمودار میله‌ای و نمودار دایره‌ای برای متغیرهای گسسته و نمودار بافت نگاشت برای متغیر پیوسته

۳ آشنا شدن دانش‌آموزان با تحلیل نمودارهای آماری

۴ آشنا شدن دانش‌آموزان با مفهوم فراوانی نسبی داده‌ها

روش تدریس

این درس با یادآوری مفاهیم مربوط به آمار توصیفی مانند توصیف و نمایش داده‌ها آغاز می‌شود. اولین فعالیت در صفحه ۷۴ فعالیت مربوط به یک راننده تاکسی است که می‌خواهد اسکناس‌های کیف خود را دسته‌بندی کند. از آن‌جایی که تعداد اسکناس‌ها یک متغیر گسسته است و همچنین با ایجاد یک اینفوگرافی از اسکناس‌ها، دانش‌آموز وادار می‌شود که اسکناس‌ها را بشمرد. برای دسته‌بندی اسکناس‌ها در این فعالیت قدم به قدم کارهایی از دانش‌آموز خواسته می‌شود. دانش‌آموز در مرحله سوم این فعالیت تعداد هر اسکناس را بر تعداد کل اسکناس‌ها تقسیم می‌کند؛ درواقع با این‌کار به‌صورت ناخودآگاه فراوانی نسبی هر اسکناس را محاسبه می‌نماید. در ادامه این فعالیت به‌دلیل گسسته بودن متغیر تعداد اسکناس‌ها، نمودار میله‌ای اسکناس‌ها توسط دانش‌آموز با قرار دادن ۲ و ۱۰ به‌عنوان اسکناس‌های ۲ هزار تومانی و ۱۰ هزارتومانی روی هم، تکمیل می‌گردد. همچنین نمودار مربوط به فراوانی نسبی تعداد اسکناس‌ها نیز کامل می‌شود.

در ادامه این فعالیت در صفحه ۷۶، قسمت ۳، به‌دنبال تحلیل نمودارهای رسم شده هستیم. دانش‌آموز می‌بایست تحلیل کردن این نمودارها را بیاموزد. در قسمت ۴، نمودار دایره‌ای و نحوهٔ رسم آن مرور گردیده است.

در کادر این صفحه مفاهیم داده‌ها، متغیر، مقدار متغیر و فراوانی داده‌ها یادآوری شده است و مفهوم جدید فراوانی نسبی یک داده و درصد داده بیان می‌شود.

در کار در کلاس این صفحه، مطالب با اینفوگرافی تعداد مسافران بیان شده است و دانش‌آموز با تکمیل جدول فراوانی و نمودار میله‌ای تمرین مناسبی را انجام می‌دهد.

در فعالیت صفحه ۷۸، دانش‌آموز با توصیف و نمایش داده‌ها و متغیرهای پیوسته آشنا می‌شود. مسئلهٔ آلودگی هوا و شاخص کیفیت هوا (AQI) به‌عنوان یک متغیر پیوسته آشنا می‌گردد. مطالب خواندنی در این فصل در مورد آلودگی هوا و انواع آلاینده‌ها بیان می‌شود. در ادامه این فعالیت فراوانی نسبی مربوط به جدول فراوانی تعداد روزهای پاک، سالم و ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک توسط دانش آموز تکمیل می‌گردد. در ادامه نیز دانش‌آموز به تکمیل نمودار میله‌ای پرداخته و در ادامه نمودار فراوانی نسبی را رسم می‌کند. و در انتهای این فعالیت سؤالاتی مطرح می‌شود که دانش‌آموز به تحلیل نمودارهای رسم شده (نمودار میله‌ای و نمودار فراوانی نسبی) می‌پردازد.

در کار در کلاس صفحه ۸۰، متغیر پیوسته قد دانش‌آموزان مطرح شده و مشابه فعالیت قبل عمل می‌شود.

درس دوم : معیارهای گرایش به مرکز

اهداف

۱ یادآوری معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین داده‌ها و میانه داده‌ها

۲ آشنا شدن دانش‌آموز با مفهوم میانگین موزون داده‌ها

۳ آشنا شدن دانش‌آموز با مفهوم مد یا نما داده‌ها، چارک اول و چارک سوم

۴ آشنا شدن دانش‌آموز با نحوهٔ استفاده از سه شاخص گرایش به مرکز میانگین، میانه و مد داده‌ها

روش تدریس

این درس با فعالیت صفحه ۸۴ آغاز می‌شود. در این فعالیت دانش‌آموز برای تعیین میزان محصولات گردو، با جدولی که شامل چهار نوع درخت گردو و میزان محصولات آن است روبه‌رو می‌گردد. در ابتدای این فعالیت، دانش‌آموز میانگین تعداد گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت را محاسبه می‌کند. سپس با جدول دیگری روبه‌رو می‌شود. در این جدول، اطلاعات تعداد درخت‌ها اضافه شده است، در ادامه این فعالیت در صفحه ۸۵، قسمت ب، از دانش‌آموز سؤال می‌شود که آیا باز هم می‌توان میانگین تعداد گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت را به شیوهٔ قبلی محاسبه کرد. در اینجاست که دانش‌آموز با مفهوم میانگین موزون آشنا می‌شود.

در کادرهای این صفحه با مجموع داده‌ها و نماد $\sum_{i=۱}^{n} X_i$ آشنا شده و فرمول‌های مربوط به میانگین و میانگین موزون داده‌ها بیان می‌شود.

در کار در کلاس این صفحه، مثالی ملموس از کنکور سراسری مطرح شده که نتیجه کارنامهٔ آزمون دانش‌آموزی مشخص گردیده است.

دانش‌آموز تمرین مناسبی برای محاسبه میانگین موزون در این قسمت انجام می‌دهد.

در ادامه معرفی معیارهای گرایش به مرکز در صفحه ۸۶، فعالیتی مطرح شده است که مفهوم میانه داده‌ها را بیان می‌کند و همچنین در پایان این صفحه در کادر موردنظر، مفاهیم میانه چارک اول و چارک سوم بیان می‌شود.

در صفحه ۹۷، با نشان دادن یک فلوچارت نحوهٔ محاسبه میانه داده‌ها به روشنی برای دانش‌آموز شرح داده می‌شود و در ادامه در کار در کلاس در مورد تراکنش مالی و مفاهیم مربوط به آن مطالب خواندنی قرار داده شده است و دانش‌آموز در این کار در کلاس تمرین مناسبی در به‌دست آوردن میانه داده‌ها، چارک اول و سوم انجام می‌دهد.

در صفحه ۸۸، فعالیتی بیان شده که مفهوم مد یا نمای داده‌ها را بیان می‌کند. صورتک‌هایی قرار دارد که دانش‌آموز باید جدول موردنظر را کامل کند.

در کادر این صفحه مفهوم مد و نمای داده‌ها بیان شده است.

در انتهای این صفحه کار در کلاسی در مورد مسابقه پرتاب دارت مطرح شده است که دانش‌آموز تمرین مناسبی در به‌دست آوردن مد یا نمای داده‌ها انجام می‌دهد.

در صفحه ۸۹ کار در کلاس دیگری مطرح شده است که به دنبال انتخاب معیار مناسب برای معیارهای میانگین، میانه و مد داده‌هاست. در این کار در کلاس دو کارخانه تولید لامپ درنظر گرفته شده است و در جدول مربوط به طول عمر لامپ‌های تولید شده توسط این دو کارخانه اطلاعاتی قرار دارد. سؤالاتی مطرح شده است که هر کدام هدفی را دنبال می‌کند. دانش‌آموز می‌بایست براساس هریک از اهداف سؤالات معیار مناسب گرایش به مرکز را انتخاب کند و در انتها دو کادر قرار گرفته است که در کادر اول مفهوم دادهٔ دورافتاده بیان شده و در کادر دوم به‌وضوح استفاده هر سه معیار میانگین، میانه و مد داده‌ها براساس هدف مورد بررسی بیان شده است.

درس سوم : معیارهای پراکندگی

اهداف

۱ یادآوری مفهوم انحراف معیار و واریانس داده‌ها

۲ آشنا شدن دانش‌آموز با مفهوم ضریب تغییرات داده‌ها

۳ آشنا شدن دانش‌آموز با نمودار جعبه‌ای

۴ آشنا شدن با نرخ تورم و نرخ بیکاری در جهت بالا رفتن سواد آماری دانش‌آموز

روش تدریس

این درس با فعالیت صفحه ۹۳ آغاز شده است. در این فعالیت صحبت از مفهوم نرخ تورم شده است.

یکی از اقلام مصرفی مورد استفاده در محاسبه نرخ تورم، قیمت گوشت قرمز است.

در این فعالیت از قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران صحبت به عمل آمده است. دانش‌آموز ابتدا با محاسبه میانگین قیمت گوشت قرمز و سپس با تکمیل نمودار مربوط به قیمت گوشت قرمز پراکندگی قیمت گوشت قرمز را حول خط مربوط به میانگین قیمت گوشت قرمز حس می‌کند.

در صفحه ۹۴ در کادر نحوه به‌دست آوردن فرمول انحراف معیار بیان می‌شود و ویژگی‌های مربوط به انحراف معیار برای دانش‌آموز شرح داده می‌شود.

در کار در کلاس صفحه ۹۵، دانش‌آموز به دنبال پیاده کردن اعداد مربوط به قیمت گوشت قرمز در فرمول انحراف معیار و واریانس داده‌ها است که این کار را قدم به قدم انجام می‌دهد. در انتهای این صفحه خواندنی مهمی قرار داده شده است.

در این خواندنی دانش‌آموز با مفهوم نرخ تورم آشنا شده و نحوه محاسبهٔ آن بیان می‌گردد. دانستن این مفهوم، باعث افزایش سواد آماری در دانش‌آموزان می‌گردد.

در صفحه ۹۶، مفهوم جدیدی تحت عنوان ضریب تغییرات داده‌ها بیان می‌گردد.

فعالیتی در این باره طرح شده است. در این فعالیت اطلاعات مربوط به طول عمر لاستیک‌های دو کارخانه الف و ب مطرح شده است و سؤالاتی چالش برانگیز برای دانش‌آموز مطرح می‌شود.

دانش‌آموز حس می‌کند که دیگر میانگین و انحراف معیار به تنهایی نمی‌تواند پاسخ سؤالات مطرح شده را دهد و به‌صورت ناخودآگاه به سمت مفهوم ضریب تغییرات سوق داده می‌شود. در کادر آخر صفحه مفهوم ضریب تغییرات و ویژگی‌های آن بیان می‌گردد.

در صفحه ۹۷، کار در کلاسی قرار دارد که ادامه اطلاعات فعالیت است. در این کار در کلاس دانش‌آموز تمرین مناسبی برای به‌دست آوردن ضریب تغییرات انجام می‌دهد. در قسمت ب این کار در کلاس دانش‌آموز می‌آموزد که تغییر واحد اندازه‌گیری در ضریب تغییرات اثری نخواهد داشت.

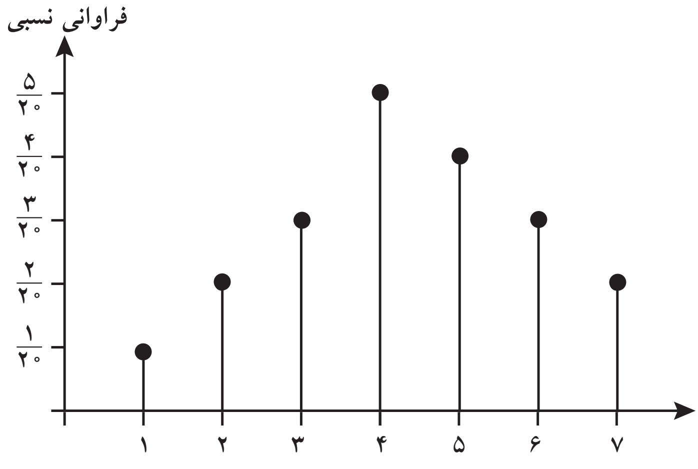
در انتهای این صفحه دانش‌آموز، با مفهوم و رسم نمودار جعبه‌ای آشنا می‌شود. در صفحه۹۸ در کادر موجود این نمودار و نحوه رسم آن شرح داده می‌شود.

در انتهای این فصل دانش‌آموز با نرخ بیکاری در یک خواندنی آشنا می‌گردد که آموختن این موضوع باعث بالا رفتن سواد آماری دانش‌آموزان می‌گردد.

حل تمرینات درس اول

تمرین

۱ داده‌های زیر، مسافتی را که ۲۰ راننده از مکان‌های مختلف برای رسیدن به مقصد A طی می‌کنند نشان می‌دهد. این داده‌ها، در جدول زیر گردآوری شده است. جدول را کامل کرده و نمودار بافت نگاشت مربوطه را رسم کنید.



دسته‌ها	کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است	فراوانی	فراوانی نسبی
۱	از ۵/۵ کیلومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر	۱	$\frac{۱}{۲۰}$
۲	از ۱۰/۵ کیلومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر	۲	$\frac{۲}{۲۰}$
۳	از ۱۵/۵ کیلومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر	۳	$\frac{۳}{۲۰}$
۴	از ۲۰/۵ کیلومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر	۵	$\frac{۵}{۲۰}$
۵	از ۲۵/۵ کیلومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر	۴	$\frac{۴}{۲۰}$
۶	از ۳۰/۵کیلومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر	۳	$\frac{۳}{۲۰}$
۷	از ۳۵/۵کیلومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر	۲	$\frac{۲}{۲۰}$
	مجموع	۲۰	

۲ رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است : ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز و ۵ نفر سایر رنگ‌هاست. چه نمودارهایی می‌توان برای این اعداد رسم کرد. آن نمودارها را رسم کنید؟

نمودار میله‌ای ☐ نمودار دایره‌ای ☐ هر دو ☑

۳ جملات زیر را کامل کنید :

الف) برای متغیّرهای پیوسته از نمودار بافت نگاشت استفاده می‌شود.

ب) برای متغیّرهای گسسته از نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای استفاده می‌شود.

پ) برای متغیّرهای کیفی از نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای استفاده می‌شود.

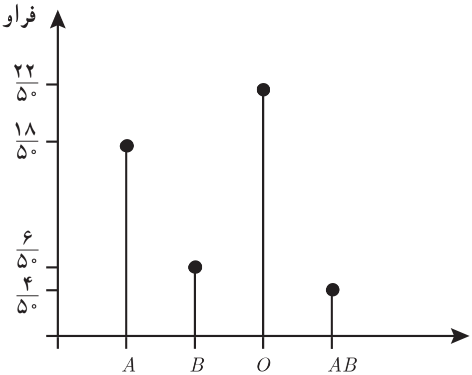
۴ گروه خونی ۵۰ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به صورت زیر گردآوری شده‌اند :

الف) جدول فراوانی مربوط به گروه خونی این افراد را رسم کنید. ب) نمودار میله‌ای مربوط

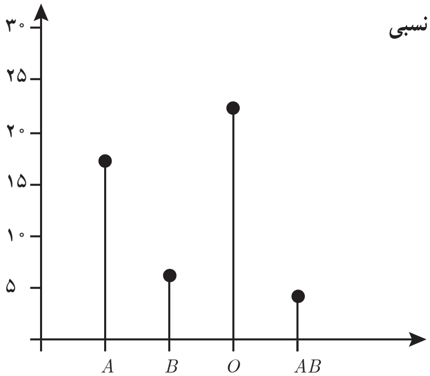
به فراوانی و فراوانی نسبی و همچنین نمودار دایره‌ای مربوط به این افراد را رسم کنید؟ پ) چند درصد افراد، دارای گروه خونی O هستند؟

O	A	A	O	O
O	A	B	O	B
AB	B	A	B	AB
O	A	A	O	O
A	B	A	O	AB
A	O	A	A	O
A	AB	O	A	O
O	A	A	B	O
O	A	O	O	O
O	A	O	A	O

گروه خونی	فراوانی	فراوانی نسبی
A	۱۸	$\frac{۱۸}{۵۰}$
B	۶	$\frac{۶}{۵۰}$
O	۲۲	$\frac{۲۲}{۵۰}$
AB	۴	$\frac{۴}{۵۰}$
	۵۰	



نمودار فراوانی نسبی



نمودار میله‌ای

$۱۰۰ \times \frac{۲۲}{۵۰}$ = درصد افرادی که دارای گروه خونی O هستند

۵ اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی O، ۰/۴ باشد و مجموع فراوانی‌های همهٔ گروه‌های خونی برابر ۲۰ در نظر گرفته شود. فراوانی گروه خونی O چه عددی است؟

$\frac{\text{فراوانی}}{\text{تعداد کل افراد}}$ = فراوانی نسبی $\Rightarrow$ ۰/۴ = فراوانی نسبی گروه خونی O و ۲۰ = $\sum_{i=1}^{n} f_i$ = تعداد افراد

$۰/۴ = \frac{\text{فراوانی}}{۲۰} \Rightarrow$ فراوانی = ۲۰×۰/۴

۶ نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهدکودک به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این نمودار، به سؤالات زیر پاسخ دهید؟

۲ + ۳ + ۱۳ + ۴۲ + ۵۸ + ۴۰ + ۳۱ + ۸ +۲ + ۱ = ۲۰۰

الف) تعداد کلّ کودکان که نمرهٔ IQ آنها، مورد بررسی قرار گرفته است، چند نفر است؟

ب) نمرهٔ IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

[۱۱۰, ۱۰۰] بیشترین / [۱۶۰ , ۱۵۰] کمترین

پ) چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین ۱۴۰ تا ۱۶۰ هستند؟

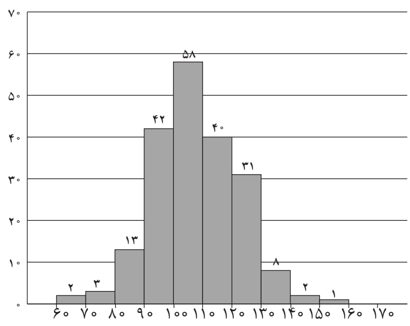
$\frac{۳}{۲۰۰} = ۰/۰۱۵$

ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید.

فراوانی نسبی	فراوانی	جدول فراوانی
$\frac{۲}{۲۰۰}$	۲	۶۰ـ۷۰
$\frac{۳}{۲۰۰}$	۳	۷۰ـ۸۰
$\frac{۱۳}{۲۰۰}$	۱۳	۸۰ـ۹۰
$\frac{۴۲}{۲۰۰}$	۴۲	۹۰ـ۱۰۰
$\frac{۵۸}{۲۰۰}$	۵۸	۱۰۰ـ۱۱۰
$\frac{۴۰}{۲۰۰}$	۴۰	۱۱۰ـ۱۲۰
$\frac{۳۱}{۲۰۰}$	۳۱	۱۲۰ـ۱۳۰
$\frac{۸}{۲۰۰}$	۸	۱۳۰ـ۱۴۰
$\frac{۲}{۲۰۰}$	۲	۱۴۰ـ۱۵۰
$\frac{۱}{۱۰۰}$	۱	۱۵۰ـ۱۶۰
	۰	۱۶۰ـ۱۷۰

۷ جدول فراوانی و نمودارهای مناسب مربوط به تعداد حروف بیت شعر زیر را به‌دست آورید؟

کیست این پنهان مرا در جان و تن　　　　کز زبان من همی گوید سخن[۱]



۱ــ این بیت شعر از کتاب گنجینة‌الاسرار عمان سامانی است.

حروف	فراوانی	فراوانی نسبی
ک	۲	$\frac{۲}{۴۱}$
ی	۴	$\frac{۴}{۴۱}$
س	۲	$\frac{۲}{۴۱}$
ت	۲	$\frac{۲}{۴۱}$
ا	۵	$\frac{۵}{۴۱}$
ن	۷	$\frac{۷}{۴۱}$
پ	۱	$\frac{۱}{۴۱}$
م	۳	$\frac{۳}{۴۱}$
د	۲	$\frac{۲}{۴۱}$
ر	۲	$\frac{۲}{۴۱}$
ج	۱	$\frac{۱}{۴۱}$
ز	۱	$\frac{۱}{۴۱}$
ب	۱	$\frac{۱}{۴۱}$
هـ	۲	$\frac{۲}{۴۱}$
گ	۱	$\frac{۱}{۴۱}$
س	۲	$\frac{۲}{۴۱}$
خ	۱	$\frac{۱}{۴۱}$
و	۲	$\frac{۲}{۴۱}$
	۴۱	

حل تمرین درس دوم

تمرین

۱ تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش مسابقه گذشته به صورت ۴۳، ۴۲، ۴۵، ۴۴، ۴۵ و ۴۸ است.

میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی گذشته را به دست آورید؟

$$\bar{x}=\frac{۴۳+۴۲+۴۵+۴۴+۴۵+۴۸}{۶}=۴۴/۵$$

۲ بالاترین دما در هریک از روزهای هفته گذشته اندازه‌گیری شده و نتایج زیر به دست آمده است. معدل یا میانگین دما در هفتهٔ گذشته چه عددی است؟

۲۹، ۳۱، ۲۸، ۳۲، ۲۹، ۲۷، ۵۵

$$\bar{x}=\frac{۵۵+\cdots+۲۹}{۷}$$

۳ میانه و مد هر یک از داده‌های زیر را به دست آورید؟

الف) ۹، ۹، ۹، ۹، ۸، ۹	ب) ۳۰۰، ۲۴، ۴۰، ۵۰، ۶۰	پ) ۱۰، ۳، ۸، ۱۵

ت) ۴، ۶، ۹، ۱۲، ۵	ث) ۲۳، ۱۲، ۱۲، ۲۳	ج) ۷، ۱۳، ۴، ۷

الف) ۹ = مد   ۹ = میانه

ب) ندارد= مد   ۵۰ = میانه

پ) ندارد = مد $\frac{۸+۱۵}{۲}$ = میانه

ت) ندارد = مد $\frac{۶+۹}{۲}$ = میانه

ث) ۱۳ و ۱۲ = مد $\frac{۱۲+۱۳}{۲}$ = میانه

ج) ۷ = مد   ۷ = میانه

۴ نمودار زیر، نمودار میله‌ای مربوط به تعداد ضربات پنالتی گل شده یک بازیکن در شش جلسهٔ تمرین پنالتی است. با توجه به نمودار، میانگین، میانه و مد تعداد ضربات گل شده را به دست آورید؟

تعداد ضربات	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فراوانی	۴	۲	۳	۱	۱	۵

$$\text{میانگین} = \frac{۱۶}{۶} = ۲/۶۶$$

$$\text{مد} = ۵$$

$$\text{میانه} = \frac{۲+۳}{۲} = ۲/۵$$

۵ در جدول صفحه بعد، نمرات درس ریاضی ۱۰ دانش‌آموز گردآوری شده و میانگین نمرات داده شده است. علامت‌های سؤال چه اعدادی‌اند؟

$$۱۵/۶۵ = \frac{۱۷/۵+۱۹+۱۷+۱۶+۲۰+۱۶+۱۵+۱۸+۱۸+?}{۱۰}$$

$$? = \frac{۱۵۶/۵}{۱۵/۶} = ۱$$

نمرات درس ریاضی	۲۰	۱۶	۱۷	۱۹	۱۷/۵
	۱۸	؟	۱۸	۱۵	۱۶
میانگین نمرات = ۱۵/۶۵ **مد نمرات = ۱۸ و ۱۶ دو مدی**					

۶ داده‌های زیر مدت زمان مطالعهٔ یک دانش‌آموز را در روزهای هفته نشان می‌دهد.

روزهای هفته	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه
مدت زمان مطالعه (ساعت)	۲	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۲	۳	۳

این دانش‌آموز به طور میانگین چند ساعت در روز، در هفتهٔ گذشته مطالعه کرده است؟

$$\bar{x} = \frac{۲+۱/۵+۲/۵+۱/۵+۲+۳+۳}{۷}$$

۷ یک شرکت بیمه برای تعیین حقّ بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به دست آمده است در صورتی که میانه و مد آن برای این خسارت‌های پرداخت شده برابر ۴۲/۲

میلیون ریال و عدد ۹۰ میلیون ریال می‌باشد. به نظر شما مدیر شرکت، کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حقّ بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا اینکه این شرکت ضرر نکند؟

$۸۵ = \bar{x} =$ میانگین را انتخاب می‌کند

۴۲/۲ = میانه

۹۰ = مد

۸ دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجهٔ کارنامه آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۵۳	۲۰	۶۷	۳۴	۸۰	۶۷
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

اگر معدل موزون درصد این دانش‌آموز ۵۶ باشد، درس فیزیک را چند درصد زده است؟

$\bar{x} = ۵۶$

$$= \frac{۶۷\times ۳ + ۸۰\times ۴ + ۳۴\times ۱ + ۶۷\times ۱ + ۳\times k + ۵۳\times ۴}{۱۶} \Rightarrow K = ۲۰$$

۹ میانگین ۵ دادهٔ آماری ۱۷ است، اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟

$$\bar{x} = ۱۷ = \frac{\sum x_i}{۵}$$

$\sum x_i = ۱۷ \times ۵$

$\sum x_i = ۱۷ \times ۵ + ۱۷ + ۱۱ = ۱۱۳$ جدید

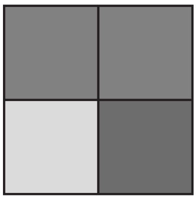
$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{۱۱۳}{۷} = ۱۶/۱$

۱۰ دو دانش‌آموز، جدول‌های چهارخانه‌ای را به صورت زیر رنگ‌آمیزی کرده‌اند، بر اساس جدول مربوط به طیف رنگ‌ها، جدول عددی این دو شکل به صورت زیر نشان داده شده است :

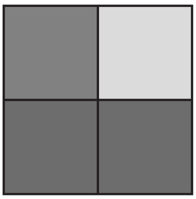
حال جدول عددی مربوط به این دو شکل را ابتدا با هم جمع و سپس هریک از اعضای جدول عددی را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم. جدول عددی حاصل را به دست آورده و شکل مورد نظر را با توجه به جدول طیف رنگ‌ها، به دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل زیر است؟

برای پاسخ به این سؤال، کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حاشیه نشان داده شده است.

رنگ‌ها	طیف رنگ‌ها
	۴۵۰ تا ۴۹۵
	۴۹۵ تا ۵۷۰
	۵۷۰ تا ۵۹۰
	۵۷۰ تا ۶۲۰
	۶۲۰ تا ۷۵۰



$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۴۷۰ \\ ۵۸۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۸۰ \\ ۶۹۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$

$$\text{معدل} = \begin{pmatrix} \frac{۴۷۰+۴۷۰}{۲} & \frac{۵۸۰+۴۷۰}{۲} \\ \frac{۶۹۰+۵۸۰}{۲} & \frac{۶۹۰+۶۹۰}{۲} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۲۵ \\ ۶۲۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$

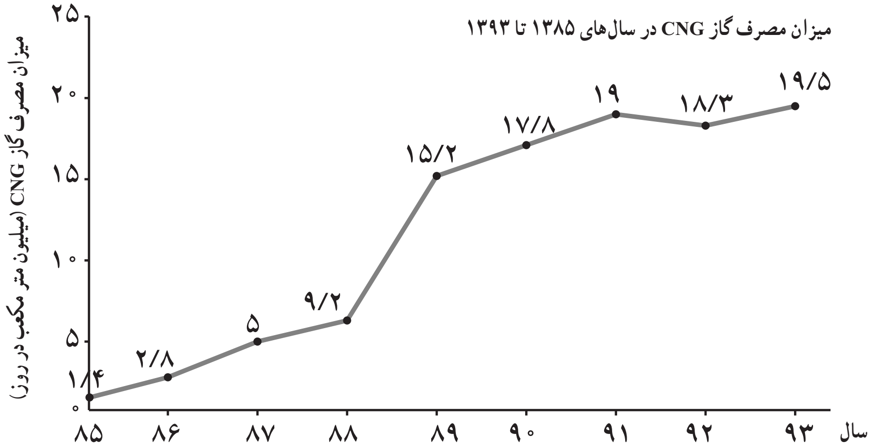
تمرین

۱ فرض کنید سنّ افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند، به صورت زیر است :

۳۲،۵۹،۲۶،۵۳،۷۴،۱۷،۴۵،۲۳،۶۴،۵۰،۶۱

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سنّ افراد را به دست آورید.

۲ نمودار زیر میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز CNG از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ را به دست آورید.



۳ انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد جدول زیر به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
۱۰۰ ، ۱۲ ، ۸ ،۱۶ ،۱۰ ، ۴ ، ۷			
۱- ، ۲- ، ۳- ، ۰ ، ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳			
۱۰/۱۱ ، ۱۱/۳۶ ، ۱۰/۱۱ ۹/۸۸ ، ۹/۴۲ ، ۹/۷۶ ، ۹/۶۲			
۲، ۳۰۰۰ ، ۲۵۰۰ ، ۲۰۰۰			

۴ اعداد دلخواه را در جدول زیر بنویسید و انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات

۵ اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده ۲ باشد و میانگین آن ۴، واریانس داده‌ها را به دست آورید.

۶ اگر n داده را c برابر کنیم ضریب تغییرات داده‌ها چند برابر می‌شود؟

تغییری نمی‌کند

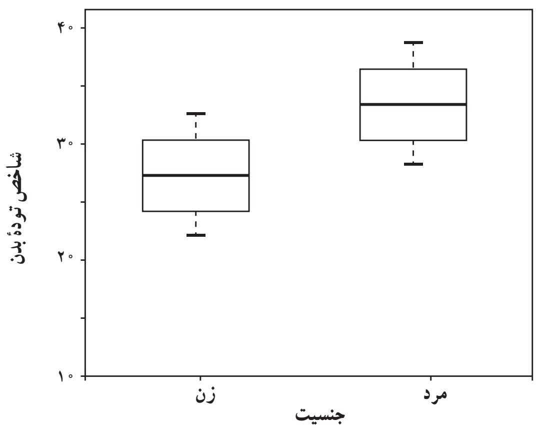
قبلی $c.v = \frac{\cancel{c}\,.\sigma}{\cancel{c}\,\bar{x}} = c.v$ جدید

۷ فرض کنید ۲۲ بوته گل قرمز را انتخاب و تعداد گل‌های هر بوته را شمرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است :

۲ ، ۱ ، ۵، ۵، ۲،۲ ، ۲ ، ۲ ، ۳ ، ۱ ، ۱ ، ۱ ، ۲ ، ۴ ، ۷ ، ۱ ، ۴ ، ۶، ۸، ۳، ۴، ۷

نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم کنید.

۸ نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص تودهٔ بدن (BMI) به تفکیک جنسیت رسم شده است.
این نمودار را تفسیر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.
الف) میانگین شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟ میانگین آقایان بیشتر است.
ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟ میزان پراکندگی برابر است.



۹ داده‌های زیر مربوط به نرخ بیکاری یک کشور در ده سال گذشته است :

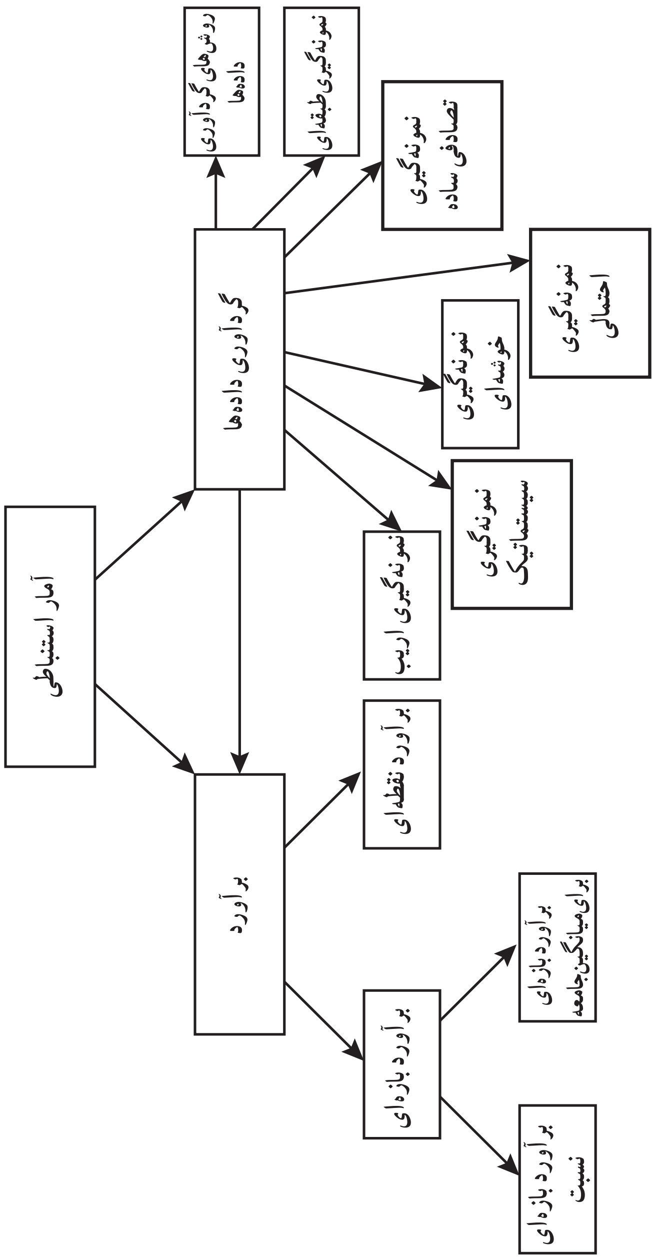
سال	اوّل	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نرخ بیکاری	۱۱/۵	۱۱/۳	۱۰/۵	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۳/۵	۱۲/۳	۱۲/۲	۱۰/۴	۳۰/۱

نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنید.

فصل چهارم

آمار استنباطی

نقشه مفهومی فصل ۴



اهداف فصل استنباط آماری

علوم تجربی نظیر کشاورزی و پزشکی نیازهای اساسی بشر را رفع می‌کنند. در این علوم علی‌رغم اینکه یقین کامل برای حل مسئله وجود ندارد، ولی بسیار کاربردی هستند و مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک پزشک بیماری را ۱۰۰ درصد تشخیص نمی‌دهد و داروی تجویز شده نیز به همین وضعیت دچار است. ولی پزشک بر اساس تجربه حکم به بیماری داده و دارو تجویز می کند و در اکثر موارد نیز نتیجه می گیرد. به عبارت دیگر علوم تجربی مسائلی را با دقت زیادی حل می کنند، ولی روابط به دست آمده را نمی‌توانند به‌صورت ریاضی بیان کنند. علم آمار راهی برای بیان چنین مسائلی است. مردم اغلب آمار را به عنوان معنای قدیمی آن یعنی گردآوری داده‌ها می‌شناسند، ولی علم آمار کاربردهای گوناگونی دارد. در آمار توصیفی راه‌های تلخیص داده‌ها را با معیارهای مختلف و نمودارهای گوناگون بیان و اطلاعات آنها را ساده و قابل استفاده می کند. اوج علم آمار استفاده از علم احتمال برای ابداع آمار استنباطی بوده است. آمار استنباطی استخراج نتایجی بر اساس بخش کوچکی از داده‌ها در یک مسئله است که می‌توان آن را به همه داده‌های آن مسئله تعمیم داد.

چرا آمار استنباطی؟

● آمار توصیفی، داده‌ها یا جامعه را توصیف می‌کند. در حالی که در آمار علاقه‌مند هستیم براساس نمونه درباره پارامتری از جامعه تخمین (برآورد) یا پیش‌بینی ارائه کنیم.

● آمار توصیفی با استفاده از داده‌ها برخی از مشخصه‌های داده‌ها را توصیف می‌کند. حال آنکه ما می‌خواهیم به تحلیل داده‌ها و مشاهدات بپردازیم.

● آمار توصیفی با معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی داده‌ها سرکار دارد. اما پی بردن به صحت یک ادعا در مورد پارامترهایی نظیر گرایش به مرکز با استفاده از داده‌ها موضوعی جذاب‌تر است.

● معیارهای آمار توصیفی مانند میانه، میانگین و مد عدد دقیق هستند، ولی معیارهایی که معمولاً بر اساس تعداد کمی داده به‌دست آمده‌اند همیشه با خطا همراه هستند.

● آمار توصیفی می‌تواند برای داده‌های جامعه بدون داشتن خطا نتیجه‌گیری کند. ولی چون معمولاً جامعه در دسترس نیست این کار دقت لازم را ندارد.

● در آمار توصیفی نمی‌توان نتیجه را به خارج از داده‌های مشاهده‌شده توسعه داد در حالی که هدف اصلی آمار توسعه نتایج به خارج از داده‌های مشاهده‌شده یا اصطلاحاً جامعه است.

با توجه به ۶ دلیل ذکر شده در آمار نیاز به روش‌هایی وجود دارد که بتواند بر اساس تعداد

معدودی داده از یک جامعه بزرگ صحت و سقم یک ادعا در آن جامعه را بررسی و نتیجه بگیرد. از آنجا که آمار توصیفی از انجام این کار عاجز است. آمارشناسان نظریه‌ای را بسط داده‌اند که این کار امکان‌پذیر شود. نام آن را **آمار استنباطی** گذاشته‌اند. به سخنی دیگر آمار استنباطی روش‌های آماری است که بر اساس نمونه‌ای از یک جامعه بتوان در مورد مشخصه‌ای از جامعه که پارامتر می‌نامند نتیجه‌گیری کند. با این مقدمه نقش نمونه در استباط آماری بسیار پررنگ می‌شود. در واقع ترتیب قرار گرفتن درس‌های فصل آخر کتاب نیز به وضوح روشن می‌شود. درس اوّل فصل ۴ به گردآوری داده‌ها و درس دوم آن به دو روش مرسوم استنباط آماری، برآورد و برآورد بازه‌ای یا فاصله اطمینان اختصاص دارد.

استنباط آماری بر اساس نمونه انجام می‌گیرد. ولی نمونه‌ای که برای این کار قابل استفاده است، ساده‌ترین روش نمونه‌گیری، نمونه‌گیری تصادفی ساده است، که استنباط آماری بر اساس آن امکان‌پذیر است. در عمل این روش نمونه‌گیری محدودیت‌های زیادی دارد که معمولاً بر اساس یکی از روش‌های نمونه‌گیری احتمالی رفع می‌شوند. لذا درس اوّل به معرفی انواع نمونه‌گیری‌های احتمالی می‌پردازد. از سوی دیگر در برخی مواقع نمونه گردآوری شده ممکن است ما را به استنباطی غلط در مورد جامعه برساند. برای پرهیز از آن در کتاب به مفهوم نمونه نااریب اشاره شده و در خواندنی پس از آن به شرح یک مثال واقعی که در حال حاضر گریبان‌گیر جامعه است پرداخته شده است.

مفهوم بعدی که در ادامه کار باید با آن آشنا شد این است که چگونه مقادیر داده‌های گردآوری شده را به دست می‌آوریم. بعد از تعریف آمارگیری چهار روش مرسوم به دست آوردن مقادیر داده‌ها در این قسمت کتاب توضیح داده شده است. در واقع با نمونه‌گیری داده‌ها گردآوری می‌شود. ولی هدف اصلی ما اطلاع از مقادیر متغیرهای آنها است. لذا گردآوری داده‌ها شامل نمونه‌گیری و ثبت مقادیر متغیرهای داده‌ها است.

حال زمان استفاده از این اعداد است. لذا به معرفی آماره و پارامتر می‌پردازیم که قبلاً به‌صورت ضمنی با آنها آشنا شده‌اند؛ که اساس درس دوم فصل ۴ را نیز تشکیل می‌دهند. درس اوّل فصل ۴ بسیار ساده است و به سرعت می‌توان آن را درس داد. درس دوم فصل ۴ با وجود آنکه بسیار کوتاه‌تر از درس اوّل است، ولی تدریس آن زمان بیشتری از درس اوّل می‌گیرد. در درس دوم دانش‌آموز نتیجه زحماتی را که در یادگیری مباحث آمار و احتمال کشیده است را خواهد گرفت.

درس اول : گردآوری داده‌ها

فعالیت صفحه ۱۰۴

اهداف

- دلایل استفاده از نمونه‌گیری
- آشنایی با محدودیت‌های بررسی کل جامعه یا سرشماری

تعریف چهار اصطلاح پرکاربرد در آمار : **واحدآماری، جامعه آماری یا جامعه، نمونه و نمونه‌گیری**

بعد از این فعالیت دانش‌آموز این اصطلاح‌ها را برای فعالیت تدریس شده در کار در کلاس تکمیل می‌کند.

- بررسی ویژگی‌های همه جامعه دارای محدودیت‌های زیادی است.
- امکان دسترسی به همه جامعه وجود ندارد.
- زمان لازم برای بررسی جامعه زیاد و هزینه‌بر است.

فعالیت صفحه ۱۰۵

اهداف : آشنایی با انواع نمونه‌گیری بر مبنای احتمال

این فعالیت از چهار بخش تشکیل شده است. صورت مسئله هر چهار بخش یکسان است. یعنی یک مجتمع تجاری با هفت مغازه و یک بخش خدمات تشکیل شده و علاقه‌مند هستیم اطلاعاتی از اعضای جامعه به دست آوریم. در این فعالیت اندازه یا تعداد اعضای جامعه مشخص است. برای سادگی مسئله اندازه جامعه کوچک در نظر گرفته شده است.

در هر بخش از فعالیت یک مسئله انتخاب نمونه مطرح می‌شود که در آخر فعالیت منجر به تعریف یکی از انواع نمونه‌گیری‌های احتمالی می‌شود. در بخش اوّل این فعالیت به دلیل ارتباط تعریف با مباحث درس‌های قبلی تعریف نمونه‌گیری تصادفی ساده قبل از فعالیت آمده است.

فعالیت ۱

دانش‌آموز با مفهوم شانس و شانس برابر در سال‌های قبل آشنا شده است. او در فصل‌های قبل دریافته است که شانس برابر با احتمال برابر یکی است. تأکید این فعالیت بر این است که ضمن آشنایی دانش‌آموز با نمونه‌گیری تصادفی ساده چگونگی انجام آن را نیز یاد بگیرد و با محدودیت‌های روش‌های پیشنهادی کتاب یا خودش آشنا شود. البته راه‌حل کلی این کار در آخرین خواندنی این درس آورده شده که ممکن است توسط دانش‌آموزان نیز پیشنهاد شود.

بعد از ذکر این نکته از دانش‌آموز به‌طور ضمنی خواسته شده اثبات کند که روش نمونه‌گیری ذکر شده یک نوع نمونه‌گیری تصادفی ساده است که با استفاده از اطلاعات فصل‌های قبل با تعریف پیشامد مناسب و احتمال شرطی این کار را می‌توان انجام داد. به‌صورت رسمی‌تر در تمرین‌ها دوباره همین سؤال تکرار شده است. لذا در صورتی که زمان کافی در اختیار ندارید اثبات آن را به عنوان تمرین واگذار کرده و صرفاً به‌صورت شهودی هم شانس یا هم احتمال بودن اعضای جامعه را توجیه کنید.

دقت کنید در این بخش حرفی از نمونه با جایگذاری و بدون جایگذاری به میان نیامده است. لذا همان‌طور که عقل سلیم حکم می‌کند منظور ما از نمونه‌گیری تصادفی ساده نمونه‌گیری بدون جایگذاری است. هر چند که اثبات فرمول‌ها پیچیده‌تر خواهد شد، ولی چون در عمل این‌گونه پیاده‌سازی می‌شود پس بهتر است با نمونه‌های بدون جایگذاری کار کنیم. یادآوری می‌کنیم که چه نمونه با جایگذاری و چه بدون جایگذاری در هر دو صورت نمونه به دست آمده تصادفی است.

فعالیت ۲

بخش‌های بعدی فعالیت به برطرف کردن نواقص موجود در نمونه‌گیری تصادفی ساده اختصاص دارد. در فعالیت دوم هدف کاستن از هزینه و زمان نمونه‌گیری تصادفی ساده است. از سوی دیگر در این روش نیاز به داشتن فهرستی از اعضای جامعه نیست و صرفاً با داشتن فهرستی از خوشه‌ها قابل انجام است. نمونه‌گیری خوشه‌ای یک روش نمونه‌گیری **احتمالی** است که بعد از این فعالیت در مورد آن صحبت خواهد شد.

فعالیت ۳

در این فعالیت نمونه‌گیری طبقه‌ای شرح داده شده که هدف آن افزایش دقت نمونه‌گیری است. محدودیت این روش علاوه‌بر مشخص بودن فهرست واحدهای آماری نیاز به اطلاعاتی در خصوص جامعه است که بتوان توسط آن جامعه را به بخش‌هایی افراز کرد و بر اساس اهمیت هر یک از افرازها نمونه متناسب گرفت.

فعالیت ۴

در این فعالیت سعی شده نمونه‌گیری سامان‌مند که نوع دیگری از نمونه‌گیری طبقه‌ای است؛ شرح داده شود که نیاز به دانستن فهرست واحدهای آماری ندارد. علاوه‌بر آن برای داده‌هایی که به‌صورت یک جریان یا خط تولید باید گردآوری شوند کاربرد بسیاری دارد. از سوی دیگر در این نوع نمونه‌گیری نیاز به اطلاع از یک ویژگی که بتوان توسط آن جامعه را به بخش‌هایی افراز کرد ندارد. اندازه هر طبقه بر اساس اندازه نمونه مورد نیاز مشخص می‌شود.

کار در کلاس : جدول زیر را می‌توانید کامل‌تر کنید.

روش نمونه‌گیری	مزیت	محدودیت
تصادفی ساده	نمونه‌گیری از جامعه با اندازه کوچک ساده است	نیاز به فهرست اعضای جامعه دارد
خوشه‌ای	فقط نیاز به فهرستی از خوشه‌ها دارد سرعت زیاد و هزینه کمتر	کاهش دقت
طبقه‌ای	افزایش دقت	نیاز به اطلاعات اضافی از جامعه، افزایش هزینه
سامان‌مند	نیاز به فهرست اعضای جامعه ندارد	در هر جامعه‌ای قابل پیاده‌سازی نیست

فعالیت : از مگس‌های سفید با چه روشی می‌توان نمونه‌گیری کرد؟ فهرستی از آنها نداریم، تعداد آنها را هم نمی‌دانیم. می‌توان چند منطقه از تهران را به تصادف انتخاب کرد و در هر منطقه نمونه در دسترس را انتخاب و بررسی کنیم. آیا این روش نمونه‌گیری به تمامی واحدهای نمونه شانس انتخاب می‌دهد؟ خیر

چهار روش نمونه‌گیری ذکر شده چطور؟ بله همه آنها نمونه‌گیری احتمالی هستند، البته با دلیل شهودی.

فعالیت صفحه‌های ۱۰۷ و ۱۰۸

در این دو فعالیت به دو نکته مهم در انجام نمونه‌گیری اشاره شده است. اگر نمونه‌گیری احتمالی باشد اطلاعاتی که از این نوع نمونه‌گیری به دست می‌آید را نمی‌توان به جامعه گسترش داد. به عبارت دیگر استنباط آماری که هدف اصلی آمار است امکان‌پذیر نیست. از سوی دیگر اگر جامعه

درست انتخاب نشود، باز هم امکان استنباط غلط وجود دارد، حتی اگر اندازه نمونه را افزایش دهیم وضع بدتر هم می‌شود.

این پایان بحث نمونه‌گیری است. در دو کار در کلاس سعی شده این مفهوم به خوبی برای دانش‌آموز واضح شود. دلیل آن اطلاعات غلطی است که در اخبار روزمره به گوش همه می‌رسد، ولی ممکن است از تکذیب یا نادرست بودن آن مطلع نشویم. از سوی دیگر شاید خود ما دچار چنین اشتباهی شویم. خواندنی صفحه ۱۱۰ به یکی از موارد اشتباه در نمونه‌گیری اشاره می‌کند که باعث از بین رفتن سرمایه بسیاری از هموطنانمان شده است. در ادامه یک مثال واقعی از اریبی در نمونه‌گیری آمده است.

در جنگ جهانی دوم، شانس بازگشت یک جنگنده از مأموریت ۵۰ درصد بود. کارشناسان به این نتیجه رسیده بودند که باید زره تقویتی به هواپیماها اضافه کنند تا آنها را در برابر آتش ضدهوایی حفاظت کند؛ اما افزودن زره به همه قسمت‌های هواپیما امکان‌پذیر نبود و سرعت را بسیار کم و آن را آسیب‌پذیرتر می‌کرد؛ بنابراین آنها باید تصمیم می‌گرفتند که به کدام قسمت‌های هواپیما زره بیفزایند.

به همین دلیل به گردآوری داده‌ها در مورد نقاطی از هواپیما که آسیب دیده بود، می‌پرداختند. آنان پس از هر مأموریت هواپیماهایی را که بازگشته بودند بررسی می‌کردند و تعداد آسیب‌های ناشی از ترکش‌ها و گلوله‌ها و جای آنها را روی هواپیما مشخص می‌کردند. به تدریج مشخص شد الگوی خاصی در توزیع آسیب‌ها روی هواپیماها وجود دارد. شکل زیر نشان می‌دهد که بیشتر آسیب‌ها روی ناحیه بال و بدنه هواپیما بوده است.

اما آبراهام والد آمارشناس مشهور با این نتیجه‌گیری کاملاً مخالف بود. والد نشان داد که خطای مهمی در تحلیل‌ها صورت گرفته چراکه نتیجه‌گیری تنها بر اساس داده‌های هواپیماهایی است که از مأموریت بازگشته‌اند؛ اما در مورد هواپیماهایی که در طول مأموریت سقوط کردند، چه می‌دانیم؟ در واقع نمونه آماری در دسترس نمونه اریبی بوده است. والد نشان داد که دقیقاً برعکس، آن قسمت‌هایی از هواپیما نیاز به حفاظت دارند که کمترین اصابت را داشته‌اند. پیشنهادهای والد در عمل به بهبود نرخ بازگشت هواپیماها کمک کرد[۱].

فعالیت صفحه ۱۱۲ و ۱۱۴

این دو فعالیت به روش‌های گردآوری داده‌ها و اندازه‌گیری مقادیر متغیرهای آنها اختصاص دارد. اگر این دو فعالیت و کار در کلاس آنها را انجام دهیم، چندین اصطلاح جدید که به‌صورت غیر رسمی در درس‌های قبلی با آن به‌طور ضمنی آشنا شده‌اند تعریف خواهند شد.

آمارگیری گردآوری داده‌ها با یکی از روش‌های ممکن است. در واقع نمونه‌گیری بخشی از آمارگیری به حساب می‌آید. در آمارگیری علاوه‌بر آنکه باید نمونه‌گیری انجام شود باید مقادیر متغیرهای هر نمونه نیز اندازه‌گیری شده یا به‌دست آید. برای اینکه مقدار متغیر مورد بررسی، نمونه انتخاب شده در نمونه‌گیری، را به‌دست آوریم معمولاً از چهار روش که مشاهده، پرسشنامه، مصاحبه، و دادگان نام دارند استفاده می‌شود.

نکته‌ای که باید به آن توجه داشت این است که اگر برای هر داده فقط یک متغیر مورد بررسی قرار گیرد معمولاً از متغیر نام برده نمی‌شود و صرفاً به آن داده می‌گویند. همان‌گونه که در مثال‌ها و کار در کلاس‌ها دیده‌اید برای یک عضو نمونه چند متغیر اندازه‌گیری می‌شود. ولی در این کتاب برای سادگی کار بیشتر با یک متغیر سروکار دارد لذا در خیلی از مثال‌ها اسمی از متغیر برده نمی‌شود و به آن داده می‌گویند.

این درس با تعریف پارامتر یا پارامتر جامعه، آماره یا آماره نمونه، و نهایتاً تعریف آمار استنباطی به پایان می‌رسد. ما به تعریف دقیق این مفاهیم در درس بعد نیاز داریم و از برخی از آنها استفاده می‌کنیم.

در ادامه با یک متن خواندنی لقمان و مرد پیاده این بخش را به پایان می‌رسانیم.

۱ـ http: //analica.ir

روزی لقمان در کنار چشمه‌ای نشسته بود. مردی که از آنجا می‌گذشت از لقمان پرسید: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهم رسید. لقمان گفت: راه برو. آن مرد پنداشت که لقمان نشنیده است. دوباره سؤال کرد: مگر نشنیدی؟ پرسیدم: چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهم رسید؟ لقمان گفت: راه برو. آن مرد پنداشت که لقمان دیوانه است. برای همین راه خود را گرفت و رفت. زمانی که چند قدمی راه رفت، لقمان به بانگ بلند گفت یک ساعت دیگر بدان ده خواهی رسید. مرد گفت: چرا اوّل نگفتی؟ لقمان گفت: چون راه رفتن تو را ندیده بودم، نمی‌دانستم تند می‌روی یا کند. حالا که دیدم دانستم که تو یک ساعت دیگر به ده خواهی رسید. در این داستان ساده و قدیمی تمام اصول آماری رعایت شده است. چرا؟

نکتهٔ ظریف داستان این است که لقمان فقط می‌گوید «راه برو» و توضیح دیگری نمی‌دهد. لقمان نمی‌گوید که می‌خواهم راه رفتن تو را ببینم تا از روی آن بگویم چه مدت طول می‌کشد تا به ده برسی، زیرا لقمان فکر می‌کند این اطلاع ممکن است در راه رفتن آن مرد اثر بگذارد و در نتیجه سرعتی که لقمان تخمین می‌زند، سرعت واقعی راه رفتن آن فرد نباشد و در نتیجه زمانی را که تخمین خواهد زد، مدت زمان دقیقی نباشد.

بخش برآورد

فرض کنید شما می‌خواهید با دوستتان بیرون بروید. او می‌گوید سینما برویم، شما می‌خواهید نوشیدنی میل کنید، او می‌گوید فلان فیلم، شما می‌گویید ساعت فلان. حالا دفعه بعد پیشنهاد می‌کند تا با دو تا از دوستانش بیرون بروید و شما خوردن آش پیشنهاد می‌کنید اما آنها آش دوست ندارند و می‌گویند به جای آن شیرینی بخوریم، در جایی دیگر شما می‌خواهید به سینما بروید و فلان فیلم را پیشنهاد می‌کنید، اما دوستتان قبلاً آن فیلم را دیده و فیلم دیگری پیشنهاد می‌کند. احتمالاً خودتان می‌دانید که دردسر برنامه‌ریزی با افزایش تعداد نفرات به‌صورت توانی افزایش می‌یابد و از معادله مشهور اینشتین، $E = mc$^۲، پیروی می‌کند، که در آن E معرف میزان زحمت، m میانگین غرغر و c اندازه نمونه است.

آمار هم به همین شکل است، اما به نوعی معکوس: معادله اینشتین در آمار به این شکل است:

$$\text{انحراف معیار میانگین} = \text{انحراف معیار جامعه} \,/\, (\text{اندازه نمونه})^{۰/۵}$$

انحراف معیار میانگین هرچه کمتر شود دقت برآورد بیشتر می‌شود. انحراف معیار جامعه ثابت است پس برعکس فرمول اینشتین با افزایش تعداد اعضای نمونه دقت افزایش می‌یابد. به عنوان مثال فرض کنید درباره نحوه برگزاری آزمونی که اخیراً برگزار شده، از ۲ دانش‌آموز نظرخواهی کرده‌ایم و ۵۰٪ راضی بودند. حالا اگر همین نظرخواهی را بر روی نمونه ۱۶ تایی انجام دهیم و به نتیجه ۸۰٪ و با نمونه ۲۵ تایی به ۷۵٪ برسیم کدام نتیجه دقیق‌تر است؟

در نتیجه اگر نمونه کوچکی از جامعه را با رعایت تمامی نکات نمونه‌گیری انتخاب کنیم، احتمال آن وجود دارد که آنچه خلاف حقیقت است نتیجه شود.

اهداف

- آشنایی با برآورد
- تعریف برآورد نقطه‌ای (برآورد) و برآورد بازه‌ای (بازهٔ اطمینان)
- توزیع نمونه‌گیری (نمونه‌ای) میانگین نمونه
- انحراف معیار میانگین نمونه
- مشخص کردن اندازه نمونه برای برآورد درصد

فعالیت صفحه ۱۱۸

در اولین فعالیت این بخش سعی شده بود رابطه بین برآورد و آماره با یک مثال شرح داده شود. به مقدار عددی یک آماره، «برآورد» پارامتر جامعه نظیر آن آماره می‌گوید. از آنجا که برآورد یک پارامتر یک عدد است به آن برآورد نقطه‌ای گفته می‌شود. بعضی مواقع به‌جای واژه برآورد نقطه‌ای از واژه برآورد استفاده می‌شود.

هنگامی که از یک برآورد نقطه‌ای برای برآورد یک پارامتر جامعه مورد نظر استفاده می‌شود اینکه مقدار برآورد نقطه‌ای با مقدار پارامتر برابر شود احتمال کمی دارد. بنابراین از مقدار برآورد نقطه‌ای برای کمک به ساختن یک برآورد بازه‌ای برای پارامتر استفاده خواهیم کرد. ما قادریم که با اطمینان معینی اظهار کنیم که این پارامتر در داخل این بازه قرار می‌گیرد و به این علت به این بازه‌ها بازه‌های اطمینان اطلاق می‌کنیم. به ویژه برآوردهای بازه‌ای با اطمینان ۹۵ درصد برای پارامترها را بررسی می‌کنیم ولی هر درصد دیگری را می‌توان در نظر گرفت.

برای ساختن بازهٔ اطمینان یا برآورد بازه‌ای برای پارامتر میانگین جامعه نیاز داریم که خطای

نمونه‌گیری را برای میانگین نمونه محاسبه کنیم. منظور از خطای نمونه‌گیری میانگین نمونه، تغییر مقادیر برآورد میانگین جامعه از یک نمونه به نمونه دیگر است. از آنجا که انحراف معیار برای اندازه‌گیری پراکندگی داده‌ها به کار می‌رود، می‌توانیم در این مسئله انحراف معیار برآوردها را محاسبه کنیم. به بیان دیگر از جامعه چند بار نمونه می‌گیریم و برای هر نمونه برآورد میانگین جامعه را محاسبه می‌کنیم. حال اگر انحراف معیار این برآوردها را محاسبه کنیم، می‌توانیم به پراکندگی برآوردها یک مقدار عددی نسبت دهید که همان انحراف معیار برآوردهای میانگین‌های نمونه است.

کار در کلاس صفحه ۱۱۹ فعالیت صفحه ۱۲۰

هدف ما در اینجا انتقال مفهوم خطای نمونه‌گیری برآورد میانگین جامعه (که همان میانگین نمونه است) به طریقی دیگر به دانش‌آموز است. در واقع در این کار در کلاس و فعالیت بعد از آن با استفاده از احتمال، نحوه تغییرات میانگین نمونه را زمانی که اندازه نمونه افزایش می‌یابد را بررسی می‌کنیم. به‌صورت شهودی نشان داده شده که با افزایش اندازه نمونه پراکندگی برآورد میانگین جامعه کم می‌شود ولی نتیجه این بررسی را به‌صورت یک اصل در کادر صفحه ۱۲۱ آورده‌ایم که می‌گویند انحراف معیار برآورد میانگین نمونه برابر انحراف معیار جامعه تقسیم بر ریشه دوم اندازه نمونه است.

خطای نمونه‌گیری در بیان ساده عبارت است از احتمال اینکه نتیجه اشتباه از تحقیق گرفته شود. بنابراین برای کاهش این خطا می‌بایست اندازه نمونه را .... داد. هرچه انحراف معیار جامعه .... باشد حجم نمونه بیشتری مورد نیاز است.

فعالیت صفحه ۱۲۲

نتیجه کار در کلاس و فعالیت‌های قبل طی چند سؤال مطرح شده و نتیجه آن بدون اثبات به‌صورت فرمول بازهٔ اطمینان در کادر آمده است.

فعالیت آخر صفحه ۱۲۲

درصد حالت خاصی از میانگین است که داده‌ها به‌صورت صفر و یک هستند. برای درصد همانند میانگین می‌توان بازهٔ اطمینان تشکیل داد ولی به دلیل صفر و یک بودن داده‌ها می‌توان فرمول بازه اطمینان برای میانگین جامعه را به‌صورت فرمولی که در صفحه ۱۲۳ آمده است ساده کرد. خوبی این فرمول آن است که می‌توانیم دقت فاصله اطمینان را قبل از نمونه‌گیری مشخص کنیم.

این نکته از آن جهت حائز اهمیت است که در تمام تحقیقات آماری اندازه نمونه را بر اساس دقتی که نیاز است مشخص می‌کنند. منظور از دقت در برآورد بازه‌ای طول بازهٔ اطمینان هرچه طول بازه کمتر باشد برآورد بازه‌ای بیشتر است. دقت برآورد اطمینان به اندازه نمونه و مقدار انحراف معیار وابسته است. از آنجا که برای متغیرهای دودویی حداکثر مقدار انحراف معیار قابل محاسبه است، بازهٔ اطمینان برای درصد صرفاً به اندازه نمونه وابسته است. با توجه به آنکه در فرمول بازهٔ اطمینان به دانستن اندازه جامعه نیازی نیست. به سادگی می‌توان اندازه نمونه را برحسب ضریب اطمینانی که می‌خواهیم بازهٔ اطمینان را محاسبه کنیم به دست آوریم. با توجه به اینکه ضریب اطمینان در این کتاب ثابت و برابر ۹۵ درصد در نظر گرفته شده، نیاز به در نظر گرفتن این کمیت نداریم.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ در نمونه‌گیری تصادفی ساده، از یک جامعه ۱۰۰ نفری احتمال اینکه فرد به خصوصی در اولین انتخاب عضو نمونه باشد، ۰/۰۱ است. اگر مسئله بدون جای‌گذاری باشد، و از نتیجه انتخاب اوّل اطلاع نداشته باشیم، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟

جواب : ۰/۰۱ است از احتمال شرطی یا قوانین شمارش اثبات می‌شود.

۲ فرق بین آماره با پارامتر چیست؟

جواب : پارامتر مشخصه‌ای مربوط به جامعه که دارای مقداری ثابت ولی نامعلوم است و آماره مشخصه‌ای عددی مربوط به نمونه است، ص ۱۱۵ کتاب.

۳ در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاهای گیاهی، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی ناهار یا شام سفارش داده‌اند. سه آماره نام ببرید.

جواب : آماره مشخصه‌ای عددی مربوط به نمونه است.

الف) تعداد مشتری‌هایی که وعده غذایی ناهار سفارش داده‌اند.

ب) تعداد مشتری‌هایی که وعده غذایی شام سفارش داده‌اند.

ج) درصد مشتری‌هایی که وعده غذایی شام سفارش داده‌اند.

۴ در یک نمونهٔ تصادفی از ۱۰۰ پسر ۸۰ نفر طرفدار کلاس‌های بعدازظهر هستند. یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای نسبت پسرها عبارت است از فاصله

جواب :

$$\left(p-۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}\ ,\ p+۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}\right)$$

$$\left(۰/۸-۲(\frac{۰/۴}{۱۰}),۰/۸+۲(\frac{۰/۴}{۱۰})\right)=(۰/۷۲,۰/۸۸)$$

۵ اگر در سؤال ۴ اندازه نمونه را چهار برابر کنیم طول بازه اطمینان چه تغییری می‌کند؟

جواب : طول بازه اطمینان نصف می‌شود ص ۱۲۳ کتاب

۶ اگر یک نمونه تصادفی به اندازهٔ پنج به‌صورت ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ داشته باشیم، یک بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه عبارت است از :

جواب :

$$\overline{x}-۲\sigma/\sqrt{n}\leq \mu \leq \overline{x}+۲\sigma/\sqrt{n}$$

$$(۳-\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}\ ,\ ۳+\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}})=(۳-۱/۲۶\ ,\ ۳+۱/۲۶)$$

۷ **اگر از یک جامعه بزرگ ۱۰۰ بار نمونه ۱۰ تایی بگیریم و ۱۰۰ بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد محاسبه کنیم انتظار داریم چند تا از این بازه‌های اطمینان ۹۵ درصدی پارامتر میانگین جامعه را در بر بگیرند؟**

جواب : تقریباً ۹۵ درصد ص ۱۲۷ و ۱۲۶ کتاب

۸ فرض کنید می‌خواهیم میزان آلایندگی خودروهای شهری را بررسی کنیم. کدام‌یک از نمونه‌گیری‌های زیر اریب نیست؟

جواب : نمونه‌گیری از پلاک خودروها ص ۱۰۹ کتاب.

۹ برای بررسی درآمد ساکنان شهر تهران کدام روش نمونه‌گیری مناسب‌تر است؟

جواب : طبقه‌ای

به دلیل وجود اختلاف طبقاتی سطح درآمد در شهر تهران حداقل باید به دو طبقه شمال شهر و جنوب شهر تقسیم شود.

۱۰ طول قد دانش‌آموزان مدرسه‌ای را چگونه گردآوری می‌کنید؟

جواب : دادگان : اگر طول قد دانش‌آموزان در کارت بهداشت آنها درج شده باشد. در کتاب پاسخ دیگری داده شده که همگی صحیح هستند.

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۷۵-گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (**Email**) **talif@talif.sch.ir** ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی عمومی و متوسطه نظری