

## مساحت

هدف‌های رفتاری : از دانش‌آموز انتظار می‌رود در پایان این فصل :

- ۱- فرمول مساحت شکل‌های هندسی را بیان کند.
- ۲- روش مثلث‌بندی را برای تعیین مساحت یک قطعه زمین، انجام دهد.
- ۳- روش خط هادی را برای تعیین مساحت یک قطعه زمین، انجام دهد.
- ۴- روش ذوزنقه‌های هم ارتفاع را برای تعیین مساحت یک قطعه زمین، انجام دهد.
- ۵- روش تبدیل مساحت به دست آمده از نقشه را به مساحت واقعی یک قطعه زمین، با توجه به مقیاس نقشه، توضیح داده، انجام دهد.
- ۶- روش تعیین مساحت را با کاغذ میلی‌متری توضیح داده، انجام دهد.
- ۷- روش تقریبی جبران را برای تعیین مساحت یک قطعه زمین، انجام دهد.
- ۸- روش تعیین مساحت را با استفاده از دستگاه پلانیمتر، انجام دهد.

ج- فرمول مساحت مثلث با داشتن سه ضلع (دستور

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{و} \quad P = \frac{a+b+c}{2}$$

۷-۱-۲- فرمول مساحت مربعی به ضلع  $a$  :  $S = a^2$

۷-۱-۳- فرمول مساحت مستطیلی به طول  $a$  و

عرض  $b$  :

$$S = a.b$$

۷-۱-۴- فرمول مساحت متوازی‌الاضلاعی

$$S = a.h$$

به قاعده‌ی  $a$  و ارتفاع  $h$  :

۷-۱-۵- فرمول مساحت لوزی به قطرهای  $a$  و

$$S = \frac{a.b}{2}$$

$b$  :

۷-۱-۶- فرمول مساحت ذوزنقه با قاعده‌های  $a$  و

$$S = \frac{h(a+b)}{2}$$

$b$  و ارتفاع  $h$  :

۷-۱-۷- فرمول مساحت شکل‌های هندسی

۷-۱-۱- فرمول مساحت مثلث : با توجه به شکل

۷-۱ این حالت‌ها را در نظر می‌گیریم :

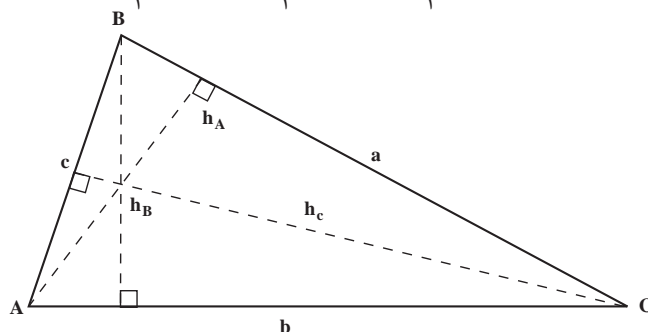
الف- فرمول مساحت مثلث با داشتن قاعده و ارتفاع :

$$S = \frac{1}{2} AC.h_B = \frac{1}{2} AB.h_C = \frac{1}{2} BC.h_A$$

ب - فرمول مساحت مثلث با داشتن دو ضلع و

زاویه‌ی بین آن‌ها :

$$S = \frac{1}{2} a.b.\sin C = \frac{1}{2} a.c.\sin B = \frac{1}{2} b.c.\sin A$$



شکل ۷-۱

به شکل‌های متفاوتی مطابق شکل ۷-۲ باشد روش‌های متنوعی وجود دارد که در زیر به چند نمونه از این روش‌ها اشاره می‌شود.

۷-۲-۱ روش مثلث‌بندی: معمولاً قطعه زمین‌ها به صورت چند ضلعی نامنظم می‌باشند که در این صورت ممکن است از روش مثلث‌بندی برای برداشت آن استفاده شده باشد. در این حالت حتی اگر نقشه نیز تهیه نشده باشد به وسیله کروکی و برداشت‌های انجام شده می‌توانیم مساحت هر مثلث را محاسبه نموده از جمع مساحت‌های مثلث‌ها، مساحت شکل مورد نظر را محاسبه نماییم. شکل ۷-۲ مثالی ساده از یک قطعه زمین پنج‌ضلعی است که به روش مثلث‌بندی برداشت شده است و می‌خواهیم مساحت آن را محاسبه نماییم:

حل: ابتدا مساحت هر مثلث را محاسبه می‌کنیم.

$$S_{ABE} = \sqrt{P(P - AB)(P - AE)(P - BE)}$$

و

$$P = \frac{AB + AE + BE}{2}$$

نام طول	اندازه‌ی طول به متر	کروکی
AB	۴۵/۳۸	
BC	۳۸/۷۲	
CD	۳۹/۴۱	
DE	۴۴/۴۵	
EA	۴۲/۹۲	
BE	۴۶/۳۷	
BD	۳۹/۹۸	

شکل ۷-۲

$$S_{ABE} = ۸۶۹ / ۸۸۷۲ \text{ مترمربع}$$

$$S_{BDE} = \sqrt{P(P - BD)(P - DE)(P - BE)}$$

و

$$P = \frac{BD + DE + BE}{2}$$

۷-۱-۷ فرمول مساحت دایره به شعاع  $r$ :

$$S = \pi.r^2$$

۷-۱-۸ فرمول مساحت بیضی به قطرهای  $a$  و  $b$ :

$$S = \pi.a.b$$

در صورتی که یک قطعه زمین دارای یکی از اشکال هندسی یاد شده باشد مساحت آن به راحتی با فرمول‌های مربوط محاسبه می‌گردد و اگر یک قطعه زمین دارای شکل هندسی منظمی نباشد می‌توانیم آن را به قطعات کوچکتر هندسی تقسیم نموده، مساحت آن‌ها را پیدا کرده، با هم جمع نماییم تا مساحت قطعه زمین با شکل غیرهندسی تعیین شود. چگونگی این روش و سایر روش‌های تعیین مساحت شکل‌های غیرهندسی را در این فصل توضیح می‌دهیم.

## ۷-۲ روش‌های تعیین مساحت یک قطعه زمین با شکل هندسی نامنظم

برای به دست آوردن مساحت قطعه زمین‌هایی که می‌تواند

$$P = \frac{۴۵/۳۸ + ۴۲/۹۲ + ۴۶/۳۷}{2} = ۶۷/۳۳۵$$

$$S_{ABE} = \sqrt{۶۷/۳۳۵(۶۷/۳۳۵ - ۴۵/۳۸)(۶۷/۳۳۵ - ۴۲/۹۲)(۶۷/۳۳۵ - ۴۶/۳۷)}$$

$$= 670 / 8242 \text{ m}^2$$

$$S = S_{ABE} + S_{BDE} + S_{BCD} = 869 / 8872 +$$

$$814 / 1193 + 670 / 8242 = 2354 / 8307 \text{ m}^2$$

۷-۲-۲- محاسبه‌ی مساحت به روش خط هادی :

هرگاه هنگام برداشت یک قطعه زمین از روش خط هادی استفاده کرده باشیم، با استفاده از برداشت‌ها و کروکی که تهیه شده حتی قبل از تهیه‌ی نقشه نیز می‌توانیم مساحت قطعه زمین و مساحت عوارض را محاسبه نماییم.

به‌عنوان یک مثال حل‌شده‌ی ساده از شکل ۷-۳ استفاده

می‌نماییم.

طول‌های اندازه‌گیری‌شده در روی خط هادی مربوط به شکل

۷-۳ را در جدول موجود در شکل ۷-۴ مشاهده می‌نمایید.

$$P = \frac{39/98 + 44/45 + 46/37}{2} = 65/4$$

$$S_{BDE} = \sqrt{\frac{65/4(65/4 - 39/98)}{(65/4 - 44/45)(65/4 - 46/37)}}$$

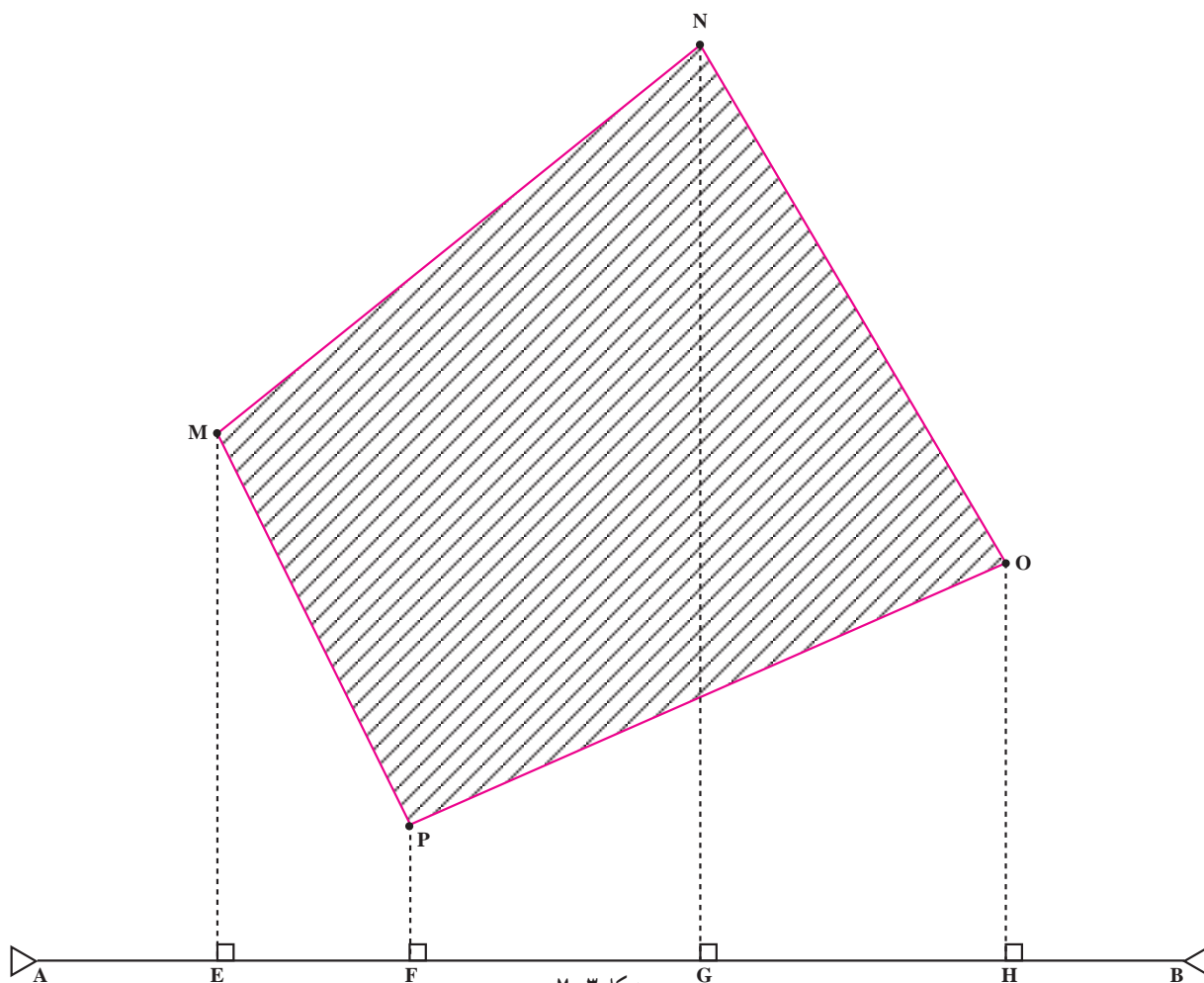
$$= 814 / 1193 \text{ m}^2$$

$$S_{BCD} = \sqrt{P(P - BC)(P - CD)(P - BD)}$$

$$P = \frac{BC + CD + BD}{2}$$

$$P = \frac{38/72 + 39/41 + 39/98}{2} = 59/55$$

$$S_{BCD} = \sqrt{\frac{59/55(59/55 - 38/72)}{(59/55 - 39/41)(59/55 - 39/98)}}$$



شکل ۷-۳

نام نقطه	فاصله‌ی پای عمود از نقطه‌ی قبلی	فاصله‌ی پای عمود از مبدأ A	طول عمود	کروکی
M	۲۱/۸۰	۲۱/۸۰	۷۱/۸۲	
P	۲۱/۹۵	۴۳/۷۵	۱۷/۲۸	
N	۳۴/۱۲	۷۷/۸۷	۱۲۴/۶۵	
O	۴۱/۷۵	۱۳۸/۶۲	۵۴/۷۳	

شکل ۷-۴

مساحت دوزنقه

$$\text{مساحت EMPOH} = \frac{1}{2}(ME + PF).EF +$$

$$\frac{1}{2}(PF + OH).FH$$

با استخراج اندازه‌های مورد نیاز از جدول ۷-۴ و

جای‌گذاری در فرمول، داریم:

$$\text{مساحت EMPOH} = \frac{1}{2}(۷۱/۸۲ + ۱۷/۲۸) \times (۲۱/۹۵) +$$

$$\frac{1}{2}(۱۷/۲۸ + ۵۴/۷۳) \times (۳۴/۱۲ + ۴۱/۷۵)$$

$$\text{مساحت EMPOH} = ۹۷۷/۸۷۲۵ + ۲۷۳۱/۶۹۹۳۵$$

$$= ۳۷۰۹/۵۷۲ \text{ m}^2$$

برای محاسبه مساحت MNOP داریم:

$$\text{مساحت MNOP} = \text{مساحت EMNOH} - \text{مساحت EMPOH}$$

$$= ۹۲۵۲/۵۹۴ - ۳۷۰۹/۵۷۲ = ۵۵۴۳/۰۲۲ \text{ m}^2$$

۳-۲-۷ روش دوزنقه‌های هم‌ارتفاع: هرگاه تمام

یا قسمتی از محدوده‌ی منطقه‌ای که می‌خواهیم مساحت آن را

محاسبه نماییم منحنی‌الخط باشد یک روش تقریبی برای محاسبه

می‌خواهیم مساحت چهارضلعی MNOP را محاسبه

نماییم. با توجه به شکل ۷-۴ کافی است از مساحت EMNOH،

مساحت EMPOH را کم کنیم، به عبارت دیگر داریم:

$$\text{مساحت MNOP} = \text{مساحت EMNOH} - \text{مساحت EMOPH}$$

برای محاسبه‌ی مساحت EMNOH داریم:

$$\text{مساحت دوزنقه GNOH} + \text{مساحت دوزنقه EMNG} = \text{مساحت EMNOH}$$

$$\text{مساحت EMNOH} = \frac{1}{2}(ME + NG).EG +$$

$$\frac{1}{2}(NG + OH).GH$$

با استخراج اندازه‌های فوق از جدول ۷-۴ و جای‌گذاری

در فرمول، داریم:

$$\text{مساحت EMNOH} = \frac{1}{2}(۷۱/۸۲ + ۱۲۴/۶۵) \times$$

$$(۲۱/۹۵ + ۳۴/۱۲) + \frac{1}{2}(۱۲۴/۶۵ + ۵۴/۷۳) \times (۴۱/۷۵)$$

$$\text{مساحت EMNOH} = ۵۵۰۸/۰۳۶۴۵ + ۳۷۴۴/۵۵۷۵$$

$$= ۹۲۵۲/۵۹۴ \text{ m}^2$$

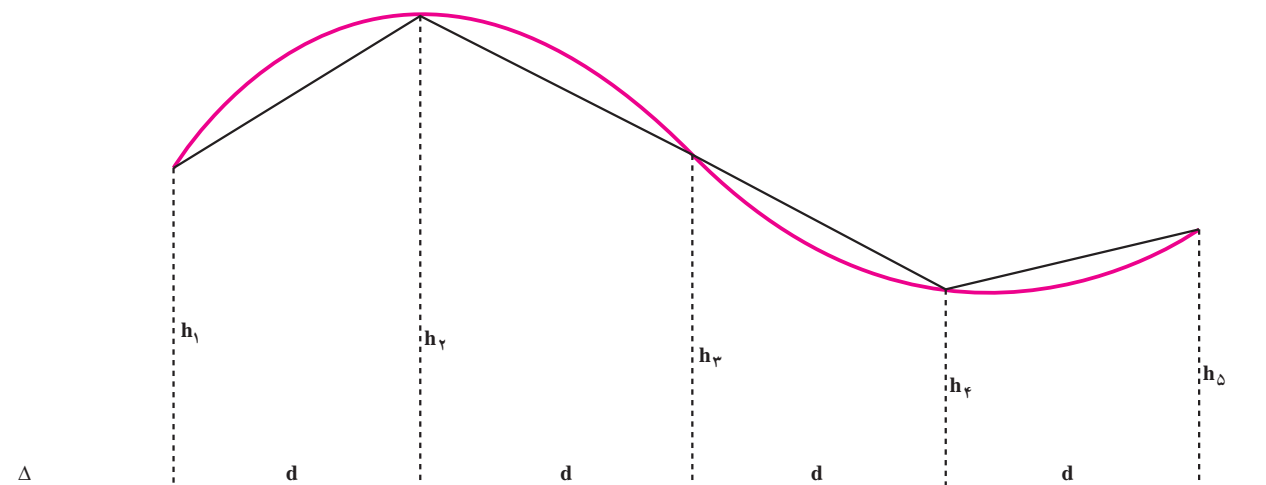
برای محاسبه‌ی مساحت EMPOH داریم:

$$\text{مساحت EMPOH} = \text{مساحت دوزنقه EMPF} + \text{مساحت FPOH}$$

می‌کنید ۵ قاعده:  $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$  و ۴ دوزنقه با ارتفاع یکسان  $d$ ، داریم.

مثال: در شکل ۷-۵ اگر اندازه‌ی  $d$  و قاعده‌های  $h_1$  تا  $h_5$  را به شرح زیر داده باشند، مطلوب است مساحت سطح زیر منحنی:

مساحت، تقسیم آن منطقه به دوزنقه‌های هم‌ارتفاع و سپس جمع کردن مساحت آن دوزنقه‌ها می‌باشد. در شکل ۷-۵ می‌خواهیم مساحت سطح بین خط منحنی و خط هادی را محاسبه کنیم. ابتدا این مساحت را به چهار دوزنقه تبدیل کرده‌ایم که ارتفاع این دوزنقه‌ها با هم مساوی است. همانطور که در شکل ۷-۵ ملاحظه



شکل ۷-۵

نماییم، بهتر است که آن‌را در یک حالت کلی تعریف نماییم. برای رسیدن به این حالت کلی، مساحت دوزنقه‌های شکل ۷-۵ را یک بار دیگر بدون عددگذاری بدست آورده، با هم جمع می‌کنیم:

$$d = 10\text{m}, h_1 = 42\text{m}, h_2 = 62\text{m}, h_3 = 44\text{m},$$

$$h_4 = 27\text{m}, h_5 = 35\text{m}$$

حل:

$$\text{مساحت دوزنقه اول} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)d$$

$$\text{مساحت دوزنقه دوم} = \frac{1}{2}(h_2 + h_3)d$$

$$\text{مساحت دوزنقه سوم} = \frac{1}{2}(h_3 + h_4)d$$

$$\text{مساحت دوزنقه چهارم} = \frac{1}{2}(h_4 + h_5)d$$

مساحت سطح زیر منحنی تقریباً برابر است با مجموع مساحت این دوزنقه‌ها:

$$\text{مساحت سطح زیر منحنی} = \frac{1}{2}(h_1 + 2h_2 + 2h_3 + 2h_4 + h_5) \times d$$

$$= \left(\frac{1}{2}h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + \frac{1}{2}h_5\right) \times d$$

$$\text{مساحت دوزنقه اول} = \frac{1}{2}(42 + 62)m \times 10\text{m} = 520\text{m}^2$$

$$\text{مساحت دوزنقه دوم} = \frac{1}{2}(62 + 44)m \times 10\text{m} = 530\text{m}^2$$

$$\text{مساحت دوزنقه سوم} = \frac{1}{2}(44 + 27)m \times 10\text{m} = 355\text{m}^2$$

$$\text{مساحت دوزنقه چهارم} = \frac{1}{2}(27 + 35)m \times 10\text{m} = 310\text{m}^2$$

مساحت سطح زیر منحنی تقریباً برابر است با مجموع مساحت این دوزنقه‌ها

$$\begin{aligned} \text{مساحت سطح زیر منحنی} &= (520 + 530 + 355 + 310)\text{m}^2 \\ &= 1715\text{m}^2 \end{aligned}$$

برای آن که بتوانیم از این روش در همه‌ی حالت‌ها استفاده

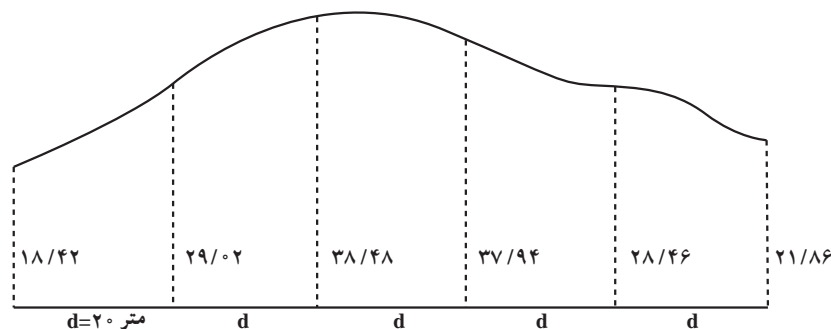
$d$  باشد، داریم :

$$= d \left( \frac{h_1 + h_n}{2} + h_2 + h_3 + h_4 \right)$$

$$S = d \left( \frac{h_1 + h_n}{2} + h_2 + h_3 + \dots + h_{n-1} \right)$$

به مثال دیگری در این زمینه توجه کنید.

در شکل ۶-۷ می‌خواهیم مساحت بین خط هادی و محدوده‌ی منحنی را محاسبه نماییم :



شکل ۶-۷

حل: طبق فرمول داریم :

$$S = d \left( \frac{h_1 + h_n}{2} + h_2 + h_3 + \dots + h_{n-1} \right)$$

$$S = 20 \left( \frac{18/42 + 21/86}{2} + 29/02 + 38/48 + \right.$$

$$\left. 37/94 + 28/46 \right) = 3080/80 \text{ m}^2$$

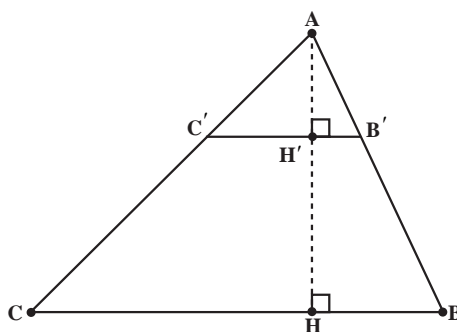
کنیم که برای تعیین مساحت یک قطعه زمین نیاز به نقشه‌ی آن قطعه زمین داریم؛ بنابراین، از روش‌هایی صحبت خواهیم کرد که مساحت قطعه زمین را از روی نقشه‌ی آن تعیین می‌نمایند و لازم است برای به‌دست آوردن مساحت واقعی آن قطعه زمین با توجه به مقیاس نقشه، محاسباتی را انجام دهیم.

قبلاً یادآوری این نکته از هندسه ضروری به نظر می‌رسد که :  
«اگر در دو شکل متشابه نسبت طول‌ها  $K$  باشد، نسبت

مساحت‌ها  $K^2$  می‌باشد».

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'} = K \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = K^2$$

سه روش قبلی دارای این خصوصیت بودند که تنها با داشتن کروکی و برداشت‌های انجام شده قادر به تعیین مساحت قطعه زمین‌ها بودیم. در این قسمت می‌خواهیم روش‌هایی را مطرح



شکل ۷-۷

باشد می‌توانیم آن را روی کاغذ میلی‌متری منتقل نماییم. شکل ۸-۷  
پلان یک قطعه زمین را با مقیاس  $\frac{1}{5000}$  نشان می‌دهد که روی کاغذ  
میلی‌متری ترسیم شده است. با شمردن تعداد مربع‌های کامل و پهلوی  
هم گذاشتن مربع‌های ناقص مساحت منطقه را در روی نقشه برحسب  
 $\text{cm}^2$  یا  $\text{mm}^2$  به دست آورده با کمک مقیاس نقشه، مساحت واقعی  
قطعه زمین را محاسبه می‌نماییم.

تعداد مربع‌های کامل ۴۷ عدد می‌باشد؛ یعنی:  $47 \text{ cm}^2$   
تعداد مربع‌های کوچک (یک چهارم مربع کامل) ۲۸ عدد  
می‌باشد:  $28 \div 4 = 7 \text{ cm}^2$

بقیه‌ی قسمت‌های قطعه زمین را روی هم می‌گذاریم تا معلوم  
شود برابر چند مربع کوچک هستند که به تقریب تعداد آن‌ها ۲۹  
مربع کوچک است؛ پس:  $29 \div 4 = 7.25 \text{ cm}^2$

مثال: اگر مساحت یک قطعه زمین روی نقشه‌ای با مقیاس  
 $8 \text{ cm}^2$ ،  $\frac{1}{5000}$  باشد مساحت واقعی این قطعه زمین چند هکتار  
است؟

حل:

$$8 \text{ cm}^2 \times 5000^2 = 200,000,000 \text{ cm}^2$$

هر مترمربع ۱۰۰۰۰ سانتی‌متر مربع است پس:

$$200,000,000 \text{ cm}^2 \div 10,000 = 20,000 \text{ m}^2$$

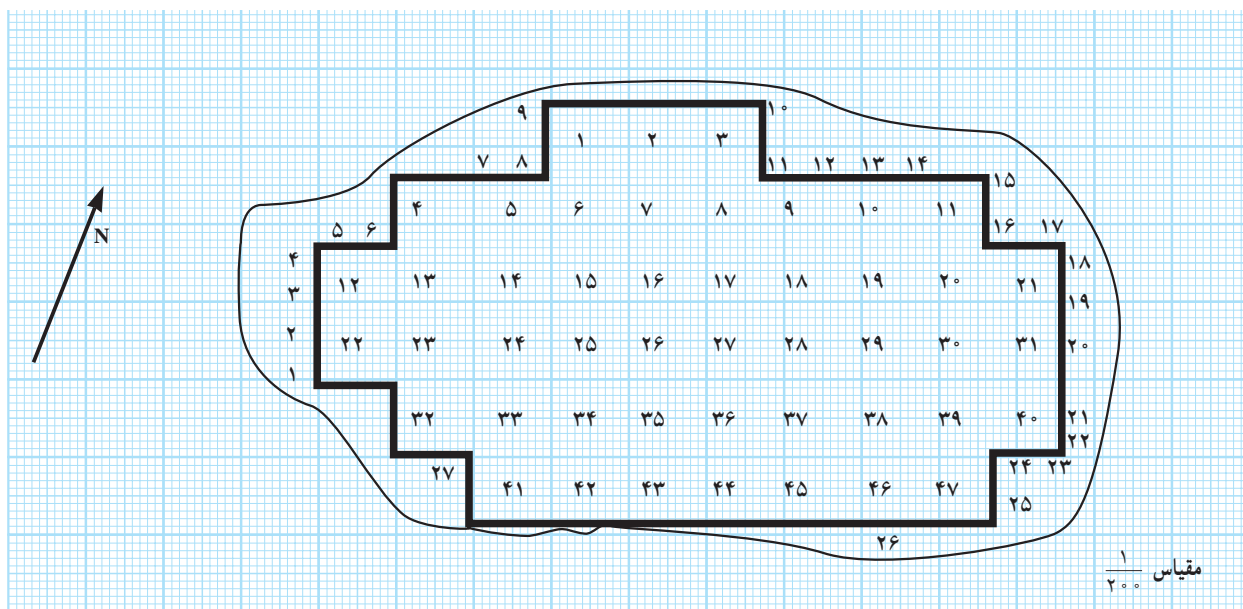
هر هکتار ۱۰۰۰۰ مترمربع است پس:

$$20,000 \text{ m}^2 \div 10,000 = 2 \text{ هکتار}$$

یعنی مساحت واقعی این قطعه زمین ۲ هکتار می‌باشد.

۴-۲-۷-روش تعیین مساحت با کاغذ میلی‌متری: در این

روش لازم است که نقشه‌ی محدوده‌ی یک قطعه زمین روی کاغذ  
میلی‌متری موجود باشد و اگر نقشه روی کاغذ دیگری ترسیم شده



شکل ۸-۷

۵-۲-۷-روش تعیین مساحت با استفاده از  
پلانیمتر (planimeter): برای اندازه‌گیری مساحت یک قطعه  
زمین که نقشه‌ی آن در دست باشد می‌توانیم از دستگاه پلانیمتر  
(مساحت‌سنج) استفاده کنیم. این دستگاه دارای انواع گوناگونی  
است که در شکل ۹-۷ چند نمونه از آن‌ها را ملاحظه می‌نمایید.

بنابراین، جمعاً مساحت منطقه برابر است با:

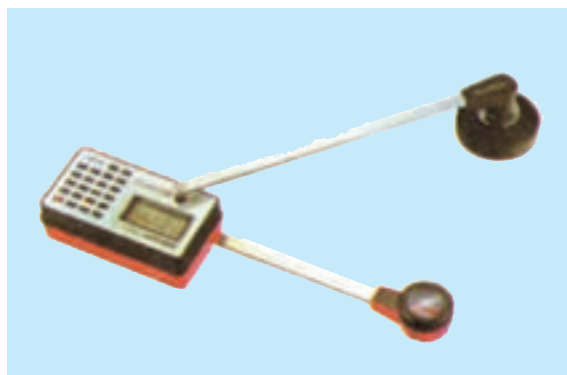
$$S = 47 + 7 + 7.25 = 61.25 \text{ cm}^2$$

اگر در مربع عدد مقیاس نقشه ضرب کنیم داریم:

$$61.25 \text{ cm}^2 \times 200^2 = 2450000 \text{ cm}^2$$

پس مساحت منطقه برحسب مترمربع برابر است با:

$$2450000 \text{ cm}^2 \div 10000 = 245 \text{ m}^2$$



شکل ۷-۹ - دو نوع از انواع پلانیمتر

امروزه پلانیمترهای دیجیتال پیشرفت و توسعه فراوانی نموده و جایگزین پلانیمترهای مکانیکی شده است. این پلانیمترها، علاوه بر مساحت مختصات نقاط، طول پاره خط‌ها را نیز محاسبه می‌کنند. در شکل ۷-۱۰ یک نمونه از آن‌ها را مشاهده می‌نمایید.



شکل ۷-۱۰



## به این پرسش‌ها پاسخ دهید

- ۱- فرمول مساحت شکل‌های هندسی را بیان کنید.
- ۲- روش مثلث‌بندی برای تعیین مساحت یک قطعه زمین چگونه است؟
- ۳- روش خط‌هادی برای تعیین مساحت یک قطعه زمین را توضیح دهید.
- ۴- روش دوزنقه‌های هم‌ارتفاع را برای تعیین مساحت یک قطعه زمین توضیح دهید.
- ۵- روش تبدیل مساحت به دست آمده از نقشه را به مساحت واقعی یک قطعه زمین با توجه به مقیاس نقشه توضیح دهید.
- ۶- روش تعیین مساحت را با کاغذ میلی‌متری توضیح دهید.
- ۷- روش تعیین مساحت با استفاده از دستگاه پلانیمتر چگونه است؟

## تمرین و عملیات

- ۱- با توجه به نقشه‌ی مدرسه که در جلسه‌ی قبل به روش خط‌هادی برداشت و ترسیم کرده‌اید، مساحت مدرسه را به روش خط‌هادی محاسبه نمایید.
- ۲- با توجه به نقشه‌ی مدرسه که به روش مثلث‌بندی تهیه نموده‌اید مساحت مدرسه را محاسبه کنید.
- ۳- نقشه‌ی مدرسه را روی کاغذ میلی‌متری منتقل نموده، مساحت مدرسه را از طریق شمردن مربع‌ها محاسبه نمایید.
- ۴- مساحت مدرسه را با دستگاه پلانیمتر به دست آورید.
- ۵- با رسم چند خط و ساختن یک شکل هندسی معین مثل مستطیل یا متوازی‌الاضلاع یا نظایر آن، مساحت مدرسه را از طریق روش جبران به دست آورید.
- ۶- مساحت‌های به دست آمده را با هم مقایسه نمایید.