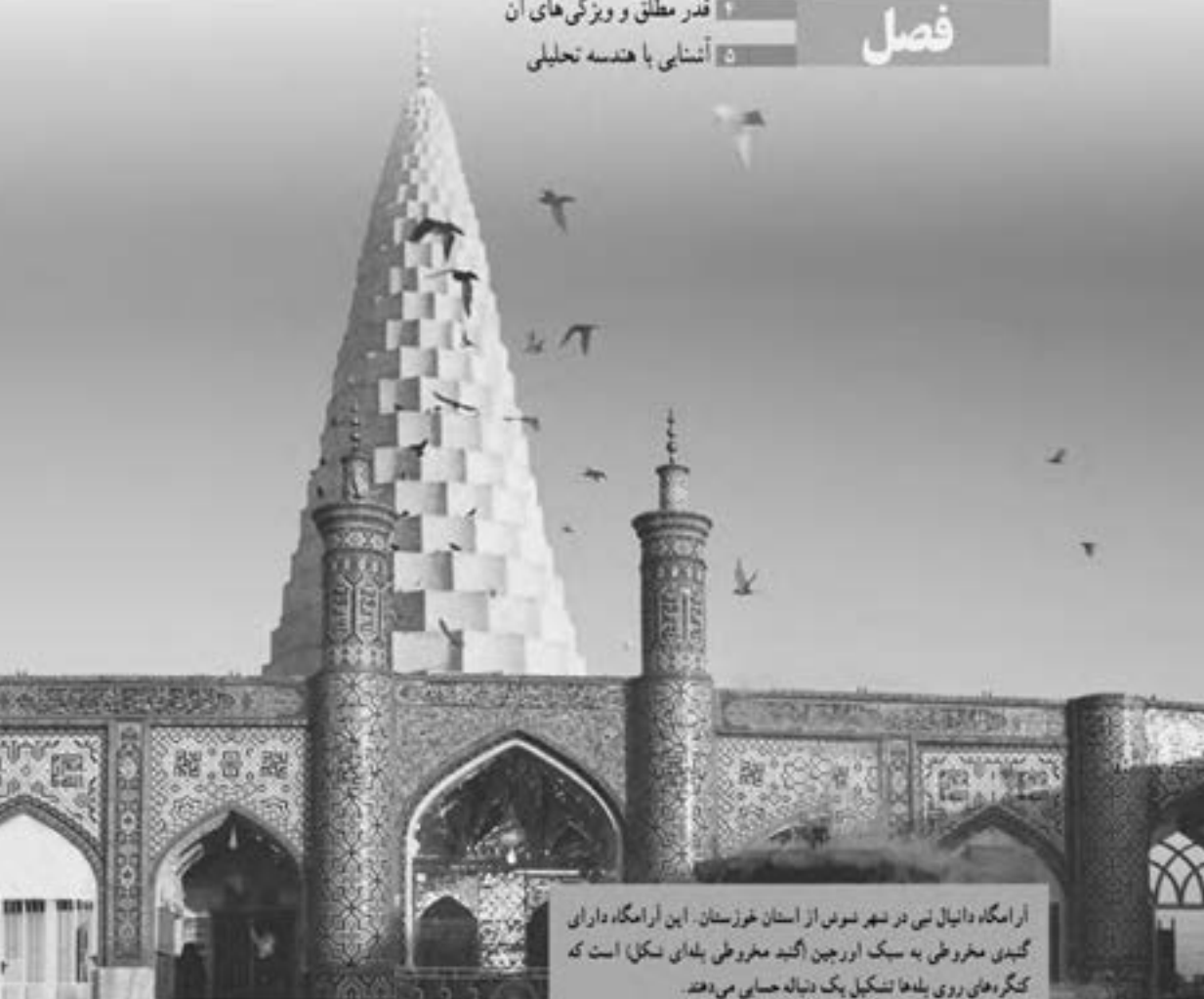


# جبر و معادله

- ۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
- ۲ معادلات درجه دوم
- ۳ معادلات گویا و گنگ
- ۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن
- ۵ آشنایی با هندسه تحلیلی



## فصل



آرامگاه دانیال نی در شهر شوس از استان خوزستان. این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورجین گنبد مخروطی بلدای شکل است که کنگره‌های روی بلدها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

## جبر و معادله

### اهداف کلی فصل ۱

- ۱ آشنایی با مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
- ۲ تعمیق کار با معادلات درجه دوم و آشنایی با روابط بین ضرایب و ریشه‌ها
- ۳ آشنایی با صفرهای تابع و حل معادلات دو مجذوری
- ۴ استفاده از معادله درجه دوم در مدل‌سازی برخی از پدیده‌های طبیعی
- ۵ آشنایی با معادلات شامل عبارات‌های گویا و گنگ و استفاده از آنها در حل مسائل
- ۶ آشنایی بیشتر با قدر مطلق و ویژگی‌های آن
- ۷ رسم نمودار توابع قدر مطلق و حل معادلات قدر مطلق
- ۸ آشنایی با روش هندسی در حل برخی از معادلات
- ۹ آشنایی بیشتر با هندسه مختصاتی و استفاده از آن در حل مسائل
- ۱۰ فرمول‌بندی کردن مسائل واقعی با زبان ریاضی (مدل‌سازی)

### عملکرد مورد انتظار از دانش آموزان

دانش آموزان باید بتوانند :

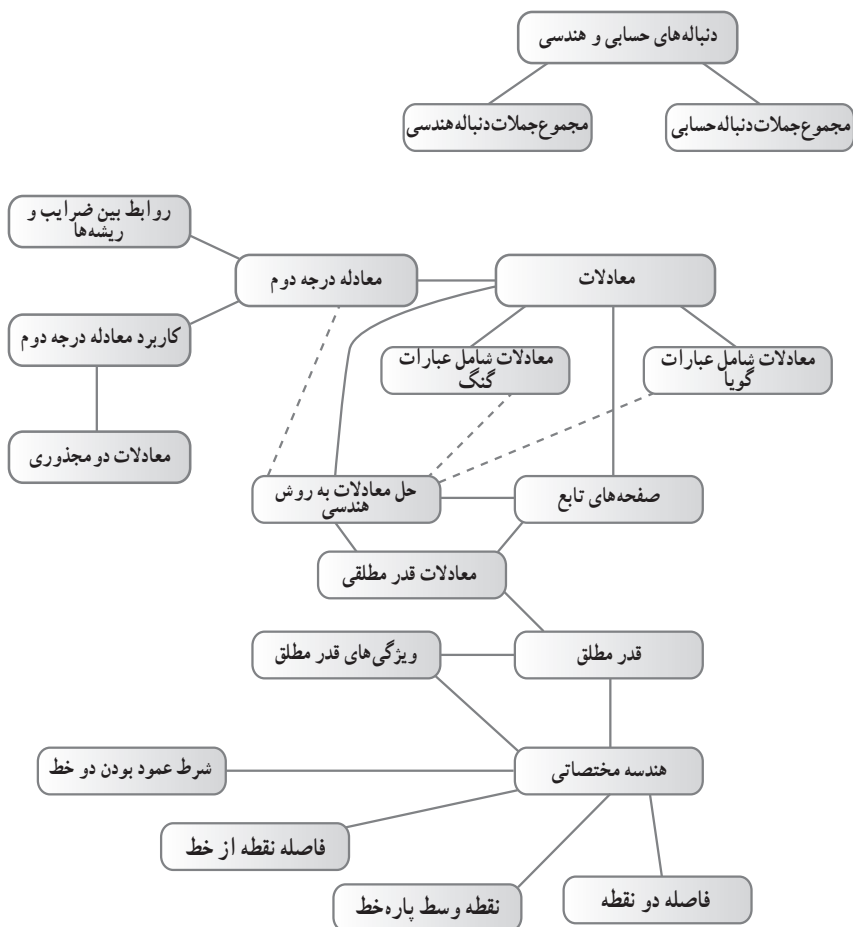
- ۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی را به دست آورند و در حل مسائل از آنها استفاده کنند.
- ۲ روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله درجه دوم را بشناسند و با استفاده از آنها معادلات درجه دوم را حل کنند و ارتباط بین آنها و نمودار هندسی درجه دوم را درک کنند.

- ۳ مسائل واقعی را به زبان معادلات بنویسند و معادلات شامل عبارت‌های گویا و گنگ را به روش جبری حل کنند و جواب‌های به‌دست آمده را تفسیر کنند.
- ۴ ویژگی‌های قدر مطلق را بشناسند و در حل مسائل از آنها استفاده کنند.
- ۵ توابع قدر مطلق را رسم کنند.
- ۶ معادلات قدر مطلق ساده را حل کنند.
- ۷ از طریق نمودار؛ تعداد و مقدار تقریبی جواب‌های معادلاتی که با رسم تابع آن‌آشنایی دارند را پیدا کنند.
- ۸ در مواجهه با مسائل جدید از تجربیات خود استفاده کنند و استراتژی‌هایی مانند رسم شکل، حل مسائل در حالات خاص و تعمیم آن را به کار ببرند و مسائل را به روش‌های مختلف مورد بررسی قرار دهند.

## پیش‌نیازها

- ۱ آشنایی با محاسبات جبری
- ۲ آشنایی با دنباله‌های حسابی و هندسی
- ۳ آشنایی با قدر مطلق و مفهوم آن
- ۴ آشنایی با معادله درجه اول و دوم و روش‌های حل آنها.

## نقشه مفهومی فصل ۱



## زمان بندی پیشنهادی

پیشنهاد می شود این فصل در ۶ هفته آموزشی تدریس و تمرین شود.

## نگاه کلی به فصل

هدف اصلی این فصل ایجاد مهارت های محاسباتی لازم در محاسبات جبری و حل معادلات است. با این حال روش های آموزشی انتخاب شده در این فصل به گونه ای نیست که دانش آموزان صرفاً محاسبات صوری انجام دهند و جواب هایی برای معادلات به دست آورند بلکه درک روش ها و ارتباط آنها با دنیای واقعی از اهداف مهم این فصل و سایر فصول است.

روش آموزشی این فصل بر مبنای فعالیت و طرح مسائل مناسب و راهنمایی قدم به قدم دانش آموز برای حل مسائل است. با این روش دانش آموزان علاوه بر آنکه مجبور خواهند بود خودشان عملیات جبری را انجام دهند، معنای آن را درک می کنند. بنابراین قوام و دوام مفاهیم بیشتر خواهد بود. لذا در برخی از موارد خواسته شده است مسائل را به روش های مختلف حل کنند تا با بازنمایی های مختلف از مطلب مورد نظر روبه رو شوند.

هر چند مباحث این فصل به نظر می رسد که ساختمانی جدا از هم دارند اما در بستر تعریف جبر همگی قرار خواهند گرفت. این مطالب در راستای نیازهای علمی دانش آموزان در این پایه می باشند و طرح آنها الزامی بوده است.

## مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی



### درس

#### اهداف درس

۱ مجموع جملات دنباله حسابی متناهی

۲ مجموع جملات دنباله هندسی متناهی

#### روش تدریس

دانش‌آموزان در سال قبل با دنباله حسابی و هندسی آشنا شده‌اند. ضمن یادآوری آنها با تمرکز روی محاسبه مجموع اعداد طبیعی ۱ تا  $n$  به ایده مناسبی برای مجموع جملات دنباله حسابی می‌رسیم. در فعالیت ابتدایی این درس با چینش‌های مختلف مجموع تعدادی دکمه را محاسبه می‌کنیم و به یک فرمول برای محاسبه این مجموع می‌رسیم سپس وارد دنباله حسابی به صورت کلی‌تر می‌شویم و در فعالیت صفحه ۳ به فرمول مربوط به مجموع جملات دنباله حسابی می‌پردازیم.

کار در کلاس صفحه ۴ دو هدف عمده دارد. نخست در قسمت اول به بازنمایی دیگری از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌پردازیم و در قسمت دوم به یک کاربرد از فرمول پرداخته می‌شود. مثال حل نشده در صفحه ۴ می‌تواند نحوه مدل‌سازی و حل یک نمونه از مسائل مربوط به این قسمت را مورد بررسی قرار دهد.

فعالیت صفحه ۴ برای محاسبه مجموع جملات دنباله هندسی است. البته در بند (۱) حالت خاص آن را که قدر نسبت دنباله برابر یک است، استثنا کرده‌ایم و در ادامه روند فعالیت دانش‌آموزان به دلیل این استثنا پی خواهند برد (در فرمول؛ مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد).

سپس با مشابهتی که با بخش قبل دارد دانش‌آموزان فرمول مورد نظر را استخراج می‌کنند. در کار در کلاس صفحه ۵ یک مسئله ساده محاسباتی برای تثبیت فرمول آمده است.

در ادامه یک مسئله کاربردی آورده شده و هدف ضمنی آن نحوه مدل‌سازی کردن و حل نامعادله ساده و جزئیات محاسباتی است که به دانش‌آموزان گوشزد می‌شود.

یک نکته اینکه هنگام معکوس کردن کسرها در طرفین نامعادله جهت آن تغییر می‌کند و دیگر روش آزمایش و خطا برای حل نامعادله است.

در کار در کلاس صفحه ۶ با تمرکز روی داستان مخترع شطرنج که در خواندنی صفحه ۵ آمده است با یک تکنیک محاسباتی دیگر در تخمین جواب یک مسئله آشنا خواهند شد.

تمرینات این درس چند نمونه از مسائل متنوع است که دانش‌آموزان در منزل به حل آنها پرداخته و در جلسه حل تمرین، نکات ضروری در حل مسائل گوشزد خواهند شد.

## توصیه آموزشی

همکاران محترم توجه دارند که بحث دنباله‌های حسابی و هندسی (و در قبل تر تصاعد حسابی و هندسی) از مباحث قدیمی است که از آنها سؤالات متنوع و بسیار سختی می‌توان طرح کرد.

هدف آموزشی کتاب درسی در حد شناخت مجموع و محاسبات معمولی و تمرکز بر مدل‌سازی و شهود است و توصیه می‌شود دانش‌آموزان را درگیر محاسبات پیچیده نکنیم و از طرح مسائل دشوار در کلاس خودداری شود.

## معادلات درجه دوم

۲

درس

### اهداف درسی

- ۱ آشنایی با روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم
- ۲ آشنایی با صفر تابع و تعیین صفرهای توابع درجه دوم
- ۳ آشنایی با نمودار تابع درجه دوم و تعبیر هندسی آن
- ۴ حل معادلات دو مجذوری
- ۵ آشنایی با روش هندسی (نموداری) حل معادلات

### روش تدریس

با یادآوری معادله درجه اول و درجه دوم و روش حل آنها؛ کار در کلاس صفحه ۷ با هدف یادآوری حل معادله درجه دوم به مطلب ورود پیدا می‌کنیم.

در فعالیت صفحه ۸ ابتدا با استفاده از حل معادله درجه دوم روابط بین ریشه‌ها و جواب‌ها را حدس می‌زنند. البته از این چهار معادله اطلاعات یکی به صورت کامل آمده است و یکی از معادلات در کار در کلاس قبل حل شده است. معادله سوم را نیز از طریق مربع کامل به جواب مضاعف ۱ می‌رسند که در جدول این عدد یک دو بار تکرار می‌شود. یعنی ریشه مکرر دارد تنها معادله ردیف چهارم نیاز به حل دارد. پس از یافتن ارتباط بین ستون‌های جدول در بند (۳) حدسی که زده شده است به صورت کلی اثبات می‌شود و به یک جمع بندی نهایی در این رابطه خواهیم رسید که در کادر مشخص شده است. مثالی که بعد آن زده شده است تکرار بند (۲) کار در کلاس صفحه قبل است که با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها حل شده



است که می‌تواند با تطابق جواب‌ها از کار در کلاس قبل و جواب‌های این مثال باشد و به تسلط بیشتر در حل مسئله منجر شود.

در فعالیت صفحه ۹ به دنبال رابطه‌ای بین حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد و ضریب یک معادله درجه دوم هستیم. در بند (۱) ساخت یک معادله درجه دوم با دانستن جواب‌های آن است که از دانش‌آموزان می‌خواهیم، روند کار را توضیح دهند و در بند (۲) تعمیم مطلب قسمت قبل مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتیجه این فعالیت در کادر پایین آن آمده است. کار در کلاس صفحه ۹ با هدف تثبیت مطالب آموخته شده انجام می‌شود. سپس در یک مثال کاربردی استفاده دیگری از نتیجه فعالیت قبل خواهد شد. در فعالیت صفحه ۱۰ هدف معرفی صفرهای تابع است.

در بند (۱) از طریق جبری معادله  $f(x) = 0$  حل می‌شود. سپس جواب‌های به دست آمده را با جواب‌های طول تلافی نمودار یا محور  $x$ ‌ها تطبیق داده و ارتباط بین این دو مطلب درک خواهد شد و در یک کادر ضمن معرفی صفرهای یک تابع به یک جمع بندی برای فعالیت فوق خواهیم پرداخت.

در کار در کلاس صفحه ۱۰ حالات دیگری از تابع و صفرهای آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. حالتی که تابع هیچ صفری ندارد و یا دقیقاً یک صفر دارد. به دنبال آن مثال صفحه ۱۱ به یادآوری تجزیه یک عبارت درجه دوم و ارتباط آن با ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم می‌پردازد. از این مثال برای تجزیه عبارت‌های درجه دوم می‌توان استفاده کرد.

مثال دیگر صفحه ۱۱ یافتن معادله یک تابع درجه دوم (سه‌می) از طریق نمودار آن است که به چند روش می‌توان این کار را انجام داد.

در روش اول استفاده از صفرهای تابع و نتیجه مثال قبل و در روش دوم استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها در معادله درجه دوم یک بازنمایی دیگر از مطلب است. البته روش سومی هم وجود دارد که به دلیل کمبود زمان تدریس به آن نپرداخته‌ایم ولی در صورت امکان می‌توان از آن استفاده کرد و آن روش ساخت سه معادله و سه مجهول براساس سه نقطه خاص (نقاط تلافی با محورها) می‌باشد که از حل دستگاه پارامترهای عبارت درجه دوم به دست خواهند آمد.

کار در کلاس صفحه ۱۲ یک جمع بندی کامل از کلیه مطالبی است که در این بخش مورد مطالعه قرار گرفته است. در بند (۱) با توجه به نمودارها و صفرهای تابع به وضعیت ریشه‌های معادله درجه دوم و علامت آنها می‌پردازیم.

در بند (۲) با استفاده از نمودارها به علامت‌های پارامترهای  $a, b, c$  خواهیم پرداخت. لازم است مشابه تذکری که در زیر جدول آمده است برای تکمیل هر ستون جدول استدلالی مشابه انجام شود.

این کار در کلاس علاوه بر تثبیت مطالب به تعمیق مفاهیم آموخته شده نیز می‌پردازد و به یک جمع‌بندی از تابع درجه دوم؛ صفرهای آن و تعبیر هندسی نمایش آن خواهد پرداخت. در صفحه ۱۳ ابتدا یک مثال آمده است که هدف آن یافتن صفرهای یک تابع از طریق دانستن یکی از صفرهای آن می‌باشد. هدف اصلی این مثال تذکر این مطلب است که اگر چند جمله‌ای  $p(x)$  بر  $x - a$  بخش‌پذیر باشد آن‌گاه  $p(a) = 0$ ، از این مطلب در جاهایی که نیاز به تجزیه یک چند جمله‌ای است استفاده می‌شود. خصوصاً در بخش حد تابع در حالت  $x \rightarrow a$  وقتی  $x$  که نیازمند عامل  $x - a$  در صورت و مخرج کسر و حذف آنها خواهیم بود.

البته با محدودیت‌هایی که در بخش حد آمده است کمتر از این نکته استفاده خواهد شد ولی به‌عنوان یک نکته اساسی در جبر توابع به آن توجه خواهیم کرد. یادآور می‌شویم که ذکر این مطلب در همین حد باشد و وارد مسائل بخش‌پذیری چند جمله‌ای که در عمده کتاب‌های قبل وجود دارد نشویم و شاخ و برگ اضافی به مطلب ندهیم.

کار در کلاس صفحه ۱۳ با هدف روش حل معادلات دو مجذور می‌باشد و به‌عنوان یک هدف اصلی با محوریت صفرهای تابع بیان شده است. در این مثال به روش حل معادلاتی که می‌توان آنها را به معادلات درجه دوم تبدیل کرد خواهیم پرداخت و در کار در کلاس انتهای این صفحه به تثبیت این مطلب پرداخته می‌شود. در فعالیت صفحه ۱۴ به روش هندسی حل معادلات می‌پردازیم. در بند (۱) یک معادله درجه دوم آمده است که ابتدا آن را به روش جبری حل می‌کنیم و در بند (۲) با رسم توابع داده شده به ارتباط بین جواب‌های جبری و طول نقاط تلاقی نمودارها می‌پردازیم و در پایان ضمن جمع‌بندی فعالیت روش هندسی (نموداری) حل معادلات در یک کادر به‌عنوان نتیجه فعالیت آمده است. حل مثال بعدی به برخی از جزئیات این روش مربوط می‌شود.

توجه داشته باشیم که به علت محدودیت در نوع توابعی که تا اینجا می‌شناسند از مثال‌های محدودی می‌توانیم استفاده کنیم مثال‌هایی از جنس درجه اول، درجه دوم و قدر مطلق اما با جلوتر رفتن در فصل‌های بعد امکان آوردن مثال‌هایی که توابع رادیکالی کسری، نمایی و لگاریتمی و مثلثاتی نیز وجود داشته باشد می‌باشد.

## ۳

## درس

## معادلات گویا و گنگ

## اهداف درس

- ۱ آشنایی با معادلات شامل عبارت‌های گویا و حل آنها و یافتن مجموعه جواب
- ۲ آشنایی با معادلات شامل عبارت‌های گنگ و حل آنها و یافتن مجموعه جواب
- ۳ توانایی مدل‌سازی مسائل با استفاده از معادلات گویا و گنگ

## روش تدریس

رویکرد کلی این بخش با طرح یک مسئله و یافتن حالات مختلف برای جواب آن است. مثال حل شده ابتدای درس ضمن مدل‌سازی یک پدیده طبیعی (پیرامونی) به حالات مختلف حل مسئله می‌پردازد. در دو حالت مسئله حل شده است و حالت سوم به عنوان کار در کلاس با هدف تکمیل مطلب مطرح می‌شود. سپس به یک جمع‌بندی برای حل معادلات شامل عبارت‌های گویا در صورت و مخرج کسرها و روش حل آن می‌پردازیم. به دانش‌آموزان متذکر می‌شویم که ممکن است برخی از جواب‌های حل معادله مورد قبول نباشند (در دامنه مورد بحث نباشند) در مثال بعد ضمن توضیح روش حل به اینکه جواب‌های معادله نباید مخرج کسرها را صفر کنند توجه می‌شود.

در کار در کلاس صفحه ۱۹ در بند (۱) این مطلب تثبیت می‌شود. در بند (۲) با معرفی نسبت طلایی به حل یک مسئله در این مورد می‌پردازیم. در خواندنی کنار مسئله با مفهوم نسبت طلایی و کاربرد آن در ساخت بناهای مختلف پرداخته شده است. از آنجا که عدد طلایی یک عدد گنگ است لذا در مسائل واقعی تقریبی از جواب، مورد نظر است.

در صفحه ۲۰ با طرح یک مسئله به معادلات گنگ می‌رسیم. مدل‌سازی مسئله از مهم‌ترین اهداف این قسمت است که با جزئیات مطرح شده است و پس از حل و بررسی این مسئله به معرفی معادلات گنگ و روش حل آن پرداخته می‌شود. در حل معادلات گنگ تا مجبور نباشیم به تعیین دامنه نمی‌پردازیم. روش متداول، حل مسئله و کنترل جواب‌های به‌دست آمده در معادله اولیه است.

از آنجا که در فرایند حل مسئله گاهی طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم ممکن است علامت یک طرف حذف شود و جواب به‌دست آمده مورد قبول نباشد (جواب خارجی). البته در برخی موارد توجه به دامنه مسئله می‌تواند حل مسئله را کوتاه‌تر کند.

کار در کلاس صفحه ۲۱ به تثبیت و تعمیق مطلب می‌انجامد. در بند (۱) با مدل‌سازی یک مسئله ساده و تشکیل معادله گنگ به حل آن می‌پردازیم و در بند (۲) توجه به این نکته که بدون حل معادله نیز جواب‌ها مشخص بود. (جمع دو عبارت نامنفی وقتی صفر است که تک‌تک صفر باشند) تأکید روی این مطلب است که گاهی روش‌های میانبر برای حل مسئله لازم است و هر چند به روش کلی می‌توان مسئله را حل کرد اما با توجه به فرم معادله می‌توان از نکات دیگری نیز برای حل استفاده نمود.

## توصیه آموزشی

در حل معادلات گنگ توجه به نکات زیر و مطرح کردن آنها در بین حل سؤالات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۱ تعیین دامنه عبارت: با تعیین دامنه عبارت‌ها می‌توان محدوده مقادیر مجاز را مشخص کرد به‌ویژه

اگر  $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ . دو نتیجه می‌گیریم  $P(x) \geq 0$  و  $Q(x) \geq 0$ .

۲ تغییر متغیر: در معادلات گنگ نیز مانند معادلات دو مجذوری تغییر متغیر مناسب در موارد حضور عبارت‌های یکسان می‌تواند معادله را بسیار ساده کند.

۳ صفر شدن جمع چند عبارت نامنفی: وقتی جمع چند عبارت نامنفی صفر می‌شود حتماً همه آنها باید صفر باشند.

## ۴

## درس

## قدر مطلق و ویژگی‌های آن

## اهداف درس

- ۱ آشنایی بیشتر با قدر مطلق و ویژگی‌های آن
- ۲ رسم توابع قدر مطلق
- ۳ حل معادلات و نامعادلات ساده قدر مطلق

## روش تدریس

دانش‌آموزان با قدر مطلق و برخی از ویژگی‌های آن در سال‌های قبل آشنا شده‌اند. در این درس به درک بالاتر از قدر مطلق و ویژگی‌های آن خواهند رسید. شروع درس با یک کار در کلاس با هدف یادآوری مطالب و توجه به تعریف قدر مطلق یک عدد می‌باشد. در بند (۲) کار در کلاس از این مطلب که  $\sqrt{x^2} = |x|$  استفاده می‌کنیم و از ورود به رادیکال‌های مرکب پرهیز می‌کنیم. در بند (۲) با راهنمایی در سؤال به مربع کامل کردن عبارت زیر رادیکال توجه شده است.

در فعالیت صفحه ۲۴ با هدف رسم تابع قدر مطلق، در بند (۱) روش انتقال نمودار مورد نظر است و در روش دوم استفاده از تعیین علامت و تابع چند ضابطه‌ای هدف اساسی است. تأکید می‌شود به هیچ وجه هدف طرح مسائلی نظیر نمودار گلدانی و آبشاری و... نمی‌باشد و اجازه می‌دهیم دانش‌آموزان خودشان درگیر رسم این گونه توابع شوند و اگر نکاتی مورد نظر ماست را دانش‌آموزان کشف کنند.

در صفحه ۲۵ ویژگی‌های قدر مطلق مورد بررسی قرار می‌گیرد. با برخی از ویژگی‌ها در سال‌های گذشته آشنا شده‌اند، آنها را یادآوری کرده‌ایم. جهت درک بیشتر، مثال‌های عددی می‌تواند برای یادآوری نکات مفید باشد. با مرور این نکات به تکمیل ویژگی‌های قدر مطلق می‌پردازیم.

در فعالیت صفحه ۲۵ دو ویژگی اساسی قدر مطلق مورد توجه است. در بند (۱) با استفاده از  $\sqrt{a^2} = |a|$  عبارت  $|ab|$  را به صورت  $\sqrt{a^2 b^2}$  نوشته و حکم را استخراج می‌کنیم و در بند (۲) از این ویژگی که  $\left|\frac{a}{b}\right|$  را می‌توان به صورت  $\left|a \times \frac{1}{b}\right|$  نوشت و استفاده از بند (۱) مطلب ثابت می‌شود. از این دو ویژگی در حل مسائل زیاد استفاده می‌شود.

البته در مورد بند (۱) مطلب تعمیم هم دارد و می‌توان برای بیش از دو عدد نیز مطلب را تعمیم داد. در فعالیت پایین صفحه ۲۵ به برخی دیگر از ویژگی‌های قدر مطلق پرداخته می‌شود. در بند (۱) به صورت شهودی حالت‌های مختلف جواب نامعادله را مطرح می‌کنیم. اثبات جبری هر یک از موارد ساده است ولی به جهت کمبود زمان تدریس از اثبات آنها صرف نظر شده است و درک به صورت شهودی مورد نظر می‌باشد با بررسی بند (۲) و (۳) به بررسی بند (۳) که نامساوی مثلثی است می‌پردازیم. مراحل هر یک از این قسمت‌ها در بخش حل فعالیت‌ها آمده است.

در صفحه ۲۶ با مدل‌سازی یک مسئله به استقبال معادلات قدر مطلق و معرفی آنها و چگونگی حل آنها خواهیم پرداخت. برای حل معادلات قدر مطلق با استفاده از سه روش ویژگی‌های قدر مطلق، توان دو رساندن، و روش هندسی می‌توان مسئله را حل کرد. در مثال و کار در کلاس صفحه ۲۶ به این مطالب پرداخته شده است.

در فعالیت صفحه ۲۷ یک روش هندسی برای رسم تابع  $y = |f(x)|$  از روی نمودار  $y = f(x)$  مطرح می‌شود. در جمع‌بندی فعالیت این روش مطرح شده است.

در کار در کلاس صفحه ۲۷ علاوه بر رسم توابع قدر مطلق با توجه به فعالیت بالای آن می‌توان به روش هندسی نیز معادله قدر مطلق را مورد بررسی قرار داد.

با آموزش قدر مطلق در این بخش نمونه‌های زیاده‌تری از روش هندسی حل معادلات می‌تواند مطرح شود.



درس

## آشنایی با هندسه تحلیلی

### اهداف درس

- ۱ آشنایی بیشتر با هندسه مختصاتی نظیر فاصله بین دو نقطه، مختصات نقطه وسط پاره خط و فاصله نقطه از خط
- ۲ آشنایی با شیب دو خط عمود بر هم و استفاده از آن در حل مسائل

### روش تدریس

با هندسه مختصاتی در سال‌های قبل تا حد زیادی آشنا شده‌اند. محورهای مختصات و جایگاه نقطه در صفحه را می‌شناسند. در این درس با برخی از نکات تکمیلی آشنا می‌شوند. در فعالیت صفحه ۲۹ ابتدا با فاصله دو نقطه روی یک محور آشنا می‌شوند سپس در فعالیت صفحه ۳۰ به فاصله دو نقطه و یافتن فرمولی برای آن می‌رسیم که با استفاده از رابطه فیثاغورس و مختصات نقاط دو سر یک پاره خط، طول پاره خط را مشخص می‌کنند.

در کار در کلاس صفحه ۳۰ علاوه بر تثبیت مطالب آموخته شده به ارتباط بین شیب‌های دو خط عمود بر هم می‌رسیم و در ادامه با مثال صفحه ۳۱ قاعده کلی بین شیب‌های دو خط عمود بر هم بیان می‌شوند. ما در این کتاب به اثبات این قاعده نپرداخته‌ایم بلکه با استدلال استقرایی و حالات خاص این ارتباط کشف شده و از آن استفاده می‌شود.

در کار در کلاس صفحه ۳۱ به یک کاربرد از شیب‌های دو خط عمود بر هم برای تثبیت مطلب مطرح می‌شود. هنوز به مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط نپرداخته‌ایم لذا برای حل این مسئله در کلاس باید مانند مثال حل شده همین صفحه عمل شود ولی این مسئله بعد از بیان فرمول نقطه وسط پاره‌خط نیز می‌تواند به روش دیگری حل شود.

در فعالیت صفحه ۳۲ مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط در حالتی که دو نقطه روی یک محور هستند مطرح می‌شود و در کار در کلاس همین صفحه حالت کلی تر آن با یک مثال مورد بررسی قرار گرفته و نتیجه این کار در کلاس و فعالیت در یک کادر بیان می‌شود.

مهم‌ترین بخش از این درس فاصله یک نقطه از یک خط در صفحه است. ابتدا با یادآوری عمود و مایل، تعریفی از فاصله نقطه از خط ارائه می‌شود. در فعالیت صفحه ۳۲ با یک حالت خاص روند نتیجه‌گیری و به دست آوردن فرمول کلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. هر چند این مراحل می‌تواند در یک حالت کلی نیز مورد بررسی قرار گیرد اما، به علت شلوغ شدن حل دستگاه دو معادله و دو مجهول و پارامترها از اثبات کلی آن صرف نظر شده است. در ارزشیابی‌های رسمی هم از اثبات فرمول خودداری شود. البته یک اثبات شهودی و بدون توضیح در خواندنی صفحه ۳۴ آمده است که به عنوان مطالعه آزاد توصیه می‌شود.

حل دو مثال از نحوه به کارگیری فرمول فاصله نقطه از خط در صفحه ۳۴ آمده است. کار در کلاس صفحه ۳۴ آخرین کار در کلاس این فصل است که به کاربرد فاصله نقطه از خط در حل مسائل می‌پردازد و به نوعی به جزئیات استفاده از این فرمول در بررسی مسائل هندسی مختصاتی می‌پردازد.

هرچند هندسه مختصاتی از محتوای آموزشی است که سابقه طولانی در ریاضیات مدرسه‌ای دارد، آنچه مهم است یک تسلط نسبی روی این مطالب برای فصول آینده مانند مثلثات در این کتاب و حد و مشتق و کاربرد مشتق در کتاب سال بعد خواهد بود.



## سوالات نمونه جهت ارزشیابی فصل ۱

در کتاب درسی به دلیل محدودیت زمان تدریس و تفاوت فردی دانش‌آموزان از تمرینات محدودی استفاده شده است. این مجموعه سؤالات برای دانش‌آموزان به صلاحدید همکاران محترم در کنار تدریس، پایان تدریس و یا ارزشیابی‌های پایانی این فصل توصیه می‌شود.

### مجموع دنباله‌های حسابی و هندسی

۱ در یک دنباله حسابی جمله اول ۵ و جمله سوم آن ۱۳ است. مجموع ۶۵ جمله اول این دنباله را به دست آورید (جواب نهایی: ۸۶۴۵)

۲ در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $a_n = 1 + 4n$  مجموع بیست جمله اول آن را به دست آورید (جواب نهایی: ۸۶۰).

۳ در یک دنباله حسابی اگر مجموع ۱۵ جمله اول آن  $57^\circ$  و  $23^\circ = a_8$  باشد، نشان دهید جمله عمومی دنباله  $a_n = 8 + 5n$  است.

۴ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = 2^0 - 1 + 2^1 - 1 + 2^2 - 1 + \dots + 2^{199} - 1 + 2^{200} - 1$$

(جواب نهایی: ۲۰۷۹)

۵ در یک دنباله حسابی اگر  $S_{11} = S_{15}$  باشد، ثابت کنید  $S_{16} = 0$

۶ در هر دنباله حسابی متناهی، ثابت کنید میانگین جملات و میانه آنها برابر است.

۷ مجموع چند جمله از دنباله هندسی که جمله عمومی آن به صورت  $a_n = 2^{n-1}$  است برابر ۲۵۵

می‌باشد تعداد جملات را به دست آورید (جواب:  $n = 8$ )

۸ چند جمله از دنباله هندسی  $\dots, 2^{n-1}, 2^n, 2^{n+1}$  را با هم جمع کنیم تا مجموع جملات  $1020$  شود

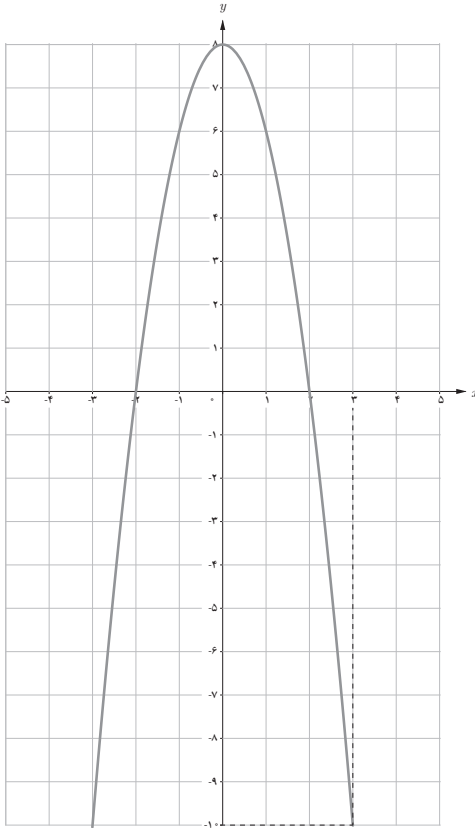
( $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n = 8)$ )

۹ چهاروجهی منتظمی داریم که در هر رأس آن یک گلوله و روی هر یال  $1^\circ$  گلوله قرار گرفته است.

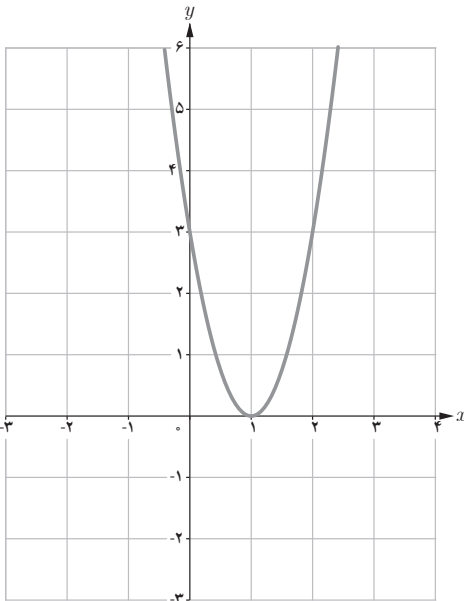
اگر کل حجم آن پر از گلوله‌های یکسان باشد، تعداد گلوله‌ها چندتا است؟ (جواب: ۲۸)

۱۰ کارفرمایی با یک کارگر مبتدی قرار گذاشت که حقوق روز اول او ۶۴۰۰ تومان باشد و هر روز  $5\%$

درصد حقوق روز قبل او به حقوقش اضافه شود. حقوق ده روز اول کار کردن این کارگر چند تومان است؟



(الف)



(ب)

### ■ معادلات درجه دوم

۱ معادله درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن  $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$  و  $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$  بوده و مجموع ضرایب آن برابر ۶- باشد (جواب نهایی:  $3x^2 - 12x + 3 = 0$ ).

۲ معادله  $x^2 - 3x + 1 = 0$  مفروض است. معادله درجه دومی بنویسید که:

(الف) جواب‌های آن از نصف جواب‌های معادله فوق یک واحد بیشتر باشد.

$$(\text{جواب: } x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{11}{4} = 0)$$

(ب) جواب‌های آن مکعب جواب‌های معادله فوق باشد (جواب:  $x^2 - 18x + 1 = 0$ ).

۳ تابع  $f(x) = 2x^2 - 4x + m - 3$  داده شده است. در هر حالت  $m$  را طوری بیابید که: (الف) تابع  $f$  دقیقاً یک صفر داشته باشد.

$$(\text{جواب: } m = 5)$$

(ب) منحنی  $f$  از هر چهار ناحیه مختصات بگذرد. (جواب:  $m < 3$ ).

۴ هر یک از نمودارهای مقابل مربوط به یک تابع درجه دوم به معادله  $f(x) = ax^2 + bx + c$  می‌باشد، در هر حالت ضابطه را مشخص کنید.

$$(\text{جواب نهایی الف: } f(x) = -2x^2 + 8)$$

$$(\text{جواب نهایی ب: } f(x) = 3x^2 - 6x + 3)$$

۵ کدام عدد (مثبت) است که چون یک سوم آن را با یک و همچنین یک چهارم آن را با یک جمع کنیم و دو حاصل جمع را در هم ضرب کنیم برابر  $2^\circ$  شود (مسئله از کتاب جبر و مقابله خوارزمی).

۶ از دبیر ریاضی کلاس حسابان سنش را پرسیدند. پاسخ داد: ۲۱ سال بعد سن من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. این دبیر چند سال دارد؟

۷ بدون حل معادله و با استفاده از  $S$  و  $P$  و  $\Delta$  در وجود و علامت ریشه‌های معادله  $5x^2 - 7x - 5 = 0$  بحث کنید.

۸ معادله  $x^2 - 5x + 1 = 0$  را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید این معادله چهار جواب دارد.

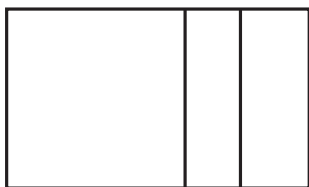
ب) ثابت کنید مجموع مجذور جواب‌ها برابر  $1^\circ$  می‌باشد.

۹ سیمی به طول ۸ متر را به شکل روبه‌رو درآورده‌ایم. اگر

مساحت بزرگ‌ترین مستطیل ۲ متر مربع باشد، مجموع طول و عرض

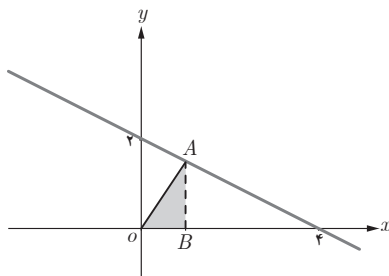
این مستطیل چقدر است؟

(جواب نهایی: ۳ متر)



۱۰ خط  $d$  به صورت زیر رسم شده است. نقطه  $A$  روی این خط

را به گونه‌ای تعیین کنید که مساحت مثلث قائم‌الزاویه  $OAB$  ماکزیمم باشد.



## ■ معادلات گویا و گنگ

۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\sqrt{1-x} + \sqrt{x} = 1$

{ $0^\circ, 1^\circ$ } : مجموعه جواب

ب)  $(x^2 + \sqrt{x} + 1)^2 + (x^2 + \sqrt{x} - 1) = 0$

{ $0^\circ$ } : مجموعه جواب

پ)  $\frac{1}{x^2 + x} + \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{5x - 1}{x^3 - x}$

{ $-2, 2$ } : مجموعه جواب

۲ موتورسیکلت سواری از  $A$  به سمت  $B$  و دوچرخه سواری از  $B$  به سمت  $A$  حرکت می کنند و پس از  $۳۰$  دقیقه یکدیگر را در بین راه ملاقات می کنند. اگر هر یک از این دو به راه خود ادامه دهند موتورسیکلت سواری  $۲۰$  دقیقه زودتر از دوچرخه سواری به مقصد می رسد. موتورسواری و دوچرخه سواری هر یک این فاصله را در چه مدت طی می کنند؟



(جواب نهایی: موتور سواری  $\sqrt{۱۰} + ۱۰$  دقیقه و دوچرخه سواری  $\sqrt{۱۰} + ۱۰ + ۴۰$  دقیقه)

۳ مقداری محلول آب و الکل را که غلظت الکل آن  $۸۰$  درصد است به  $۵$  لیتر محلول آب و الکل با غلظت الکل  $۲۰$  درصد اضافه می کنیم. محلول به دست آمده  $۵۰$  درصد الکل دارد. حجم محلول اولیه چقدر بوده است؟ (جواب نهایی:  $۵$  لیتر)

۴ معادله  $۰ = ۶ + (x - \sqrt{x}) - ۵(x - \sqrt{x})^2$  را حل کنید.

۵ قدر مطلق و ویژگی های آن

۱ اگر  $x \in \mathbb{R}$  و  $a \geq ۰$  ثابت کنید.

الف)  $|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$

ب)  $|x| \geq a \rightarrow x \geq a$  یا  $x \leq -a$

۲ برای هر دو عدد حقیقی  $x$  را ثابت کنید.

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

۳ منحنی های  $f(x) = |x - ۲| + |x - ۱|$  و  $g(x) = x$  را رسم کنید و با توجه به آن سطح محصور بین

دو منحنی را به دست آورید. (جواب نهایی:  $S = ۱$ )

۴ معادله قدر مطلق  $|x + ۱| + x = ۲$  را به روش هندسی حل کنید و محدوده جواب آن را به دست آورید

سپس به روش جبری آن را حل کنید.

۵ به روش هندسی و جبری معادله  $۰ = ۳ + ۴|x| - x^2$  را حل کنید.

هندسه مختصاتی

۱ نقطه‌ای روی محور  $x$ ‌ها بیابید که فاصله آن تا نقطه  $A(2, 1)$  برابر  $\sqrt{10}$  شود (مسئله چند جواب دارد؟)

۲ مثلث  $ABC$  به رئوس  $A(1, 1)$  و  $B(-1, -3)$  و  $C(2, 0)$  مفروض است. به دو روش مختلف نشان دهید مثلث قائم‌الزاویه است.

۳ ثابت کنید نقاط  $A(4, 7)$  و  $B(2, 3)$  و  $C(4, -1)$  و  $D(6, 3)$  رئوس یک لوزی هستند سپس مساحت آن را محاسبه کنید.

۴ اگر  $ABCD$  یک مستطیلی به رئوس  $A(3, 2)$  و  $B(3, -1)$  و  $C(-2, -1)$  و  $D(-2, 2)$  باشد ثابت کنید دو قطر  $AC$  و  $BD$  نصف یکدیگرند.

۵ خط  $d: 3x + 4y = 5$  و دایره  $c$  به مرکز  $O(-3, 2)$  و  $M(5, -4)$  از محیط آن داده شده است. فاصله مرکز دایره تا خط  $d$  را به دست آورید و وضعیت خط  $d$  نسبت به دایره  $c$  را مشخص کنید.

۶ نقاطی روی خط  $y = 2x - 1$  بیابید که فاصله آنها از مبدأ مختصات با فاصله آنها از خط  $3y - 4x = 2$  برابر باشد.

۷ اگر  $M(a, b)$  نقطه‌ای روی سهمی  $y = x^2$  باشد که از دو نقطه  $A(-2, 1)$  و  $B(1, -2)$  به یک فاصله باشد مختصات  $M$  را مشخص کنید. (جواب نهایی:  $M(-3, 4)$ ).

پرسش‌های مروری از کل فصل

الف) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۱ حاصل عبارت  $2 + 4 + 6 + \dots + 200$  برابر  $10100$  است. ( )

۲ اگر نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  از همه نواحی محورهای مختصات بگذرد آن گاه  $\frac{c}{a} < 0$  است. ( )

۳ مقدار ماکزیمم سهمی  $y = -2x^2 + x - 5$  برابر  $\frac{1}{4}$  است. ( )

۴ جواب‌های معادله  $A = B^2$  و  $A^2 = B^2$  یکسان هستند. ( )

۵ دامنه معادله  $1 = \frac{x+5}{x+5}$  برابر  $\mathbb{R}$  است. ( )

۶ اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند  $|a+b| = |a| + |b|$ . ( )

۷ معادله  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1} = 0$  فقط یک جواب دارد. ( )

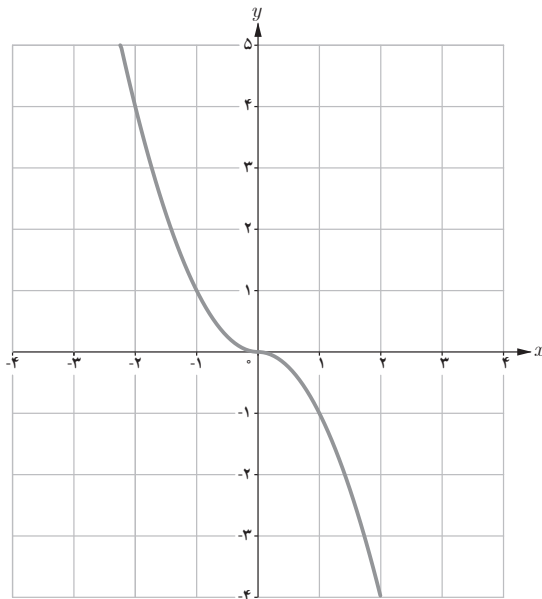
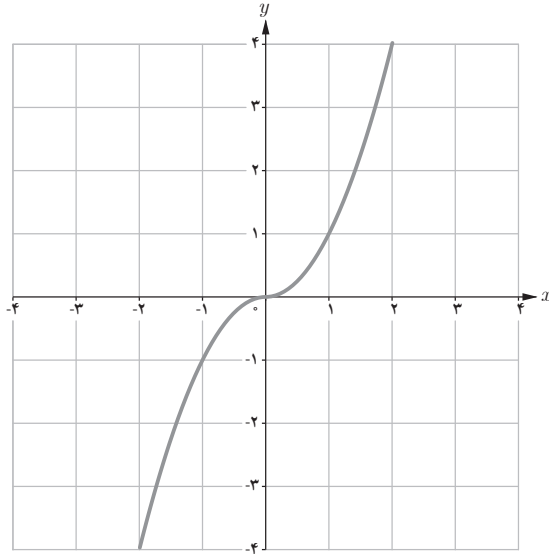
ب) پاسخ صحیح هر سؤال را مشخص کنید.

۱ اگر  $|a| < |b|$  و  $b^2 < 0$  آن گاه همواره:

$a > b$  ■

$a < b$  ■

۲ نمودار تابع  $f(x) = -x|x|$  شبیه کدام نمودار زیر است؟



۳ میانگین  $1^\circ$  جمله اول دنباله ... و ۴ و ۷ و  $1^\circ$  برابر است با:

۸/۵ ■      ۸ ■

۴ تابع  $F(x) = x^4 - 1$  چند صفر دارد؟

دو تا ■      یکی ■

۵ اگر  $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2-4} = \frac{3x}{x^2-4}$  باشد، مقدار  $B$  کدام است؟

۴ ■      ۶ ■

۶ اگر وسط پاره خط  $AB$  که دارای  $A(-1, 2)$  و  $B(\alpha, \beta)$  برابر  $(3, 0)$  باشد،  $\alpha + \beta$  کدام است؟

۵ ■      ۴ ■

۷ فاصله نقطه  $M(3, -1)$  از خط  $4x - 3y = 7$  کدام است؟

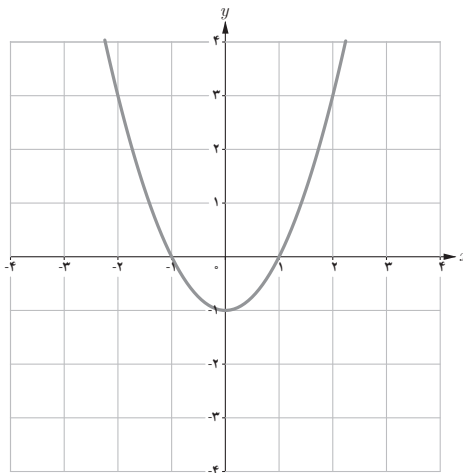
۵ ■      ۴ ■

پ) گزاره‌های زیر را با یک عبارت مناسب تکمیل کنید تا به گزاره‌ای درست تبدیل شوند.

۱ اگر  $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + Kx + 1$  و  $P(x)$  بر  $x-1$  بخش پذیر باشد مقدار  $K$  برابر ..... می‌باشد.

۲ با توجه به شکل زیر که برای سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  می‌باشد نتیجه می‌گیریم که علامت‌های  $a$  و  $b$

و  $c$  به ترتیب .....، ..... و ..... می‌باشد.



۳ اگر خط  $d$  بر خط  $2x + 3y - 5 = 0$  عمود باشد، شیب آن برابر ..... می‌باشد.

۴ مجموع جواب‌های معادله  $|x| + |x-1| = 4$  برابر ..... می‌باشد.

۵ مجموع اعداد فرد طبیعی ۱ تا  $101$  برابر ..... است.