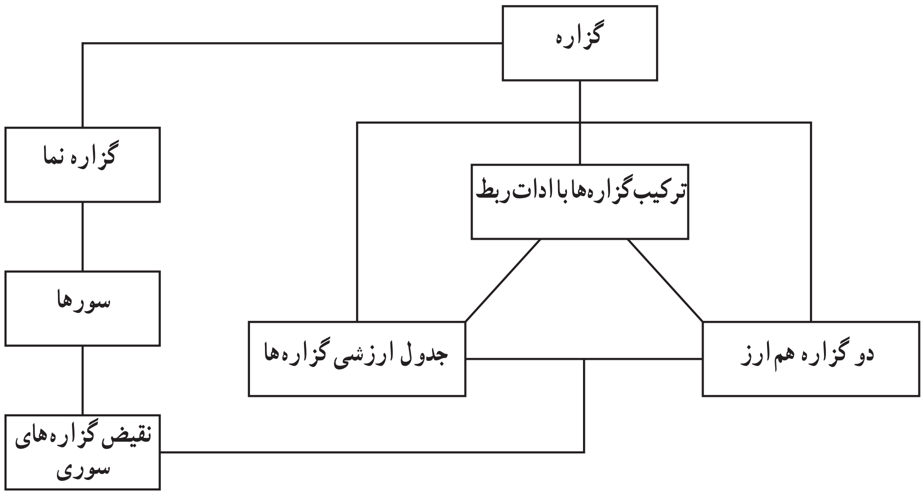
فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات

درس اول: آشنایی با منطق ریاضیات

نمودار مفهومی درس



نگاه کلی به فصل

درس اوّل : مفهوم گزاره و ارزش یک گزاره بیان می‌شود. سپس به کمک جدول ارزش گزاره‌های، گزاره‌های هم‌ارز معرفی می‌شوند. در ادامه گزاره‌نما، دامنه متغیر گزاره‌نما و مجموعهٔ جواب گزاره‌نما را ملاحظه خواهید کرد.

ترکیب فصلی، عطفی، شرطی ،دو شرطی، نقیض یک گزاره و جدول ارزش مربوط به هر کدام از آنها آمده است. مطلب پایانی درس اول معرفی سورهای عمومی و وجودی و نقیض هر یک از آنها است.

درس دوم : در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه، دانش‌آموزان آشنا شده‌اند، در ابتدا به یادآوری تعلق و عضویت پرداخته‌ایم، سپس با انجام یک فعالیت تعدادِ زیرمجموعه‌های یک مجموعه را محاسبه می‌کنند و مفهوم افراز مجموعه بیان شده است.

در ادامه با استفاده از نمادهای منطقی و زبان منطق ریاضی، مفهوم زیرمجموعه آمده است و به روش عضوگیری دلخواه حکم‌هایی دربارهٔ زیرمجموعه‌ها ثابت شده است.

مطلب پایانی این درس معرفی دو مجموعه مساوی با استفاده از زبان منطق ریاضی است.

درس اول

اهداف کلی

* منطق دستور زبان ریاضی است.
* منطق می‌تواند اعتبار استدلال را مشخص کند.
* از این به بعد از مطالب منطق در استدلال‌ها استفاده می‌کنیم.
* در بیان گزاره‌های سوری یا زبان طبیعی به‌صورت درست از سورها استفاده می‌نماییم.

اهداف جزئی

* دانش‌آموزان قادر به شناسایی گزاره‌ها باشند.
* مفهوم ارزش گزاره را درک کنند.
* جدول ارزش گزاره‌های مرکب را تشکیل دهند.

* سورها را بشناسند و صدق و کذب گزاره‌های سوری را تشخیص دهند.

❊ **اهداف عملکردی (از جنس شایستگی)**

* با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، گزاره‌های هم‌ارز را شناسایی کند.
* با استفاده از ارزش گزاره‌ها و ادات ربط بتواند ارزش یک گزاره مرکب را تعیین کند.
* با توجه به ارزش گزاره‌های مرکب، بتواند راجع با ارزش گزاره‌های ساده بحث کند.

پیش‌دانسته‌های مورد نیاز

* دانش‌آموز بتواند از زبان طبیعی برای استدلال کردن به‌صورت مختصر و مفید استفاده کند.

برای مثال وقتی از کسی می‌پرسید، چرا گوشت شکار را نمی‌خوری؟ او در پاسخ می‌تواند بگوید که خوردن گوشت شکار مناسب نیست. اما این استدلال خوب و قابل قبولی محسوب نمی‌شود.

اگر در پاسخ، استدلال زیر را مطرح کند؛ این استدلال به زبان طبیعی قابل قبول است :

خوردن گوشت شکار باعث از بین رفتن و کشتن حیوانات می‌شود و کشتن حیوانات کار درستی نیست، بنابراین من گوشت شکار را نمی‌خورم.

از دانش‌آموزان بخواهید برای توجیه کارهای خودشان استدلال بیاورند یا در یک بحث ساده و روزمره شرکت کنند و برای درستی گفته‌هایشان استدلال بیاورند.

* مفاهیم و موضوعات ریاضی و هندسه مربوط به سال‌های قبل را بدانند، زیرا صدق یا کذب گزاره‌ها به آن مطالب مربوط می‌شوند.

درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی

پیشنهادی برای شروع بحث گزاره

استدلال‌های ساده زیر را در نظر بگیرید :

الف) در زمستان هوا سرد می شود.

در هوای سرد نیاز به پوشش گرم پیدا می‌کنیم.

نتیجه : در زمستان نیاز به پوشش گرم داریم.

ب) سقراط انسان است.

انسان فانی است.

نتیجه : سقراط فانی است.

در استدلال‌های بالا دو جمله نخست را مقدمهٔ استدلال و جمله سوم نتیجه استدلال است و این استدلال از چند جملهٔ خبری تشکیل شده‌اند.

گزاره : به جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده دارای ارزش راست (درست) یا دروغ (نادرست) باشد گزاره می‌گوییم.

توجه : عبارت «۵ = ۳ + ۲» یک گزاره است، این گزاره جمله‌ای خبری است که دارای محتواهای زیر است :

* عدد ۵ برابر با مجموع دو عدد ۳و ۲ است.
* ۵ دو واحد بیشتر از ۳ است.
* ۵ سه واحد بیشتر از عدد ۲ است.

در حقیقت **محتوا جملهٔ خبری** ۵ = ۳ + ۲ را گزاره می‌گوییم و این محتوا ممکن است با جمله‌های خبری متفاوت بیان شود.

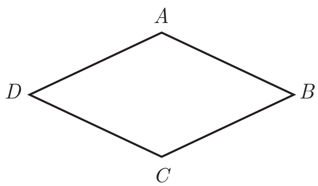
مثال : گزاره‌های «برف سفید است»، «الثلج الابیض» و «the snow is white» دارای محتوا یکسان هستند.

مثال : از بین جمله‌های زیر گزاره‌ها را مشخص و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

الف) ۲ > ۳

ب) عدد ۲۸۵۳ اول است.

ج) عینک مرا تعمیر کنید.



د) در لوزی مفروض دو قطر بر هم عمودند.

هـ) لطفاً پارک نکنید.

و) $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$

ز) عدد ۸ + $۵^۹$ عددی اول نیست.

حل : الف) گزاره است و ارزش آن درست است. جز این گزاره چنین است :

«عدد ۲ از ۳ کوچک‌تر است»

ب) توجه داشته باشید که بعضی مواقع لازم است، دانش‌آموز برای پی بردن به ارزش گزاره کمی وقت بگذارد و تحقیق کند، یعنی این طور تصور نشود که ارزش هر گزاره باید خیلی سریع نمایان باشد. در این مثال مجموع ارقام ۱۸ است، پس این عدد به ۳ بخش‌پذیر است و اول نیست پس ارزش گزاره نادرست است.

ج) جمله امری است و گزاره نیست.

د) گزاره است و درست است. در سال قبل در درس هندسه درستی این گزاره اثبات شده است.

و) گزاره است و ارزش آن درست است.

ز) گزاره است و ارزش آن نادرست است؛ زیرا :

$$۵^۹ + ۸ = (۵^۳)^۳ + ۲^۳ = (۵^۳ + ۲)\,((۵^۳)^۲ - ۵^۳ \times ۲ + ۲^۲)$$
$$= (۵^۳ + ۲)\,(۵^۶ - ۲ \times ۵^۳ + ۴)$$

دانش‌افزایی

منطق ریاضی به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. به مثال‌های زیر دقت کنید :

الف)	ب)
هر تهرانی، ایرانی است.	هر تهرانی، اصفهانی است.
هر ایرانی، آسیایی است.	هر اصفهانی، ایرانی است.
نتیجه : هر تهرانی آسیایی است.	**نتیجه** : هر تهرانی، ایرانی است.

استدلال (الف) یک استدلال sound است. زیرا مقدمات و نتیجه آن صادق‌اند و از قواعد منطق پیروی می‌کنند.

استدلال (ب) یک استدلال معتبر یا valid است. این نوع استدلال صوری است و از قواعد منطق پیروی می‌کند اما مقدمهٔ اول آن دارای اعتبار معنایی نیست و نادرست است.

به استدلال‌های زیر توجه کنید :

الف) تهران پایتخت ایران است.

نتیجه : همهٔ سگ‌ها سگ هستند.

ب) همهٔ سگ‌ها سگ هستند.

نتیجه : همهٔ سگ‌ها سگ هستند.

این دو استدلال دارای مقدمه و نتیجه صادق هستند، پس استدلال sound است. اما این استدلال‌ها مفید یا usfull نیستند، زیرا چیزی به معرفت ما اضافه نمی‌کنند و جالب یا تشویق‌آمیز نیست. یعنی به گونه‌ای نیست که شخصی از قبل تردیدی داشته است و با این استدلال تردیدش برطرف شود.

گزاره‌نما

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید :

الف) او یک بازیکن فوتبال است. (ضمیر او، متغیر است)

ب) a عددی اول است. (a، متغیر است)

ج) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد، برابر $\frac{۱}{۲}$ است. (مجموعه A متغیر است)

د) مجموع سه برابر عددی و دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. ($۳x + ۲y = ۶$؛ x و y متغیر هستند)

هـ) اینجانب .... فرزند .... دانش‌آموز کلاس .... متقاضی استفاده از امکانات کتابخانه مدرسه هستم. (جاهای خالی متغیرها هستند)

ارزش جمله‌های خبری بالا را نمی‌توان تعیین کرد، مگر آنکه به جای متغیرهای آنها اسم خاص بنشیند و گزاره‌ای با ارزش درست یا نادرست به‌دست آید.

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیرها به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کار رفته در آنها یک متغیره، دو متغیره و... می‌نامیم.

توجه : جلوتر راجع به سورها بحث خواهیم کرد، وقتی سورها بر سر گزاره‌نماها قرار

می‌گیرند، گزاره‌نماها را به گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست تبدیل می‌کنند. هر گزاره‌نما شامل متغیر x را می‌توان با افزودن اصطلاحی مانند «به ازای هر $x \in A$» یا «وجود دارد $x \in A$» تبدیل به یک گزاره کرد.

مثال : عبارت‌های زیر گزاره هستند.

الف) برای هر عدد حقیقی x، داریم $x^۲ \geq ۰$.

ب) وجود دارد $x \in \mathbb{R}$ به‌طوری که $x > ۳$.

دامنهٔ متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نماها

در این کتاب هدف این نیست که دانش‌آموزان دامنهٔ متغیر گزاره‌نماها را تعیین کنند، در مثال‌های کتاب معمولاً دامنهٔ متغیر داده شده است ولی از دانش‌آموزان خواسته شده تا مجموعه جواب گزاره‌نماها را محاسبه کنند.

توجه : عبارتی نظیر $x^۲ + ۱ \neq ۰$ یعنی به‌صورت کلی «مربع هر عدد حقیقی به اضافه مخالف صفر است» را گزاره کلی می‌گوییم. در این گزاره کلی سور عمومی مستتر است و منظور از این گزاره کلی چنین است :

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^۲ + ۱ \neq ۰$$

ارزش گزاره کلی $x^۲ + ۱ \neq ۰$ درست است.

ترکیب گزاره‌ها

فعالیت صفحه ۶

در این فعالیت دانش‌آموزان با ادات ربط در جمله‌های خبری مرکب آشنا می‌شوند. برای اینکه ارزش گزاره‌های مرکب را تعیین کنیم در ادامه ادات ربط و جدول ارزش گزاره‌های مرکب را آورده‌ایم.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p را به‌صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. اگر

ارزش گزاره p راست باشد در این صورت ارزش گزاره $\sim p$ دروغ است و اگر ارزش p دروغ باشد آن‌گاه ارزش گزاره $\sim p$ راست است.

توجه داشته باشید که در منطق ریاضی p و $\sim p$ هر دو نمی‌توانند راست یا هر دو دروغ باشند.

مثال : نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$ **ب)** ۲ عددی زوج یا عدد π گویاست.

ج) برای هر عدد صحیح a، اگر a زوج باشد آن‌گاه $a+1$ فرد است.

حل ــ الف) $\{a,b\} \not\subseteq \{a,b,c\}$

ب) چنین نیست که (۲ عددی زوج یا عدد π گویاست).

توجه داشته باشید که عبارت «چنین نیست که» برای کل گزاره مرکب است و به اشتباه نوشته نشود که :

چنین نیست که ۲ عددی زوج یا عدد π گویاست.

توجه : هدف ما از این‌گونه مثال آن است که دانش‌آموز نقیض این گزاره مرکب را به‌صورت درست بالا بنویسید و هدف ما این نیست که از هم‌ارزی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ استفاده شود.

د) چنین نیست که (برای هر $a \in \mathbb{Z}$ اگر a زوج باشد آن‌گاه $a+1$ فرد است).

چون در زبان طبیعی برای نقض کردن هر جمله خبری کافی است فعل آن را منفی کنیم بنابراین برخلاف منطق ریاضی این امکان به‌وجود می‌آید که یک گزاره و نقیض آن هم ارزش باشند، مانند :

p : بعضی از انسان‌ها سفیدپوست هستند.

q : بعضی از انسان‌ها سفیدپوست نیستند.

در منطق ریاضی گزاره q، نقیض گزاره p نیست و جلوتر در قسمت نقیض گزاره‌های سوری، این مطلب را ملاحظه خواهید کرد. اما در زبان طبیعی p و q را نقیض یکدیگر می گیریم و این اشکال به‌وجود می‌آید.

ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «p یا q» را که به‌صورت $p \vee q$ می‌نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی «$\vee$» فاصل گفته می‌شود.

دانش‌افزایی : انواع فاصل (یا)

الف) «یا» مانعة‌الجمع

وقتی دو گزاره را با این رابط منطقی ترکیب می‌کنیم، نمی‌توانند هر دو گزاره توأم با هم برقرار باشند ولی ممکن است نه این و نه آن باشد. برای مثال، بچه‌ای از دور به درختی اشاره می‌کند، می‌گوید :

«آن درخت آلبالو یا انار است»

در اینجا جمع هر دو محال است ولی ممکن است هیچ‌کدام نباشد و مثلاً درخت هلو باشد.

ب) «یا» مانعة‌الخُلو («یا» منطق ریاضی)

وقتی دو گزاره را با این رابط منطقی ترکیب می‌کنیم، در اینجا خالی بودن اشکال دارد، یعنی نمی‌شود نه این باشد و نه آن. بنابراین به‌طور حتم یکی از گزاره‌ها برقرار است و ممکن است هر دو باهم برقرار باشند. برای مثال؛ رابط «یا» در گزاره مرکب «جزای عمل در دنیا یا در آخرت است.» یای مانعة‌الخلو است.

توجه : یای به‌کار رفته در ریاضی یای مانعة‌الخلو است.

مثال : رابط «یا» در گزاره مرکب «۲ عددی اول یا ۳ عددی فرد است» یای مانعة‌الخُلو است.

ج) «یا» حقیقیه

وقتی دو گزاره را با این رابط منطقی ترکیب می‌کنیم، حتماً یکی از گزاره‌ها برقرار و گزاره دیگر برقرار نیست در این حالت جمع دوگزاره با هم و خُلو آن نیز مشکل دارد. یعنی نمی‌تواند نه این باشد و نه آن. برای مثال یای به‌کار رفته در گزاره‌های مرکب زیر یای حقیقیه است.

الف) علی در خانه است یا علی در خانه نیست.

ب) هر عدد طبیعی زوج است یا هر عدد طبیعی فرد است.

محدودیت‌های «یا» در زبان طبیعی

I ــ در زبان طبیعی گاهی «یا» در بین کلمات داریم ولی در بین جملات نداریم :

مثال : ارزش گزاره «هر عدد صحیح زود یا فرد است» درست می‌باشد و این درحالی است

که ارزش گزاره هر عدد صحیح زوج است یا هر عدد صحیح فرد است، نادرست است.

II ــ می‌دانیم که هرگاه $p\equiv T$ و $q\equiv r\equiv f$ در این صورت گزاره‌های $p\vee q\equiv T$ و $p\vee r\equiv T$ در منطق می‌توان جای q و r را باهم عوض کرد اما در زبان طبیعی باید بین جملات p و q یا p و r ارتباط معنایی رعایت شود ولی در منطق این‌طور نیست.

مثال : رقابت تسلیحاتی ابر قدرت‌ها تمام می‌شود یا جنگ جهانی سوم رخ می‌دهد.

۷ = ۲ + ۲ یا جنگ جهانی سوم رخ می‌دهد.

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دوگزاره باشند، گزاره مرکب «$p\wedge q$» را ترکیب عطفی دو گزاره می گوییم و به رابط منطقی «$\wedge$» عاطف گفته می‌شود.

محدودیت‌های «و» در زبان طبیعی

I ــ در منطق ریاضی تقدم و تأخر زمان نداریم ولی در زمان طبیعی داریم. در منطق $p\wedge q$ یا $q\wedge p$ تفاوتی ندارد، اما در زبان طبیعی گاهی با هم متفاوت است.

مثال : سعید مرد و آن را در قبرستان دفن کردند.

حال اگر بگوییم سعید را در قبرستان دفن کردند و مرد در اینجا قتل یا جنایت اتفاق افتاده است و معنی جمله عوض می‌شود.

II ــ مثال. علی و مریم ازدواج کرده‌اند.

در منطق : علی ازدواج کرد و مریم ازدواج کرد.

در زبان طبیعی : این‌طور استنباط می‌شود که علی و مریم با هم ازدواج کرده‌اند.

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $p\Rightarrow q$ را ترکیب شرطی آنها می گوییم و آن را چنین می‌خوانیم :

«اگر p آن‌گاه q». در این ترکیب شرطی p را مقدم و q را تالی می‌نامیم.

برای توجیه جدول ارزش گزاره شرطی، می‌توان به مثال‌های زیر کمک گرفت.

۱ اگر ۵ عددی فرد باشد آن‌گاه $۵^۲$ فرد است.

در این مثال فرض درست است، بنابراین از فرض درست توقع داریم که حکم نیز درست باشد که در اینجا چنین است، پس ارزش گزاره شرطی درست است. یعنی از گزاره‌ای درست می‌توان گزاره‌ای درست را نتیجه گرفت، یعنی : $(p \Rightarrow q) \equiv T : (p \equiv T) \wedge (q \equiv T)$

نتیجه : در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ اگر p درست و q درست باشد آن‌گاه ارزش گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» درست است.

۲ اگر ۱=۱- آن‌گاه ۱=۱.

در این مثال فرض ۱=۱- نادرست است اما می‌توان دو طرف این تساوی را به توان برسانیم و نتیجه درست ۱=۱ را بگیریم. یعنی : $(p \Rightarrow q) \equiv T : p \equiv F\ ,\ q \equiv T$

بنابراین از گزاره نادرست می‌توان یک گزاره درست را نتیجه گرفت، یعنی در این حالت ارزش گزاره شرطی درست است.

نتیجه : در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ اگر p نادرست و q درست باشد آن‌گاه ارزش گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» درست است.

۳ اگر ۲=۱ آن‌گاه ۷=۶.

در این مثال فرض ۲=۱ نادرست است اما می‌توان دو طرف این تساوی را با ۵ جمع کرد و در نتیجه ۷=۶ را نتیجه بگیریم.

بنابراین از یک گروه نادرست می‌توان یک گروه نادرست را نتیجه گرفت. یعنی در این حالت ارزش گزاره شرطی درست است.

نتیجه : در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ اگر p نادرست و q هم نادرست باشد آن‌گاه ارزش گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» درست است.

اما باید توجه داشته باشیم که از یک گزاره درست نمی‌توان گزاره‌ای نادرست را نتیجه گرفت. بنابراین اگر در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، p درست و q نادرست باشد آن‌گاه ارزش گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» نادرست است.

ترکیب دو شرطی گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به‌صورت «$p \Leftrightarrow q$» می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره مرکب $p \Leftrightarrow q$ را به‌صورت زیر می‌خوانیم :

«اگر p آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است»، «p اگر و تنها اگر q» و «p اگر و فقط اگر q».

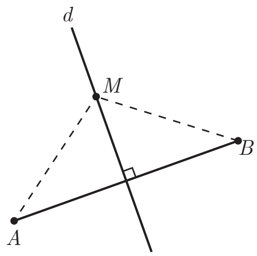
مثال : گزاره‌های مرکب زیر، نمونه‌ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

الف) ۶ عدد اول است $\Leftrightarrow$ ۲ < ۵

ب) ۹۹ عدد اول نیست $\Leftrightarrow$ $\sqrt{۲}$ عددی گویا است.

پ) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد آن است که پیشامد تهی باشد.

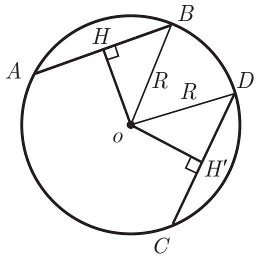
ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشند.



AB عمودمنصف $d : (M \in d \quad \Leftrightarrow \quad MA=MB)$

مثال : در هر دایره، از دو وتر آنکه از مرکز دورتر است کوچکتر است و برعکس

حل : با توجه به شکل ثابت می‌کنیم که :



$(P : AB < CD) \Leftrightarrow (q : OH > OH')$

در اثبات این گزاره دو شرطی می‌توان p را فرض کرد و به حکم q رسید و برعکس. یعنی می‌توان از p به q و q به p رسید.

$$AB < CD \Leftrightarrow \frac{AB}{۲} < \frac{CD}{۲} \Leftrightarrow HB < DH' \Leftrightarrow HB^{۲} < DH'^{۲}$$
$$\Leftrightarrow R^{۲} - OH^{۲} < R^{۲} - OH'^{۲}$$
$$\Leftrightarrow -OH^{۲} < -OH'^{۲}$$
$$\Leftrightarrow OH^{۲} > OH'^{۲} \Leftrightarrow OH > OH'$$

گزاره‌های همیشه درست

گزاره $P \Rightarrow P$ را در نظر بگیرید و جدول ارزشی این گزاره را تشکیل دهید.

P	$P \Rightarrow P$
T	T ≡ (د ⇐ د)
F	T ≡ (ن ⇐ ن)

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ارزش گزاره مرکب $P \Rightarrow P$ در جدول بالا همیشه درست است بنابراین به چنین گزارهٔ مرکبی، گزاره همیشه درست می‌گوییم.

مثال : نشان دهید که گزارهٔ مرکب $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ همیشه درست است.

حل. با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان می‌دهیم که در هر سطر جدول ارزش این گزاره راست است.

P	q	$P \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

دو گزاره هم‌ارز

هر گاه دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند، می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم «p با q هم‌ارز است».
چنانچه P و Q دوگزاره مرکب باشند، به‌طوری که در جدول ارزش گزاره‌ها،همواره در هر سطر جدول ارزش یکسانی داشته باشند، در این صورت می‌نویسیم $P \equiv Q$.

مثال. آیا دو گزاره $(p \Rightarrow q)$ و $[(p \wedge q) \vee \sim p]$ هم‌ارز هستند.

توصیه مهم : در استدلال هم‌ارزی گزاره‌ها فقط از دانش‌آموزان می‌خواهیم که به کمک جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی‌ها را بررسی کنند و راه‌حل‌هایی مانند زیر به هیچ عنوان در برنامه تدریس کتاب نیست.

توزیع‌پذیری $(p \wedge q) \vee \sim p \equiv (p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)$

$$\equiv T \wedge (q \vee \sim p) \equiv q \vee \sim p$$

جابه‌جایی $\equiv \sim p \vee q$

$$\equiv p \Rightarrow q$$

توصیه مؤلفین بر این است که از راه‌حل‌هایی مانند بالا در سر کلاس استفاده نکنید و فقط به کمک جدول ارزش‌ها به‌صورت زیر، هم‌ارزی گزاره‌های مرکب را بررسی نمایید.

P	q	$P \wedge P$	$\sim p$	$(p \wedge q) \vee \sim p$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د

در هر سطر جدول ارزش $(p \Rightarrow q)$ و $[(p \wedge q) \vee \sim p]$ با هم یکسان است، پس :

$$[(p \wedge q) \vee \sim p] \equiv (p \Rightarrow q)$$

در کتاب درسی بررسی شده است که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$. می‌توان از این هم‌ارزی برای اثبات قضیه‌های شرطی به‌صورت زیر استفاده کرد.

مثال. ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و $n^۲$ مضرب ۵ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۵ است.

حل. ابتدا صورت مثال بالا را به زبان منطق ریاضی می نویسیم.

$$n \in \mathbb{Z}\ ,\ n^۲ = ۵k\ (k \in \mathbb{Z}) \ \Rightarrow\ n = ۵k'(k' \in \mathbb{Z})$$

برای اثبات این قضیه شرطی با استفاده از عکس نقیض ترکیب شرطی، ثابت می کنیم که :

$$n \in \mathbb{Z}'\ ,\ n \neq ۵k'\ (k' \in \mathbb{Z}) \ \Rightarrow\ n^۲ \neq ۵k(k \in \mathbb{Z}')$$

چون n عدد صحیحی است که مضرب ۵ نیست، بنابراین عدد n به یکی از صورت‌های زیر است :

$$n = ۵k+۱ \quad ; \quad n = ۵k+۲ \quad ; \quad n = ۵k+۳ \quad ; \quad n = ۵k+۴$$

اکنون اگر $n^۲$ را محاسبه می کنیم ملاحظه خواهیم کرد که در هر حالت $n^۲ \neq ۵k$. بنابراین حکم برقرار است.

سورها

مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، می‌خواهیم این خاصیت اعداد حقیقی را بیان کنیم که صفر عضو خنثی است، یعنی برای هر عدد حقیقی مانند x، همواره داریم $x + ۰ = x$ برای نوشتن این جمله به زبان ریاضی، لازم است که عبارت «برای هر» را با نمادی مشخص کنیم. قرارداد ریاضی‌دان‌ها بر این است که آن را با نماد «$\forall$» مشخص می کنند و به آن سور عمومی می گویند. بنابراین چنین می‌نویسیم :

$$\forall x \in \mathbb{R} : x + ۰ = x$$

همچنین برای بیان این خاصیت که «وجود دارد عدد حقیقی که مکعب آن برابر با ۲ است» لازم است که عبارت «وجود دارد» را با نمادی مشخص کنیم. قرارداد ریاضی‌دان‌ها بر این است که آن را با نماد «$\exists$» مشخص می‌کنند و به آن سور وجودی می‌گویند. بنابراین چنین می‌نویسیم :

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^۳ = ۲$$

وقتی برای گزاره نمای $p(x)$ از سور عمومی استفاده می‌کنیم، یعنی $\forall x \in A: p(x)$

در این صورت گزاره نما تبدیل به گزاره می‌شود. این گزاره سوری درست است هرگاه مجموعه A برابر با مجموعه جواب گزاره‌نما باشد، یعنی هر عضو از این دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند. در نتیجه هیچ مثال نقضی در مجموعهٔ A برای $p(x)$ وجود ندارد.

مثال. ارزش گزارۀ الف، راست و ارزش گزاره ب دروغ است.

الف) $(\forall x \in \mathbb{R} : x^{۲} \geq ۰) \equiv T$

ب) $(\forall x \in \mathbb{R} : x^{۲} \geq ۰) \equiv F$

وقتی از سور وجودی برای گزاره‌نمای $p(x)$ استفاده می‌کنیم، یعنی $\exists x \in A: p(x)$ در این صورت این گزاره درست است هرگاه مجموعه جواب گزاره‌نما ناتهی و زیرمجموعه A باشد. یعنی گزاره نما $p(x)$ به ازای حداقل یک عضو مجموعه A درست باشد و در این حالت مجموعه جواب گزاره‌نما ناتهی است.

مثال.

الف) $(\exists x \in \mathbb{R} : x^{۲} - ۱ = ۰) \equiv T$; ب) $(\exists x \in P : x = ۲k \ , \ k \in \mathbb{Z}) \equiv T$

ج) $(\exists x \in \mathbb{Z} : x^{۲} - ۲ = ۰) \equiv F$; د) $(\exists x \in \mathbb{R} : x^{۲} + ۱ = ۰) \equiv F$

مثال. ارزش گزاره سوری $\forall n \in N ; (۲^{۲^n} + ۱) \in P$ را بررسی کنید.

حل. فِرما تصور می‌کرد که $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$ برای عددهای صحیح و غیر حقیقی n، عددی اول است.

او در این ادعا دچار اشتباه شده بود. زیرا فرما از استقرای ناقص استفاده کرده بود و برای $n = ۰,۱,۲,۳,۴$ به نتیجه رسیده بود. اما سال‌ها بعد ریاضی‌دانی به نام اولد نادرستی این حکم را برای $n = ۵$ نشان داد.

$$۲^{۲^۵} + ۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷$$
$$= ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$$

بنابراین با آوردن مثال نقض توسط اولر، حکم کلی فرما رد شد.

توجه : قبلاً گفتیم، دانش‌آموزان برای اینکه ارزش یک گزاره را مشخص کنند، بعضی اوقات نیاز به پژوهش و صرف وقت دارند و این نمونه‌ای از این گزاره‌ها است.

نمونه سؤالات ارزشیابی درس اول

۱ از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

الف) $۳ > -۲$

ب) پنجاهمین رقم بعد از ممیز عدد $\frac{۱}{۷۰}$ برابر ۵ است. $\frac{۱}{۷۰} = ۰/۰\overline{۱۴۲۸۵۷}$

ج) ای کاش می‌توانستم در هوای پاک زندگی کنم.

د) فردا هوا به‌صورت بارانی پیش‌بینی شده است.

۲ دامنه متغیر گزاره‌نمای $\sqrt[۴]{۲x-۱}=۳$ برابر با $[\frac{۱}{۲},+\infty)$ است، مجموعه جواب آن را به‌دست آورید.

۳ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) ۴ عددی گویا است یا $-۳ \geq -۵$.

ب) در یک آزمایش تصادفی $p(s)=۱$ یا $\sqrt[۳]{۲}\in\mathbb{R}$.

ج) ۵ واسطه حسابی بین دو عدد ۱۲۵ و $\frac{۱}{۵}$ است یا ۰ عددی مثبت است.

د) اگر ۵ مربع کامل باشد آن‌گاه فردا باران می‌بارد.

هـ) چهارضلعی مستطیل است اگر و تنها اگر دو قطر آن با هم برابر باشند.

۴ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
				ن	
	چنین نیست که ۵ گنگ باشد		د		
					د
عدد ۱ مربع کامل است					ن

۵ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را ثابت کنید.

الف) $p\wedge(q\vee p)\equiv p$

ب) $p\vee(q\wedge p)\equiv p$

ج) $p\vee F\equiv p$

د) $p\wedge T\equiv p$

هـ) $[(\sim p\vee q) \Rightarrow (\sim p\wedge q)]\equiv p \Leftrightarrow \sim q$

و) $(p\Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q\Rightarrow \sim p)\equiv T$

۶ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall n\in\mathbb{N} : n^{۲}\geq n$

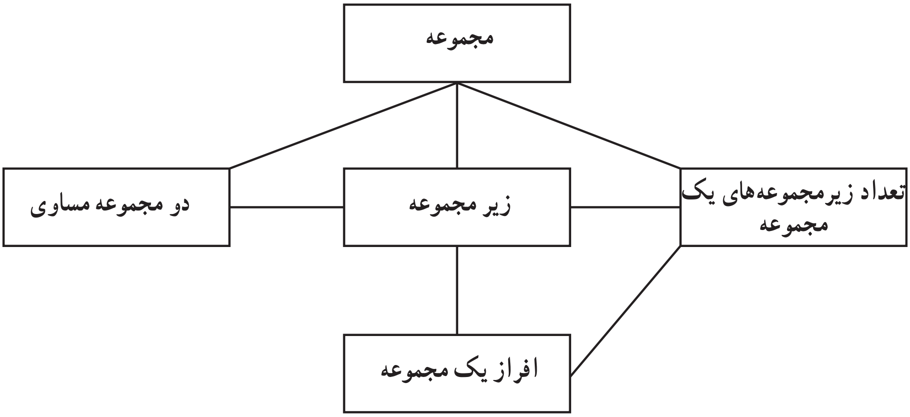
ب) $\exists x\in\mathbb{N} : x+۱\leq ۲$

ج) $\exists x\in\mathbb{Z} : x^{۲}-۳x+۱=۰$

د) $\exists x\in\mathbb{R} : x>۰ \Rightarrow x^{۲}\geq ۱$

درس دوم مجموعه ــ زیرمجموعه

نمودار مفهومی



اهداف

۱ پی بردن به اهمیت و کاربرد نظریه مجموعه‌ها و کاربرد درس ۱ در این درس.

۲ دانش‌آموزان بتوانند مسائل مربوط به تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه را حل کنند.

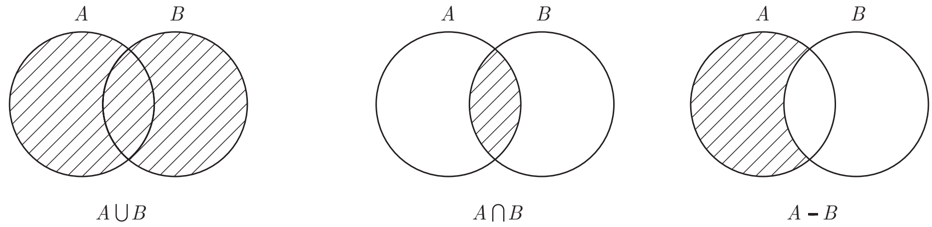
۳ دانش‌آموزان قادر باشند برای یک مجموعه افرازهای متفاوتی را تشکیل دهند.

۴ دانش‌آموزان توانایی بیان ریاضی زیرمجموعه را داشته باشند و از گزاره‌های سوری و نقیض آنها در بیان ریاضی مفاهیم مجموعه‌ها استفاده کنند.

۵ دانش‌آموزان قادر باشند با استفاده از روش عضوگیری دلخواه زیرمجموعه بودن و تساوی بین دو مجموعه را ثابت کنند.

پیش‌دانسته‌ها

* مفهوم مجموعه (گردایه‌ای از اشیاء دوبه‌دو متمایز و مشخص)
* مفهوم عضویت
* مفهوم جزئیت (زیرمجموعه)
* مجموعه تهی، مرجع و متمم
* اعمال اجتماع،اشتراک و تفاضل



سؤال تشخیصی و تکمیلی

۱ اگر $A=\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, b\}, \{b\}\}$ کدام گزاره درست و کدام نادرست است؟

$\{a, \{a\}\} \subseteq A$; $\{a\} \subseteq A$; $\{a\} \in A$

$\{\{a\}, \{b\}\} \subseteq A$; $\{a, b\} \subseteq A$; $\{a, \{a\}\} \in A$

۲ هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

الف) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^{۲} - ۴)(x^{۲} - ۲)(۲x + ۱) = ۰\}$

ب) $B = \{۲^{\frac{n}{۲}} \mid n \in \{۲, ۴, ۶, ۸\}\}$

ج) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid ۴ < x < ۵\}$

دانش افزایی

برای بیان تئوری مجموعه‌ها، ابتدا «مجموعه» و «متعلق است به» را دومفهوم اولیه در نظر می‌گیرند سپس بقیه اصطلاحات و تعاریف را به کمک این دو مفهوم و استفاده از دستور زبان منطق ریاضی بیان می‌کنند.

برای مثال برای تعریف $A \subseteq B$ به کمک روش عضوگیری دلخواه، داریم :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x:\ x \in A \Rightarrow x \in B)$$

همچنین داریم :

الف) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

ب) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

ج) $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

د) اگر A' متمم مجموعه A باشد داریم : $x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$

در کتاب بعد از بیان تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه و افراز یک مجموعه، با روش عضوگیری دلخواه تعدادی خاصیت و قانون بیان و اثبات می‌کنیم، سپس در درس بعدی به کمک این خواص به بیان جبر مجموعه‌ها خواهیم پرداخت.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

مجموعه $A=\{a,b,c\}$ دارای $۸ = ۲^۳$ زیرمجموعه است که هر زیرمجموعه مانند $A=\{a,b\}$ را توسط ارقام ۰ و ۱ و متناظر با یک کد سه‌رقمی به‌صورت ۱۱۰ نشان می‌دهیم. جدول زیر بر اساس این قرار داد تنظیم شده است.

زیر مجموعه	کد سه رقمی		
	c	b	a
$\{a,b,c\}$	۱	۱	۱
$\{a,b\}$	۰	۱	۱
$\{a,c\}$	۱	۰	۱
$\{b,c\}$	۱	۱	۰
{a}	۰	۰	۱
{b}	۰	۱	۰
{c}	۱	۰	۰
{}	۰	۰	۰

به همین ترتیب اگر مجموعه A دارای ۴ عضو باشد، هر زیر مجموعه A را می‌توان توسط یک کد ۴ رقمی متناظر کرد.

$A=\{a,b,c,d\}$

$A_۱=\{a,b,d\} \quad \rightarrow \quad ۱۱۰۱$

$A_۲=\{a,c\} \quad \rightarrow \quad ۱۰۱۰$

$\vdots$

$A_{۱۶}=\{\ \} \quad \rightarrow \quad ۰۰۰۰$

در این مرحله و با استفاده از اصل ضرب که سال گذشته دانش‌آموزان با آن آشنا شده‌اند، می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی را به‌دست آوریم :

اگر $A=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_n\}$ مفروض باشد هر زیرمجموعه از A را می‌توان با یک کد n رقمی که توسط ۰ یا ۱ به ازای هر رقم آن به‌کار می‌بریم، متناظر کرد.

(منظور از تناظر این است که به ازای هر زیرمجموعه یک کد و به ازای هر کد یک زیرمجموعه وجود دارد)

بنابراین تعداد کدهای n رقمی که هر رقم آن ۰ و ۱ باشد برابر است با تعداد زیرمجموعه‌ها و طبق اصل ضرب داریم :

$$\text{تعداد کدها} = \underbrace{۲\times۲\times۲\times\ldots\times۲}_{n\ \text{مرتبه}} = ۲^n$$

افراز یک مجموعه

در بین زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای چون $A=\{a,b,c,d,e\}$، زیر مجموعه هایی یافت می‌شوند که از سه ویژگی برخوردارند.

اول : اینکه هیچ‌کدام تهی نیستند.

دوم : اینکه دوبه‌دو جدا از هم هستند.

سوم : اینکه اجتماع آنها برابر با مجموعه A می‌شود.

روش تدریس

از دانش‌آموزان می‌خواهیم که برای مجموعه‌ای چون $A=\{۲,۴,۶,۸,۹\}$ یک بار دو زیرمجموعه و یک بار سه زیرمجموعه پیدا کنند که سه ویژگی مذکور را داشته باشد.

در حالت اول یک افراز دو عضوی از A داریم و در حالت دوم یک افراز سه عضوی از A خواهیم داشت.

توجه :

اگر بخواهیم تعداد همهٔ افرازهای دو عضوی A را محاسبه کنیم در واقع باید تعیین کنیم به چند صورت می‌توان A را به دو قسمت یا دو زیرمجموعهٔ جدا از هم و ناتهی تقسیم‌بندی کرد.

در بخش احتمال، وقتی که می‌خواهیم قانون احتمال کل و قانون بیز را بیان کنیم، نیاز به مفهوم افراز کردن داریم.

تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی

پیش‌دانسته‌ها

* تعریف توصیفی زیرمجموعه
* آشنایی با سورهای عمومی و وجودی
* نقیض گزاره‌ای که با سور عمومی بیان شده است.
* نقیض یک گزاره شرطی.

روش تدریس

ابتدا از دانش‌آموزان می‌خواهیم که بررسی کنند آیا مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ زیر مجموعه $B=\{۱,۲,۴\}$ هست یا خیر؟

بنابراین برای اینکه نشان دهیم ، $A \not\subseteq B$ ، کافی است یک عضو در A پیدا کنیم که آن عضو در B نباشد، اکنون معادل این گزاره را با زبان ریاضی و با استفاده از سورها می‌نویسیم.

می‌دانیم که $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ زیرا :

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

همچنین می‌دانیم $(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$

بنابراین داریم :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x ;(x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv A \not\subseteq B \Leftrightarrow \sim [\forall x ;(x \in A \Rightarrow x \in B)]$$

بنابراین داریم :

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x : \sim (x \in A \Rightarrow x \in B) \equiv A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x ; (x \in A \wedge x \notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه (برای اثبات زیرمجموعه بودن)

ابتدا برای یادگیری این روش ایجاد انگیزه می‌کنیم، از دانش‌آموزان می‌خواهیم که نشان دهند مثلاً مجموعه $A=\{۲,۴,۶\}$ زیر مجموعه $B=\{۱,۲,۳,۴,۶\}$ است. واضح است که دانش‌آموزان به راحتی و با در نظر گرفتن تک‌تک اعضای A که باید در B باشند، این کار را انجام می‌دهند.

اکنون از آنها می‌خواهیم که با فرض $A \subseteq B$ نشان دهید که $B' \subseteq A'$ است و چون اعضای A و B معلوم و مفروض نیستند، بنابراین به روش قبلی نمی‌توانند این کار را انجام دهند، بنابراین باید از روش عضوگیری دلخواه این حکم در زیرمجموعه‌ها را اثبات کنند، یعنی از آنجا که $A \subseteq B$ و می‌خواهیم ثابت کنیم که $B' \subseteq A'$ باید نشان دهیم که : $B' \subseteq A' \Rightarrow (\forall x : x \in B' \Rightarrow x \in A')$

$$\forall x : x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A'$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید : برای هر x که $x \in B'$ نتیجه گرفتیم که $n \in A'$ پس $B' \subseteq A'$.

سؤال تکمیلی

اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ثابت کنید :

الف) $A \cap C \subseteq B \cap D$ ب) $A - D \subseteq B - C$

از خواص بالا در درس بعدی در اثبات قضیه‌ای استفاده خواهیم کرد.

دو مجموعه مساوی (با زبان ریاضی)

ابتدا تساوی بین دو مجموعه را با شکل و به‌صورت توصیفی بیان کنید. در سال‌های قبل دانش‌آموزان به‌صورت توصیفی مفهوم دو مجموعه مساوی را می‌دانند. اکنون می‌خواهیم با زبان ریاضی تعریف دو مجموعه مساوی را بنویسند.

از دانش‌آموزان بخواهیم که مجموعه‌ای مساوی با مجموعه $A=\{۲,۳,۴,۵\}$ بنویسند و آن را B بنامند.

اکنون ملاحظه می‌کنید که هم $A \subseteq B$ و هم $B \subseteq A$، یعنی هر عضو موجود در A موجود باشد در B هم است و برعکس.

در نتیجه از اینجا تعریف دو مجموعه مساوی را با زبان ریاضی می‌نویسیم.

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall x: x \in B \Rightarrow x \in A)$$

$$\equiv A=B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

مثال. کدام‌یک از روابط زیر درست است.

الف) $\{۱,۲,۳,۴\} = \{۴,۳,۱,۲\}$

ب) $\{۱,۲,۳,\{۴\}\} = \{۱,۲,۳,۴\}$

ج) $\{۱\} = \{\{۱\}\}$

نمونه‌سؤالات ارزشیابی درس دوم

۱ مجموعه $\{۰,۴,۸,۱۲,...\}$ برابر با کدام یک از مجموعه‌های زیر است؟

الف) $\{x \mid x = ۲^k, k \in w\}$ ب) $\{x \mid x = ۴k, k \in w\}$

۲ مجموعه A پنج عضو دارد، این مجموعه چند زیرمجموعه ۲ عضوی، چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟ چرا؟

۳ مجموعه همهٔ زیرمجموعه‌های A دارای ۲۵۶ عضو است، تعداد اعضای A را به‌دست آورید؟

۴ ثابت کنید که برای هر دو مجموعه A و B داریم:

الف) $A \subseteq A \cup B$ ب) $A \cap B \subseteq A$

۵ در هر یک از حالت‌های زیر سه مجموعه مانند A و B و C مثال بزنید به‌طوری که در روابط داده شده صدق کنند.

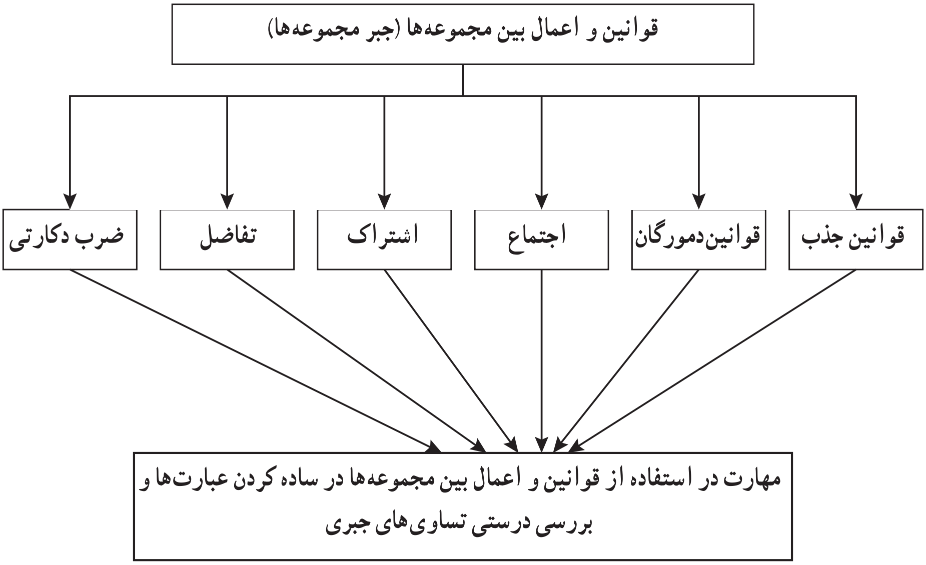
الف) $A \subseteq B \subseteq C$ ب) $B \subseteq C$ و $A \in B$ و $A \subseteq B$

۶ افرازهای دوتایی یک مجموعه سه عضوی را بنویسید.

۷ افرازهای ۲ تایی و افرازهای ۳ تایی یک مجموعه چهار عضوی را بنویسید.

درس سوم : جبر مجموعه‌ها

نقشه مفهومی درس سوم



قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

اهداف درس سوم

۱ آشنایی با اعمال اجتماع، اشتراک، تفاضل و ضرب دکارتی بین مجموعه‌ها و قوانین جذب و دمورگان

۲ مهارت استفاده از نمودار ون و روش عضوگیری برای اثبات درستی تساوی‌های جبری مجموعه‌ها

۳ مهارت ساده کردن عبارت‌ها و بررسی درستی تساوی‌های جبری به کمک قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها

۴ مهارت در تشکیل مجموعه و رسم نمودار مختصاتی عمل ضرب دکارتی بین مجموعه‌ها

روش تدریس

در ابتدای درس، خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای اعمال جمع و ضرب بیان شد، تا زمینه مناسبی برای شروع بررسی این خواص در اعمال بین مجموعه‌ها باشد. واضح است که خاصیت جابه‌جایی و شرکت‌پذیری در اعمال جمع و ضرب برقرار است. همچنین خاصیت توزیع‌پذیری عمل ضرب نسبت به عمل جمع برقرار می‌باشد، ولی خاصیت توزیع‌پذیری عمل جمع نسبت به عمل ضرب برقرار نیست. از دانش‌آموزان خواسته شده که با ذکر یک مثال، نقض این مطلب را نشان دهند. مثل: $\underbrace{(۲+۴)\times(۲+۳)}_{۳۰} \neq \underbrace{۲+(۳\times۴)}_{۱۴}$

در اولین فعالیت دانش‌آموزان خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری را برای اعمال اجتماع و اشتراک ابتدا با کمک نمودار ون و با مثال عددی بررسی می‌کنند. هدف از استفادهٔ نمودار ون این است که بیان تصویری برای اثبات درستی تساوی‌های جبری مجموعه‌ها، به درک بهتر دانش‌آموزان کمک می‌کند.

در کار در کلاس صفحهٔ ۲۸ کتاب، خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای اعمال اجتماع با استفاده از روش عضوگیری اثبات می‌شود. دانش‌آموزان با پر کردن جاهای خالی، اثبات‌ها را کامل می‌کنند و با نحوه اثبات آشنا می‌شوند. با توجه به این کار در کلاس که برای عمل اجتماع بیان شد، می‌توانند تمرین ۱ صفحه ۳۸ کتاب که بررسی خاصیت‌های جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای عمل اشتراک است، را به‌طور مشابه ثابت کنند.

با توجه به تعریف متمم، قوانینی برای اعمال اجتماع و اشتراک مطرح شد. بعد از آن قضیه‌ای مربوط به زیرمجموعه بیان و اثبات شد و قوانین جذب (هم‌پوشانی) مطرح گردید. برای اثبات قوانین جذب، ابتدا از دانش‌آموزان خواسته شده، با استفاده از نمودار ون، درستی این قوانین را نشان دهند و بعد با استفاده از خواص و قوانین بین مجموعه‌ها جاهای خالی را کامل کنند. برای درک بهتر دانش‌آموزان، مثال‌هایی نیز مطرح شده است.

در فعالیت صفحه ۳۲ کتاب، قوانین دمورگان معرفی می‌شوند. دانش‌آموزان با کمک نمودار ون و با مثال عددی، قوانین دمورگان را نتیجه می‌گیرند. پس از آشنایی با قوانین دمورگان، با استفاده از روش عضوگیری و تعریف تساوی بین دو مجموعه، درستی این قوانین را اثبات می‌کنند.

$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$
$$\forall x: x\in(A\cup B)'\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow \sim(x\in A\cup B)\Leftrightarrow \sim(x\in A\vee x\in B)$$
$$\Leftrightarrow x\notin A\wedge x\notin B\Leftrightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Leftrightarrow x\in A'\cap B'$$
$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$
$$\forall x: x\in(A\cap B)'\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow \sim(x\in A\cap B)\Leftrightarrow \sim(x\in A\wedge x\in B)$$
$$\Leftrightarrow x\notin A\vee x\notin B\Leftrightarrow x\in A'\vee x\in B'\Leftrightarrow x\in A'\cup B'$$

حل کار در کلاس صفحه ۳۳ کتاب :

الف)
$$(A-B)'=A'\cup B$$
$$(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$$

ب)
$$(A-B)-C=(A-C)-B$$
$$(A-B)-C=(A\cap B')-C=(A\cap B')\cap C'=(A\cap C')\cap B'=(A-C)\cap B'=$$
$$(A-C)-B$$

پ)
$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$
$$A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')=(A\cap B')\cup(A\cap C')=$$
$$(A-B)\cup(A-C)$$

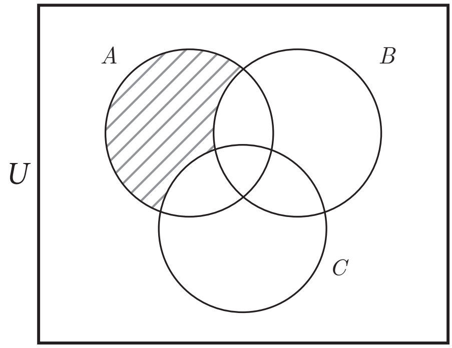
حل کار در کلاس صفحه ۳۴ کتاب :

۱

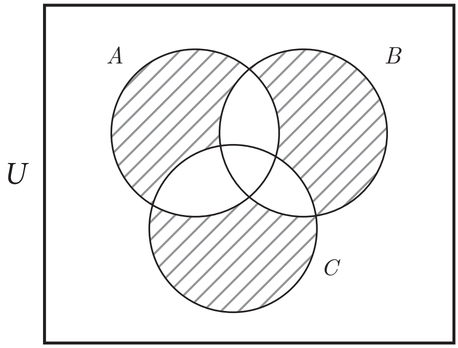
الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}=A=\{۱,۲,\ldots,۱۰\}$

ب) $\underbrace{(A-B)\cup((A\cap B')\cap[\underbrace{\underbrace{(B-A)}_{(B\cap A')}\cup A'}_{A'}])}_{\varnothing}=A-B=\{۱,۲,۳,۴\}$

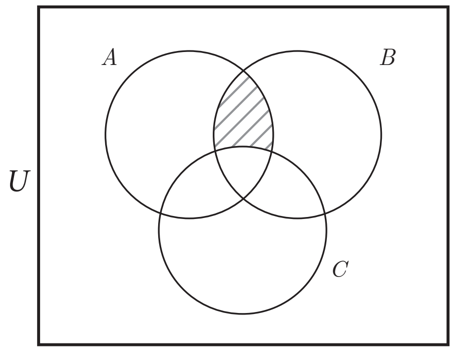
۲ الف) اعضایی که فقط در A باشند.



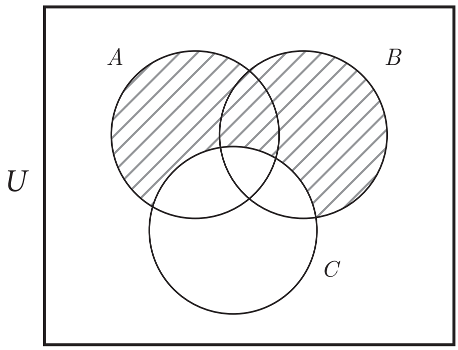
ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه باشند.



پ) اعضایی که در A و B باشند ولی در C نباشند.



ت) اعضایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند.



در صفحه ۳۵ کتاب، عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه معرفی می‌شود. در ابتدا تعریف زوج مرتب بیان شده که دانش‌آموزان از قبل با آن آشنا هستند و می‌دانند برای اعضای زوج مرتب، ترتیب قائل می‌شویم، به‌طوری که $(x,y)\neq(y,x)$ از طرفی شرط لازم و کافی برای اینکه دو زوج مرتب با یکدیگر مساوی باشند، این است که مؤلفه‌های نظیر با هم برابر باشند.

$$(x,y)=(z,t) \Leftrightarrow x=z \wedge y=t$$

سپس تعریف عمل ضرب دکارتی بین مجموعه‌ها همراه با مثالی بیان شده است و این مثال نشان می‌دهد که در عمل ضرب دکارتی خاصیت جابه‌جایی برقرار نیست. یعنی در حالت کلی $A\times B$

با $B×A$ برابر نیست. البته اگر A مساوی با B باشد یا یکی از دو مجموعهٔ A یا B تهی باشد، در این صورت $A×B$ می‌تواند با $B×A$ برابر باشد.

$$A\times B=B\times A \Leftrightarrow A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$$

در کار در کلاس از دانش‌آموزان خواسته شده با استفاده از تعریف ضرب دکارتی و با فرض $n(A)=m$ و $n(B)=k$ نشان دهند:

$$n(A\times B)=mk$$

هر عضو مجموعه A با هرکدام از اعضای مجموعه B تشکیل زوج مرتب می‌دهد و چون تعداد اعضای مجموعه B برابر k عضو است، پس k زوج مرتب تشکیل می‌شود. از طرفی تعداد اعضای مجموعه A برابر m است، پس به تعداد $m×k$ زوج مرتب خواهیم داشت.

$$(n(A)=m \wedge n(B)=k) \rightarrow n(A\times B)=n(A)\times n(B)=m\times k$$

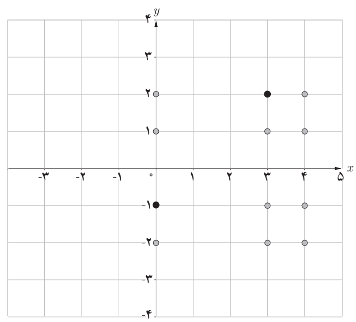
حل فعالیت صفحه ۳۶ کتاب:

۱ $A=\{۱,-۱,۲,-۲\}$ ، $B=\{۰,۳,۴\}$

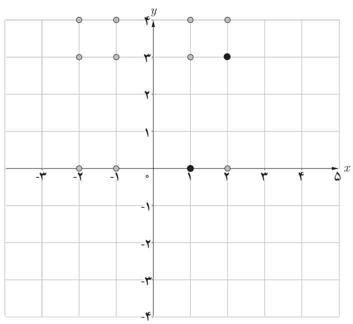
با توجه به اعضای دو مجموعه A و B، اعضای مجموعه ضرب دکارتی $A×B$ و $B×A$ به‌صورت زوج مرتب می‌باشند. هر زوج مرتب (x,y) را به‌صورت نقطه‌ای در دستگاه محورهای مختصات نشان می‌دهیم.

$A\times B=\{(۱,۰),(۱,۳),(۱,۴),(-۱,۰),(-۱,۳),(-۱,۴),(۲,۰),(۲,۳),(۲,۴),(-۲,۰),(-۲,۳),(-۲,۴)\}$

$B\times A=\{(۰,۱),(۰,-۱),(۰,۲),(۰,-۲),(۳,۱),(۳,-۱),(۳,۲),(۳,-۲),(۴,۱),(۴,-۱),(۴,۲),(۴,-۲)\}$



نمودار مختصاتی $B × A$



نمودار مختصاتی $A × B$

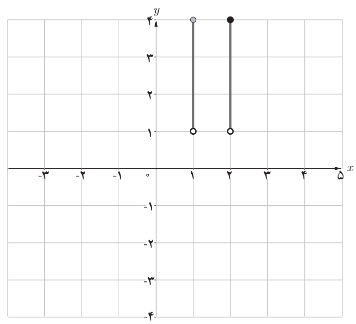
۲ $A=(۱,۴]$ و $B=\{۱,۲\}$

در این قسمت،مجموعه‌های A و B به‌صورت پیوسته (بازه) هستند.

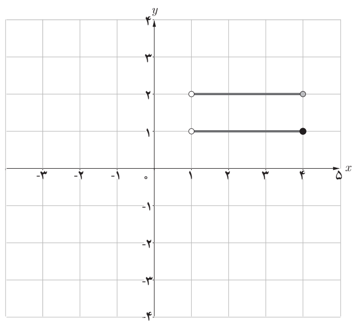
$$A\times B=\{(x,y)|۱<x\leq ۴\wedge(y=۱\vee y=۲)\}$$

$$B\times A=\{(x,y)|(x=۱\vee x=۲)\wedge ۱<y\leq ۴\}$$

همان‌طور که در شکل رسم شده در نمودار مختصاتی کتاب مشاهده می‌شود، مجموعه $A\times B$ شامل همه نقاطی از صفحه مختصات است که طول آن نقاط، هر عدد حقیقی بین ۱ و ۴ می‌تواند باشد، ولی عرض همه نقاط ثابت و برابر ۱ است. پس شکل حاصل از وصل بی‌شمار نقطه به یکدیگر، پاره‌خطی به طول ۳ و موازی محور xها است. به همین ترتیب پاره‌خط بعدی که طول نقاط آن، هر عدد حقیقی بین ۱ و ۴ می‌باشد و عرض همه نقاط آن ثابت و برابر ۲ است، رسم می‌شود.



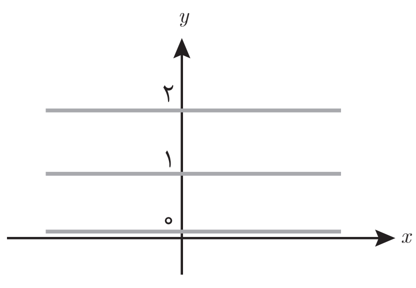
نمودار مختصاتی $B\times A$



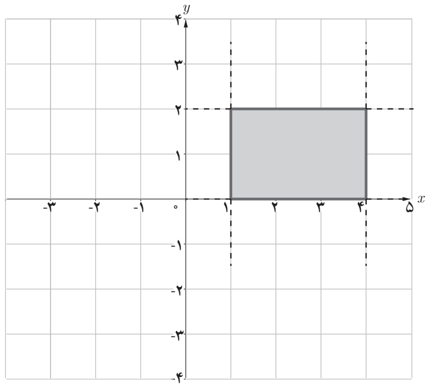
نمودار $A\times B$

۳ $A=\mathbb{R}$ و $B=\{۰,۱,۲\}$

$$A\times B=\{(x,y)|\ x\in\mathbb{R}\wedge(y=۰\vee y=۱\vee y=۲)\}$$



۴ $A\times B=\{(x,y)|\ 1\le x\le 4 \wedge 0\le y\le 2\}$



۵ $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)|\ x\in\mathbb{R} \wedge y\in\mathbb{R}\}$

مجموعه $A\times B$، شامل تمام نقاط صفحه مختصات است.

در کار در کلاس صفحه ۳۷ کتاب، قسمت الف، مسئله $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$ را داریم که به روش برهان خلف اثبات می‌شود. دانش‌آموزان در درس اول صفحه ۱۱ کتاب، با عکس نقیض ترکیب شرطی آشنا شده‌اند و می‌دانند هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

$$p\Rightarrow q\equiv \sim q\Rightarrow \sim p$$

در عکس نقیض ترکیب شرطی، نقیض حکم را نوشته و به‌عنوان فرض جدید در نظر می‌گیریم، سپس در جهت اثبات، به تناقضی با فرض مسئله می‌رسیم.

یکی از روش‌های اثبات در برهان و منطق، استفاده از روش اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف است. در این روش فرض می‌کنیم حکم نادرست است و آن را فرض خلف در نظر می‌گیریم، سپس با استفاده از آن و با توجه به اعمالی که انجام می‌گیرد به تناقضی با فرض مسئله یا تناقضی با عبارت بدیهی می‌رسیم و نتیجه می‌گیریم که فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

$$\varnothing\times A=\varnothing$$

اثبات : فرض کنیم $\varnothing\times A\neq\varnothing$ (فرض خلف)، بنابراین داریم :

$$\exists(x,y)\in(\varnothing\times A)\Rightarrow x\in\varnothing\wedge y\in A$$

گزاره $x\in\varnothing$ همواره نادرست بوده و تالی گزاره شرطی فوق که از فرض خلف حاصل شده، ارزش نادرست داشته و کل گزاره شرطی نادرست خواهد شد (مقدم را درست فرض کرده‌ایم)، یعنی

نمی‌تواند (x,y)ای در $A\times\varnothing$ موجود باشد، که با فرضی که در نظر گرفته‌ایم در تناقض است، بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

توصیه آموزشی

به همکاران محترم توصیه می‌شود :

- به دانش‌آموزان تأکید داشته باشند در هر مرحله برای ساده کردن عبارت‌ها یا بررسی درستی تساوی‌های جبری، از هر خواص، قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها که استفاده می‌کنند، نام آن را بنویسند، چون به درک بهتر آنها از درس کمک می‌کند.
- به اهداف درس توجه شود و از طرح زود هنگام مسائل دشوار اجتناب کنند.

اشتباهات رایج دانش آموزان

ممکن است برخی از دانش‌آموزان در ابتدا برای تشکیل مجموعه‌ای از زوج مرتب‌ها در عمل ضرب دکارتی با مشکل مواجه شوند.

برای رفع این مشکل می‌توانند از جدولی مانند جدول ضرب استفاده کنند. به‌عنوان مثال :

$A=\{a,b\}\quad,\quad B=\{c,d,e\}\quad\rightarrow\quad A\times B=?$

A \ B	c	d	e
a	(a,c)	(a,d)	(a,e)
b	(b,c)	(b,d)	(b,e)

$A\times B=\{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$

حل تمرینات برگزیده درس سوم صفحه ۳۸ کتاب

۱ با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$ اثبات: $A\cap B=\{x\in U\,|\,x\in A\wedge x\in B\}=\{x\in U\,|\,x\in B\wedge x\in A\}=B\cap A$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ اثبات: $\forall x: x\in[A\cap(B\cup C)]\Rightarrow[x\in A\wedge x\in(B\cup C)]$

$$\Rightarrow[x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)]\Rightarrow[(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)]$$
$$\Rightarrow[x\in(A\cap B)\vee x\in(A\cap C)]\Rightarrow x\in[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$$
$$\Rightarrow A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)]$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود : $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$ ، بنابراین داریم :

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

۲ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=(A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')=A\cap U=A$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup A)\cup(B\cup C)=A\cup[A\cup(B\cup C)]=A\cup[(A\cup B)\cup C]$

$A\cup[C\cup(A\cup B)]=(A\cup C)\cup(A\cup B)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

۳ هریک از عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A'\cap B)\cup[(B\cap A)-B']\cap(B\cup A)$

اگر دو عبارت اول را در یک پرانتز قرار دهیم، داریم :

$$\left((A'\cap B)\cup\underbrace{[(B\cap A)\cap B]}_{(B\cap B)\cap A=B\cap A}\right)\cap(B\cup A)=((B\cap A')\cup(B\cap A))\cap(B\cup A)$$
$$=(B\cap(A\cap A'))\cap(B\cup A)=(B\cap U)\cap(B\cup A)=B\cap(B\cup A)=B$$

اگر دو عبارت آخر را در یک پرانتز در نظر بگیریم، داریم :

$$(A'\cap B)\cup\left(\underbrace{[(B\cap A)-B']}_{(B\cap A)\cap B=B\cap A}\cap(B\cup A)\right)=(A'\cap B)\cup\underbrace{((B\cap A)\cap(B\cup A))}_{(B\cap A)}$$
$$=(B\cap A')\cup(B\cap A)=B\cap(A'\cup A)=B\cap U=B$$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

$$[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)=[(A\cup B)\cap A']\cup(A\cap B)=\left[\underbrace{(A'\cap A)}_{\varnothing}\cup(A'\cap B)\right]\cup(A\cap B)$$

$$=(A'\cap B)\cup(A\cap B)=B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U}=B$$

۴ درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cap B')\cup(B\cap A')=[(A\cap B')\cup B]\cap[(A\cap B')\cup A']$

$$\left[(B\cup A)\cap\underbrace{(B\cup B')}_{U}\right]\cup\left[\underbrace{(A'\cup A)}_{U}\cap(A'\cup B')\right]$$
$$=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)-(A\cap B)$$

ج) $B=B\cup(A\cap B)=B\cup(A\cap C)=(B\cup A)\cap(B\cup C)$
$=(A\cup C)\cap(B\cup C)=C\cup(A\cap B)=C\cup(A\cap C)=C$

۵ اگر $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ ، $A=\{y+۲,۵,z\}$، در این صورت با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $x+y+z$ را بیابید. چون در این سؤال $A,B\neq\varnothing$ هستند، پس طبق مسئله کار در کلاس قسمت ب صفحه ۳۷ کتاب داریم :

$$A\times B=B\times A \Rightarrow A=B$$

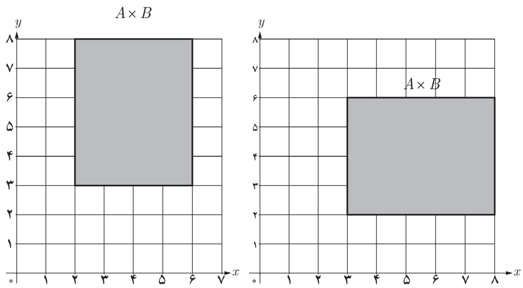
بنابراین : $\{y+۲,۵,z\}=\{x+۱,۴,-۲\}$. بدیهی است که $x+۱$ فقط می‌تواند با عدد ۵ برابر باشد، پس $x=۴$. در این صورت دو حالت خواهیم داشت :

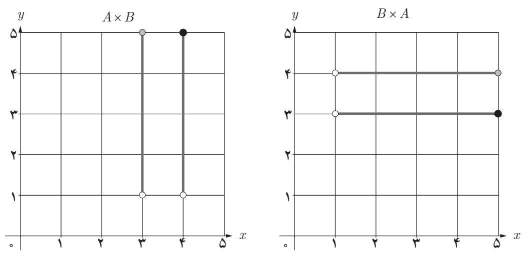
$$\begin{cases} y+۲=۴\rightarrow y=۲ \\ z=-۲ \end{cases} \rightarrow\ x+y+z=۴+۲+(-۲)=۴$$

$$\begin{cases} y+۲=-۲\rightarrow y=-۴ \\ z=۴ \end{cases} \rightarrow\ x+y+z=۴+(-۴)+۴=۴$$

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هریک از حاصل‌ضرب‌های $A\times B$ ، $B\times A$ را رسم کنید.

ب) $A=\{۳,۴\}$ ، $B=(۱,۵]$ پ) $A=[۲,۶]$ ، $B=[۳,۸]$





نمونه سؤال‌های ارزشیابی درس سوم

۱ ثابت کنید اگر $A\subset B$ ، آنگاه $A\cap B'=\varnothing$

۲ ثابت کنید برای هر سه مجموعه A، B، C از $A\subset B$ نتیجه می‌شود : $A\cup C\subset B\cup C$

۳ ثابت کنید اگر $B-A=A-B$، آنگاه $A=B$

۴ x , y را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب زیر با هم مساوی باشند.

الف) $(x+y\ ,\ ۲y+۳)\ ,\ (۲x-۲\ ,\ x-y)$

ب) $(۲y^۲-y\ ,\ ۳x^۲+۱)\ ,\ (y^۲+۶y+۳۰\ ,\ ۴x)$

۵ با روش عضوگیری ثابت کنید برای هر سه مجموعه دلخواه مانند A، B، C داریم :

$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

۶ اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰\leq x\leq ۲\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۱\leq x\leq ۳\}$ باشند، نمودارهای $A\times B$، $B\times A$، $(A\times B)-(B\times A)$ را رسم کنید.

۷ اگر $A=[۰,۱]$ ، $B=\{۰,۱\}$ باشند، نمودارهای مختصاتی $A\times B$، $B\times A$، $(A\times B)\cup(B\times A)$ را رسم کنید.

۸ اگر $A=[۱,۴]$ ، $B=[۳,۵]$ باشند، نمودارهای مختصاتی $A^۲$، $B^۲$، $A^۲-B^۲$ را رسم کنید.

۹ اگر A و B دو مجموعه باشند و $A\cap B=\varnothing$ ، کدام گزاره زیر درست است؟

الف) $(A-B)\cup(B-A)=B$ ب) $(A-B)\cup(B-A)=A\cup B$

پ) $(A-B)\cup(B-A)=A$ ت) $(A-B)\cup(B-A)=A'\cup B'$

۱۰ اگر A و B دو مجموعه از اعداد حقیقی به‌صورت $A=[-۲,۳]$ ، $B=[۲,۵]$ تعریف شوند، مساحت ناحیه $A^۲-A\times B$ را به‌دست آورید.

۱۱ اگر $A=\{a,b,c\}$ ، $B=\{۱,۲\}$، مطلوب است محاسبه : الف) $(B\times A)-(A\times B)$

ب) $B^۲-A^۲$

۱۲ فرض کنید U مجموعه مرجع باشد، تعیین کنید کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است و سپس رابطه درست را بنویسید.

الف) اگر $A=B'$ آنگاه $B=A'$ ب) $(A')'=U$

پ) $(A-B)'=A'-B'$ ت) $(A\cup B)-B=A-B$

ث) $(A-B)\cup B=A-B$ ج) اگر $A\cap B=\varnothing$ آنگاه $A\subseteq B'$

۱۳ ساده شدهٔ متمم عبارت $[A-(A-B)]\cup[A-(B-A)]$ چیست؟

۱۴ اگر $A\cup B=A\cup C$ ، $A-B=A-C$ نتیجه بگیرید : $B=C$

۱۵ از $A\cup B=C$ ، $A\cap B=\varnothing$ نتیجه بگیرید : $A=C-B$

۱۶ درستی تساوی‌های زیر را بدون استفاده از نمودار ون و با استفاده از قوانین موجود در مجموعه‌ها ثابت کنید.

الف) $(A-B)-C=(A-C)\cap(A-B)$ ب) $(A'-B)\cup(B'\cup A)'=A'$

ج) $(A\cap B)-(A\cap B')=A\cap B$

ت) $[A\cup(A\cap B)]'-[B'\cap(A'\cup B')]=B-A$

ث) $[A\cap(A'\cup B)]\cup[B\cap(A'\cup B')]=B$

۱۷ طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cap B\cap C)\cup(A-C)\cup(A\cap B')$ ب) $[(A\cup B)-A']\cup[B'\cap(A\cup B)]$

پ) $[(A\cup U')'\cap A]'-[(A\cap U')'-A']'$ ت) $(A-B)\cup[B\cap(A\cup B)]$

۱۸ با استفاده از نمودار ون نشان دهید اگر $A\subset B$ باشد، نتیجه می‌شود : $B'\subset A'$

۱۹ با کمک نمودار ون درستی تساوی‌های زیر ثابت کنید.

الف) $(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$ ب) $(A-B)\cap C=(A\cap C)-B$

۲۰ اگر $B-C=B'$ ثابت کنید : $(B\cap C')\cup(B'\cap C)=B'$

۲۱ با ذکر یک مثال نشان دهید : $A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-(A\cup C)$

۲۲ اگر $A\cap B=\{x\mid x\in Z, -1\leq x<5\}$ و $A\cap C=\{x\mid x\in Z, -3<x<3\}$ ، حاصل $A\cap(B\cup C)$ را بیابید.

۲۳ اگر $A_n=\{x\mid x\in\mathbb{R}, -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\}$ ، طرف دوم تساوی‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\bigcup_{i=1}^{10} A_i$ ب) $\bigcap_{i=1}^{10} A_i$

۲۴ اگر $U=\{3k+2|k\in N,\ k\leq 7\}$ ، $A=\{3k-1|k\in N,\ 4\leq k\leq 7\}$ ، $B=\{14,17,20\}$ ، $C=B'\cap A$ ، حاصل عبارت $(A\cup B)'\cap C'$ چیست؟

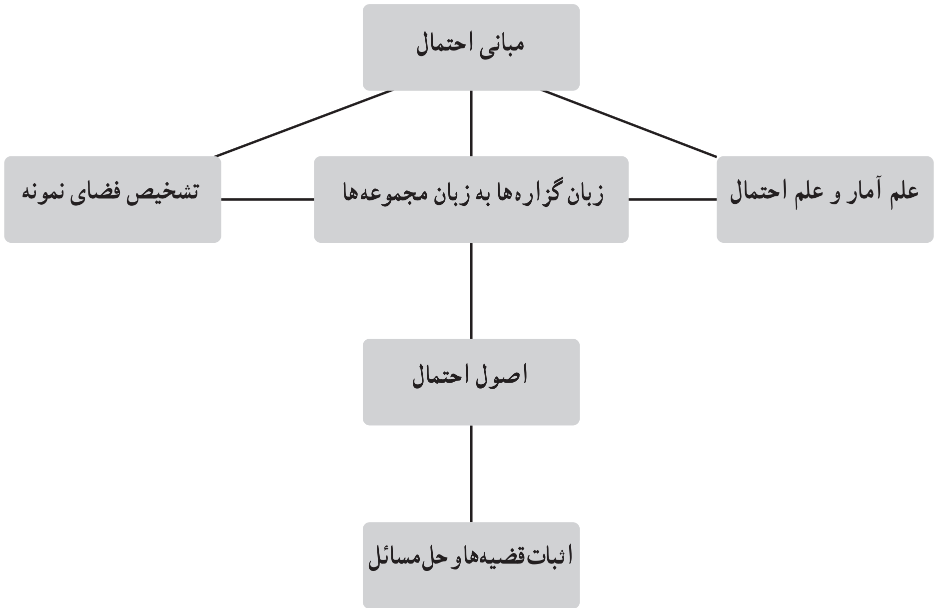
۲۵ اگر Z مجموعه مرجع باشد و $A\cup B'=\{x|x\in Z,\ x^2>25\}$ ، مجموعه $A'\cap B$ را با اعضایش مشخص کنید.

فصل دوم

احتمال

درس اول : مبانی احتمال

نقشه مفهومی



اهداف

۱ توانایی تشخیص علم آمار از علم احتمال در مسائل کاربردی

۲ تبدیل گزاره‌های یک مسئله به زبان مجموعه‌ها در مسائل احتمال

۳ تشخیص ارتباط وقوع پیشامدهای $A_1 \cap A_2$ و $A_1 \cup A_2$ با پیشامدهای A_1 و A_2.

۴ بیان فضای نمونه به شکل حاصل‌ضرب دکارتی و جایگشت در مسائل خاص احتمال

۵ دانستن اصول احتمال و استفاده از آنها در اثبات مسائل

۶ استفاده از قضایا و اصول احتمال در حل مسائل کاربردی

روش تدریس

نخستین درس از فصل دوم به مبانی احتمال می‌پردازد. ترجمه زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها، تشخیص فضای نمونه و استفاده از اصول احتمال در اثبات مسائل و قضیه‌ها، اهم مفاهیم این درس هستند.

شروع درس با طرح مسئله‌ای است که دانش‌آموز را درگیر دو مفهوم «علم آمار» و «علم احتمال» کند و در ادامه به بیان هرکدام از این مفاهیم می‌پردازد. در علم احتمال، یک نمونه نامعلوم از یک جامعه معلوم انتخاب می‌شود و در علم آمار، کار برعکس است، یعنی قرار است یک جامعه نامعلوم را از یک نمونه مشخص مورد ارزیابی قرار دهیم. کار در کلاس صفحه ۴۱ برای تمرین این دو مفهوم است.

فعالیت صفحه ۴۱ و در ادامه، کار در کلاس صفحه ۴۲، مسئله انتخاب لامپ توسط برق‌کار مطرح می‌شود. برق‌کار نیاز به یک لامپ سالم دارد که در جعبه اول و در جعبه دوم به ترتیب ۵ و ۲۰ لامپ موجود بوده به‌طوری‌که در اولی ۳ و در دومی ۱۳ لامپ سالم است. بنابراین در جعبه اول $\frac{۳}{۵}=۰/۶$ و در جعبه دوم $\frac{۱۳}{۲۰}=۰/۶۵$ لامپ‌ها سالم‌اند، پس اگر از جعبه دوم یک لامپ به‌طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال سالم بودن آن بیشتر است. در کار در کلاس صفحه ۴۲، اگر ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبه اول انتخاب کنیم، احتمال اینکه هردو معیوب باشند، $\frac{۱}{۱۰}=\frac{۲\times۱}{۵\times۴}$ و این احتمال برای جعبه دوم $\frac{۲۱}{۱۹۰}=\frac{۷\times۶}{۲۰\times۱۹}$ است، بنابراین احتمال معیوب بودن در جعبه دوم بیشتر است و بهتر است از جعبه اول انتخاب شود.

یکی از مهم‌ترین قسمت‌ها در هر مسئله احتمال، ترجمه زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

است، یعنی دانش‌آموز باید بتواند جمله‌هایی که به زبان معمول نوشته شده‌اند را به شکل مجموعه بنویسد تا در مسئله احتمال، فضای نمونه و پیشامد(ها) مشخص باشد. این کار در صفحات ۴۲ و ۴۳ به آن پرداخته شده است.

کار در کلاس صفحه ۴۳ برای رفع بدفهمی‌هایی است که ممکن است در ذهن دانش‌آموزان وجود داشته باشد. با بحثی که بین زهرا و شبنم انجام می‌شود، باید نتیجه گرفت که وقوع پیشامد {۲,۴,۶}، وقوع پیشامد {۲} را نتیجه نمی‌دهد، درحالی‌که عکس آن صحیح است. به بیان دیگر اگر $A_۱ \subseteq A_۲$ ، وقوع پیشامد $A_۱$، وقوع پیشامد $A_۲$ را نتیجه می دهد. دو مفهوم دیگر نیز در این کار در کلاس وجود دارد که از وقوع $A_۱ \cap A_۲$ و $A_۱ \cup A_۲$ چه نتیجه‌هایی گرفته می‌شود. برای هرکدام می‌توانید شبیه بحث بین زهرا و شبنم، دو مباحثه ساده طرح کنید. مثلاً آیا از وقوع پیشامد {۲,۴,۶} وقوع حداقل یکی از پیشامدهای {۲,۴} و {۲,۶} نتیجه می‌شود یا خیر؟ و اینکه آیا از وقوع پیشامد {۱,۲}، وقوع پیشامدهای {۱,۲,۳} و {۱,۲,۴} نتیجه می‌شود یا خیر؟

فضای نمونه به شکل حاصل‌ضرب دکارتی، آن هم از یک مسئله که نیاز است گزاره‌های ساده آن به زبان مجموعه تعبیر شوند، هدف اصلی مثال صفحه ۴۴ است. طرح سؤالات مشابه این مثال می‌تواند به عمیق شدن این مفهوم کمک کند. تمرین سوم از همین درس و سؤالات ۳ و ۴ از نمونه سؤالات ارزشیابی این درس، مثال‌های دیگری از همین نوع هستند.

بررسی اصول احتمال در صفحه ۴۵ و استفاده مکرر از اصل دوم در اثبات قضیه‌ای که در همین صفحه است، آخرین بحث از این درس است. باید دقت شود که اثبات قسمت پنجم این قضیه به کمک قسمت چهارم است و اثبات به‌طور مستقل برای آن توصیه نمی‌شود. مسائل ارزشیابی از این قسمت، در سطح تمرین ۴ که در صفحه ۴۷ آمده است، توصیه می‌شود و نباید مسائل پیچیده‌ای از این قسمت طرح کرد. به جای آن می‌توان از کاربرد قسمت‌های ۴ و ۵ این قضیه در حل مسائلی شبیه به آنچه در تمرین پنجم این درس است، بهره برد.

۱ اگر احمد را نفر اول و عباس را نفر دوم در نظر بگیریم، فضای نمونه در این بازی به‌صورت زیر است که در آن «س»، «ق» و «ک» به ترتیب وقوع سنگ، کاغذ و قیچی را نشان می‌دهند.

S={(س,س),(ک,س),(ق,س),(س,ق),(ک,ق),(ق,ق),(س,ک),(ک,ک),(ق,ک)}

بنابراین فضای نمونه، ۹=۳×۳ عضو دارد و پیشامدی که احمد در آن برنده است، به‌صورت {(ق,س),(ک,ق),(س,ک)} می باشد.

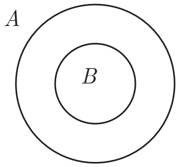
۲ فضای نمونه تمام جایگشت‌های قد این ۱۴ نفر است، پس $n(S)=۱۴!$. اگر A پیشامد این باشد که اولین نفر وارد شده، بلندقدترین عضو تیم باشد، سپس $n(A)=۱۳!$،
بنابراین : $P(A)=\frac{۱۳!}{۱۴!}=\frac{۱}{۱۴}$.

۳ با توجه به حاصل‌ضرب دکارتی زیر برای تمام پیشامدها، $n(S)=۲×۲×۲×۳×۲=۴۸$.

$S=$ {گرم، سرد}×{مرطوب، خشک}×{باد می‌وزد، باد نمی‌وزد}×{نیمه‌ابری، ابری، صاف}

×{عدم بارش باران، بارش باران}

۴ الف) (روش اول) اگر $B\subseteq A$ باشد، با توجه به شکل زیر، پیشامدهای B و $A-B$ ناسازگارند و چون $(A-B)\bigcup B=A$، پس طبق اصول احتمال، $P(A-B)+P(B)=P(A)$.



(روش دوم) طبق یکی از قضایای اثبات شده، $P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)$ و چون $B\subseteq A$، سپس $A\bigcap B=B$ ، بنابراین $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

ب) با توجه به قسمت (الف)، $P(A)=P(A-B)+P(B)$ و چون $P(A-B)\geq ۰$ ، بنابراین $P(B)\leq P(A)$.

۵ اگر $S=\{۱,۲,...,۱۰۰\}$، فضای نمونه و A و B به ترتیب پیشامدهای بخش‌پذیری بر ۲ و ۳ باشند، پیشامد $A\bigcap B$ بخش‌پذیری بر ۶ خواهد بود و داریم :

$$n(S)=۱۰۰\ ,\ n(A)=\left[\frac{۱۰۰}{۲}\right]=۵۰\ ,\ n(B)=\left[\frac{۱۰۰}{۳}\right]=۳۳\ ,\ n(A\bigcap B)=\left[\frac{۱۰۰}{۶}\right]=۱۶$$

بنابراین :

$$P(A)=۰/۵۰\ ,\ P(B)=۰/۳۳\ ,\ P(A\bigcap B)=۰/۱۶$$

بنابراین :

الف) $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=۰/۵+۰/۳۳-۰/۱۶=۰/۶۷$

ب) $P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)=۰/۵-۰/۱۶=۰/۳۴$

پ) $P(A'\bigcap B')=۱-P(A\bigcup B)=۱-۰/۶۷=۰/۳۳$

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ کدام‌یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام‌یک مربوط به علم احتمال است؟

الف) از ۱۰ منطقه شهرداری در یک شهر، ۷ منطقه دارای شاخص آلودگی بیشتر از ۱۵۰ هستند. اگر ۵ منطقه به‌طور تصادفی انتخاب کنیم، چقدر ممکن است که هر ۵ منطقه آلوده باشند؟

ب) شاخص آلودگی ۵ منطقه از ۱۰ منطقه شهرداری یک شهر گردآوری شده است. متوسط میزان آلودگی این مناطق چقدر است؟

۲ در پرتاب یک تاس، کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر پیشامد $\{۱,۳,۵\}$ رخ دهد، وقوع پیشامد $\{۳\}$ نتیجه می‌شود.

ب) اگر پیشامد $\{۱,۳,۵\}$ رخ دهد، وقوع حداقل یکی از پیشامدهای $\{۱,۳\}$ و $\{۱,۵\}$ نتیجه می‌شود.

پ) اگر پیشامد $\{۱\}$ رخ دهد، پیشامدهای $\{۱,۵\}$ و $\{۱,۷\}$ رخ داده است.

۳ برای وضعیت شغلی یک پرسش‌نامه تهیه شده که در آن سؤالاتی مطرح شده است. در هر مورد فضای نمونه پاسخ‌های ممکن را به شکل حاصل‌ضرب دکارتی چند مجموعه نوشته و تعداد اعضای فضای نمونه را مشخص کنید.

الف) جنسیت : مرد یا زن، شاغل : بله، خیر یا پاره‌وقت، تحصیلات : دیپلم یا پایین‌تر، فوق‌دیپلم یا لیسانس، فوق لیسانس یا بالاتر

ب) جنسیت : مرد یا زن، شاغل : بله، خیر یا پاره‌وقت، سطح درآمد : کمتر از ۲ میلیون، بین ۲ تا ۵ میلیون یا بیشتر از ۵ میلیون

۴ در یک بازی تاس، تاسی پرتاب می‌شود، اگر عددی زوج بیاید، دوباره می‌توانیم تاس را پرتاب کنیم و اگر فرد بیاید، کار متوقف می‌شود. فضای نمونه اعداد رو شده در این بازی را به‌صورت حاصل‌ضرب دکارتی چند مجموعه نوشته و تعداد اعداد فضای نمونه را مشخص کنید.

۵ در یک مسابقه فرمول یک، ۲۴ ماشین با یکدیگر مسابقه می‌دهند. اگر ماشین‌ها به ترتیب از خط پایان عبور کنند :

الف) فضای نمونه‌ای که رتبه ماشین‌ها را نشان دهد، چند عضو دارد؟

ب) احتمال اینکه یک راننده خاص، برنده شود چقدر است؟

۶ فقط با استفاده از اصول و قضایای احتمال، گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A-B)=P(A)-P(B)$

ب) $P(B)\leq P(A)$

۷ به کمک اصول احتمال، ثابت کنید که :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

۸ به کمک اصول و قضایای احتمال، ثابت کنید که :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۹ اگر $P(A)=۲P(B)=۳P(A\cap B)$ باشد، حاصل $\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}$ را به‌دست آورید.

۱۰ در شلیک به یک هدف، احتمال اصابت اولین گلوله ۳۷٪ و احتمال اصابت دومین گلوله ۵۳٪ است. اگر احتمال اصابت هر دو گلوله ۲۱٪ باشد، با چه احتمالی فقط یکی از دو گلوله به هدف اصابت خواهد کرد؟

۱۱ در یک استان، ۲۵٪ جرائم در طول روز و ۸۰٪ جرائم در داخل شهر صورت می‌گیرد. اگر تنها ۱۰٪ جرائم خارج از شهر و در طول روز واقع شوند،

الف) در این صورت چند درصد جرائم، داخل شهر و در طول شب اتفاق می‌افتند؟

ب) چند درصد آنها خارج از شهر و در طول شب اتفاق می‌افتند؟

۱۲ عددی به تصادف از مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۹۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این عدد بر ۳ بخش‌پذیر است، ولی بر ۴ بخش‌پذیر نیست؟

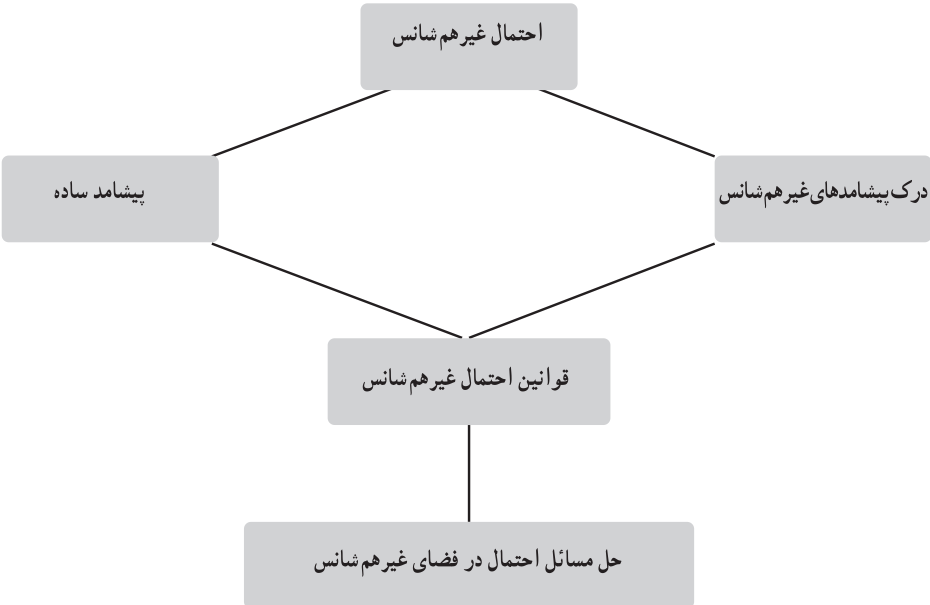
۱۳ دو عدد صحیح را نسبت به یکدیگر اول می‌گوییم، هرگاه تنها مقسوم‌علیه مشترک مثبت آنها ۱ باشد، مثلاً ۸ و ۹ نسبت به یکدیگر اول‌اند درحالی‌که ۸ و ۱۰ نسبت به یکدیگر اول نیستند. یک عدد به‌طور تصادفی از مجموعه $\{۱,۲,۳,...,۷۵\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد نسبت به ۷۵ اول باشد، چقدر است؟

(راهنمایی : با توجه به اینکه $۷۵=۳\times۵^۲$، پس تنها مقسوم‌علیه‌های اول ۷۵، اعداد ۳ و ۵ هستند، بنابراین عدد انتخاب شده نسبت به ۷۵ اول است اگر و تنها اگر مضارب ۳ و ۵ نباشند.)

۱۴ از میان اعداد طبیعی زوج کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این عدد نه بر ۲ بخش‌پذیر است و نه بر ۳.

درس دوم : احتمال غیرهم شانس

نقشه مفهومی



اهداف

۱ شناخت پیشامدهای غیرهم‌شانس در زندگی روزمره و لزوم توجه به آنها

۲ شناخت پیشامدهای غیرهم‌شانس در فضای نمونه‌ای گسسته

۳ محاسبه احتمال پیشامدهای غیرهم‌شانس به کمک قوانین احتمال

روش تدریس

شروع درس با بیان احتمال قهرمانی تیم‌های فوتبالی است که قبل از شروع جام جهانی ۲۰۱۴ به آنها اختصاص داده شده بود. بیان مثال‌های دیگری مانند احتمال بارش باران یا برف در روزهای زمستانی یک سال، ذهن دانش‌آموزان را به این مطلب سوق می‌دهد که در دنیای پیرامون آنها، به‌وفور پیشامدهای غیرهم شانس وجود دارند و هدف این درس، محاسبه احتمال چنین پیشامدهایی است. دقت کنید که احتمال غیرهم‌شانس فقط در فضای نمونه‌ای گسسته مطرح شده است. فعالیت نخست این درس در مورد تاسی است که وجه‌های آن اعداد ۱، ۲ و ۳ با پراکندگی‌های مختلف هستند، بنابراین شانس مشاهده آنان یکسان نیست. حل کار در کلاس صفحه ۵۰ توسط دانش‌آموزان، می‌تواند معلم را در تشخیص اینکه مطالب درسی به درستی تفهیم شده‌اند، کمک شایانی کند.

توصیهٔ آموزشی

وقت خود را معطوف به حل مسائلی که در آنها پیشامدهای غیرهم شانس در فضای نمونه‌ای پیوسته مطرح می‌شوند، نکنید.

حل تمرین‌های صفحه ۵۱

۱ با توجه به اینکه P (پشت) $=\frac{۱}{۲}$ P (رو) و ۱ = P (پشت) + P (رو)، بنابراین $\frac{۱}{۳}=$ P (رو) و $\frac{۲}{۳}=$ P (پشت)

۲ $P(a)=Ka$ که در آن $۱\le a\le ۶$.

$$P(۱)+P(۲)+\ldots+P(۶)=۱\Rightarrow K+۲K+\ldots+۶K=۱\Rightarrow K=\frac{۱}{۲۱}$$

بنابراین

$$P(\{۱,۲,۳\}) = P(۱) + P(۲) + P(۳) = \frac{۱}{۲۱} + \frac{۲}{۲۱} + \frac{۳}{۲۱} = \frac{۲}{۷}$$

۳

$$P(B) = \frac{۳}{۵} \Rightarrow P(\{a,b,c,d\}) = \frac{۳}{۵} \Rightarrow P(\{a,b\}) + P(\{c,d\}) = \frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۷} + P(\{c,d\}) = \frac{۳}{۵} \Rightarrow P(\{c,d\}) = \frac{۱۱}{۳۵} \Rightarrow P(C') = \frac{۱۱}{۳۵}$$

۴ اعداد $P(z)$ ،$P(y)$ و $P(x)$ یک دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{۱}{۴}$ هستند، بنابراین :

$$\begin{cases} P(y) = P(x) + \frac{۱}{۴} \\ P(z) = P(y) + \frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow P(z) = P(x) + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = P(x) + \frac{۱}{۲}$$

از سوی دیگر $P(x) + P(y) + P(z) = ۱$، پس $P(x) + P(x) + \frac{۱}{۴} + P(x) + \frac{۱}{۲} = ۱ \Rightarrow P(x) = \frac{۱}{۱۲}$

پس $P(y) = \frac{۴}{۱۲}$ و $P(z) = \frac{۷}{۱۲}$.

۵ اگر $P_K = (۲k - ۱)x$ احتمال اصابت دارت به ناحیه K ام باشد، با توجه به اینکه مجموع احتمال اصابت به کل نواحی برابر با یک است، پس :

$$P_۱ + P_۲ + P_۳ + P_۴ + P_۵ = ۱ \Rightarrow x + ۳x + ۵x + ۷x + ۹x = ۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲۵}$$

بنابراین

الف) $P_۱ = \frac{۱}{۲۵}$, $P_۲ = \frac{۳}{۲۵}$, $P_۳ = \frac{۵}{۲۵}$, $P_۴ = \frac{۷}{۲۵}$, $P_۵ = \frac{۹}{۲۵}$

ب)

$$\begin{cases} P(\{۱,۳,۴\}) = P_۱ + P_۳ + P_۴ = \frac{۱}{۲۵} + \frac{۵}{۲۵} + \frac{۷}{۲۵} = \frac{۱۳}{۲۵} \\ P(\{۲,۵\}) = P_۲ + P_۵ = \frac{۳}{۲۵} + \frac{۹}{۲۵} = \frac{۱۲}{۲۵} \end{cases}$$

بنابراین احتمال اصابت دارت به ناحیه‌های اول، سوم یا چهارم بیشتر از احتمال اصابت دارت به ناحیه دوم یا پنجم است.

نمونه سؤالات ارزشیابی (درس دوم)

۱ روی یک تاس، ارقام ۱، ۲، ۲، ۳، ۳ و ۳ نوشته شده است. در پرتاب این تاس،

الف) احتمال مشاهده هریک از اعداد ۱، ۲ و ۳ را به‌دست آورید.

ب) چقدر احتمال دارد که عددی اول دیده شود.

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال روشدن مضارب ۳، نصف احتمال روشدن سایر اعداد است. در یک پرتاب، چقدر احتمال دارد که عددی بزرگ‌تر از ۴ ظاهر شود؟

۳ دو مرد و سه زن در یک مسابقه قرعه‌کشی شرکت کرده‌اند. احتمال برد هر زن دو برابر احتمال برد هر مرد است.

الف) احتمال برنده شدن یک زن خاص چقدر است؟

ب) احتمال برنده شدن زنان چقدر است؟

۴ در فضای نمونه‌ای $S=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ ، اگر $P(\{a_۲,a_۳\})=\frac{۱۱}{۱۶}$ و $P(\{a_۳,a_۴\})=\frac{۱}{۲}$ و $P(a_۴)=\frac{۱}{۴}$ و $P(a_۱)$ را به‌دست آورید.

۵ اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{a,c,d\}$ دو پیشامد باشند به‌طوری که $P(A)=\frac{۳}{۴}$ و $P(B)=\frac{۴}{۵}$ ، حاصل $P(C')$ را به‌دست آورید که $C=\{b,d\}$.

۶ در فضای نمونه‌ای $S=\{x_۱,x_۲,...,x_۵\}$ ، داریم :

$$P(x_i)=\frac{۱}{i}P(x_{i+۱}) \quad ; \quad ۱\leq i\leq ۴$$

مطلوب است محاسبه $P(\{x_۲,x_۴\})$.

۷ تاسی به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال روشدن هرعدد متناسب با مربع آن عدد است. اگر این تاس را پرتاب کنیم، با چه احتمالی عدد روشده بین ۲ و ۶ است.