

فصل چهارم

تعادل



پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- مفهوم تعادل را توضیح دهد.
- ۲- شرط تعادل نقطه‌ی مادی را بیان کند.
- ۳- پیکر آزاد ذره‌ی مادی را ترسیم کند.
- ۴- شرط تعادل نقطه‌ی مادی را در مسائل به کار گیرد.
- ۵- شروط لازم برای تعادل جسم صلب را توضیح دهد.
- ۶- انواع تکیه‌گاه‌ها را بشناسد.
- ۷- پیکر آزاد اجسام تحت تأثیر نیروهای مختلف را ترسیم کند.
- ۸- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در اجسام محاسبه کند.

۴-۱ تعادل

مفهوم تعادل آن‌است که ذره یا جسم مادی هیچ‌گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.

به منظور بررسی تعادل اجسام، آن‌ها را به دو حالت در نظر می‌گیریم.

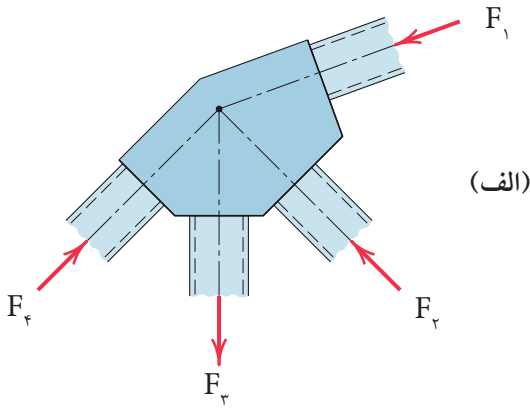
۱- نقطه‌ی مادی

۲- جسم صلب

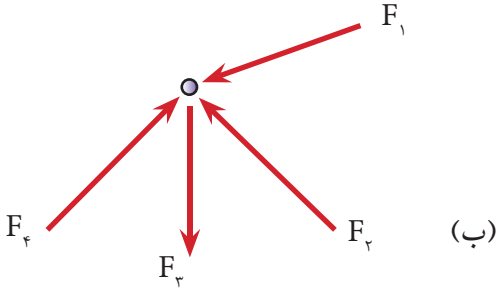
۴-۱-۱- تعادل نقطه مادی

با توجه به تعریف نقطه مادی در فصل اول، نیروهای وارد به جسم در یک نقطه متقارب خواهند بود و شرط تعادل در این حالت آن است که برآیند نیروهای وارده صفر باشد یعنی:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (۱-۴)$$



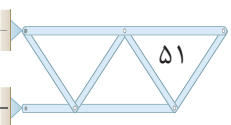
در شکل (۴-۱-الف) چنانچه از ابعاد قطعات اتصال صرف نظر شود، وضعیت نیروها به صورت شکل (۴-۱-ب) خواهند بود.



شکل ۴-۱

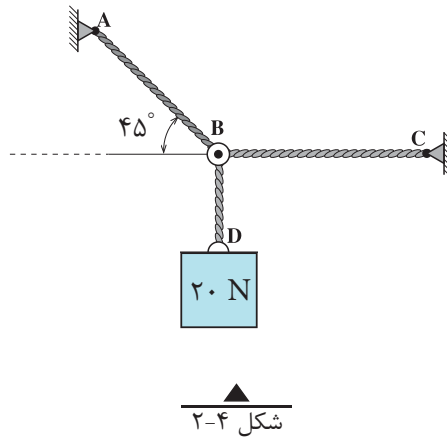
در صفحه مختصات دکارتی رابطه (۴-۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases} \quad (۲-۴)$$

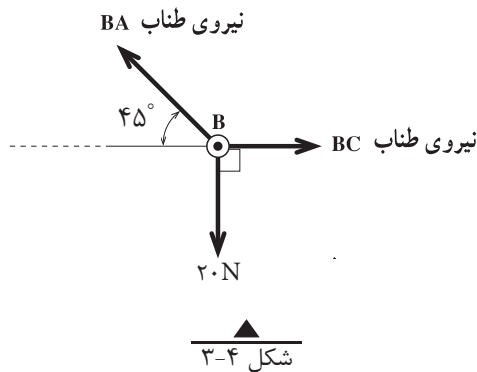


۴-۱-۱-۲- پیکر آزاد جسم

به منظور بررسی تعادل اجسام، لازم است ابتدا جسم را از محیط اطراف خود جدا نموده و نیروهای وارد بر آن را در راستاهای موجود نمایش دهیم که به این عمل، ترسیم پیکر آزاد جسم^۱ گفته می شود.



در شکل (۲-۴) وزنه 20 N توسط سه رشته کابل AB و BC و BD نگهداری شده است. چون کابل ها فقط نیروی کششی را تحمل می نمایند بنابراین نیروهای وارد به نقطه B به صورت کششی بوده و پیکر آزاد آن مطابق شکل (۳-۴) خواهد بود.



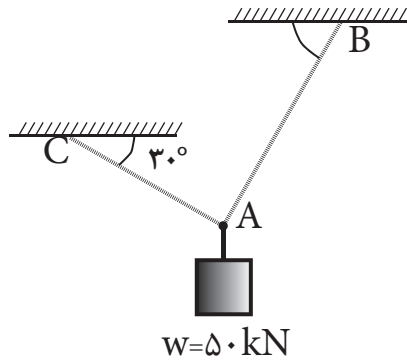
نکته:

در حل مسائل تعادل نقطه مادی، ابتدا پیکر آزاد آن را ترسیم نموده و سپس به کمک معادلات تعادل (۲-۴) مجهولات مسئله را محاسبه می نمائیم.

^۱ - FBD (Free Body Diagram)

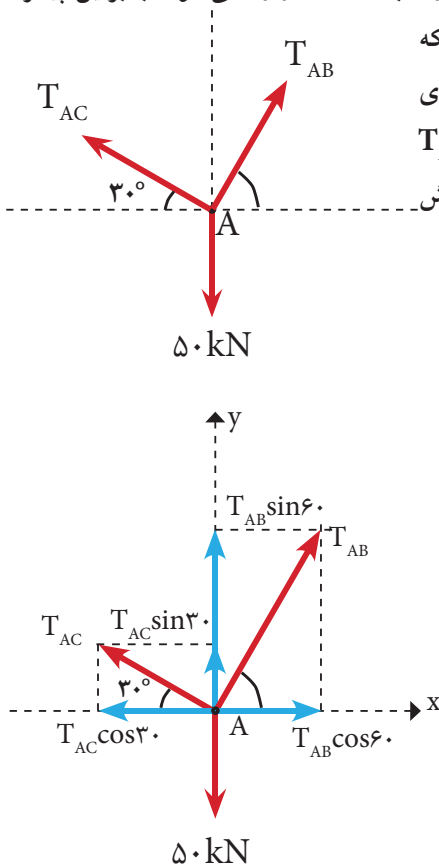
مثال ۱

کشش کابل‌های AB و AC را در سامانه در حال تعادل زیر به دست آورید.

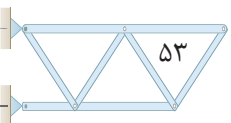


حل:

گام اول) با توجه به این موضوع که تمامی نیروها به نقطه A وارد می‌شوند بنابراین پیکر آزاد نقطه مادی A ترسیم می‌گردد. می‌دانیم که کابل‌ها همیشه رفتار کششی دارند بنابراین نیروی کابل‌های AB و AC را به ترتیب با T_{AB} و T_{AC} به صورت کششی و زوایای هر کدام را نمایش می‌دهیم.



گام دوم) تعیین محورهای مختصات x و y روی نقطه A و تجزیه نیروها در این دستگاه مختصات



گام سوم) تشکیل معادلات تعادل (۴-۲) و حل آنها تا رسیدن به خواسته‌های مسئله

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow T_{AB} \cos 60^\circ - T_{AC} \cos 30^\circ = 0 \quad \text{رابطه I}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB} \sin 60^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ - 50 = 0 \quad \text{رابطه II}$$

چون حل هر یک از معادلات فوق با وجود دو مجهول امکان‌پذیر نیست بنابراین آنها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی قرار داده که با استفاده از روش‌های مختلف قابل حل است.

در این جا از معادله اول یکی از مجهولات را بر حسب دیگری محاسبه و در معادله دوم قرار می‌دهیم تا یکی از مجهولات حذف شود:

$$\text{رابطه III} \quad T_{AB} = \frac{T_{AC} \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \Rightarrow T_{AB} = 1/\sqrt{3} T_{AC} \Rightarrow \text{از رابطه I نتیجه می‌شود}$$

مقدار T_{AB} را در رابطه II قرار داده خواهیم داشت:

$$1/\sqrt{3} T_{AC} \times \sin 60^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ - 50 = 0 \Rightarrow 2 T_{AC} - 50 = 0$$

$$T_{AC} = \frac{50}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{AC} = 25 \text{ kN}}$$

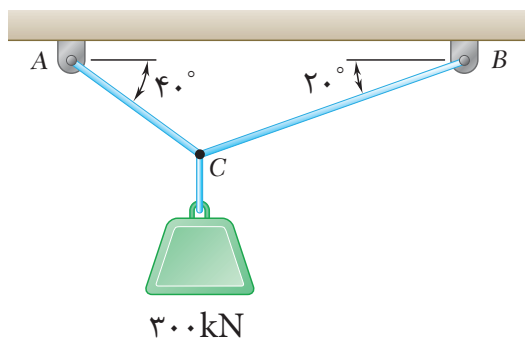
حال مقدار T_{AC} را در رابطه III قرار می‌دهیم:

$$\text{از رابطه III} \Rightarrow T_{AB} = 1/\sqrt{3} \times 25$$

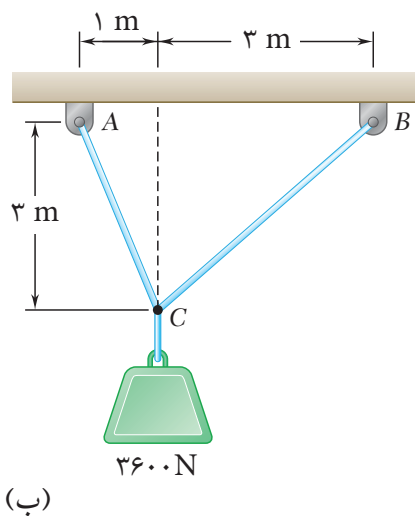
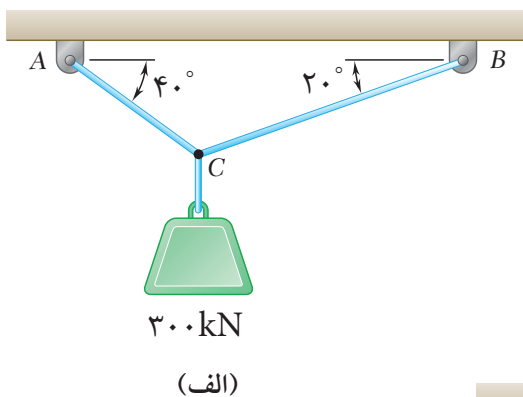
$$\Rightarrow \boxed{T_{AB} = 43/25 \text{ kN}}$$



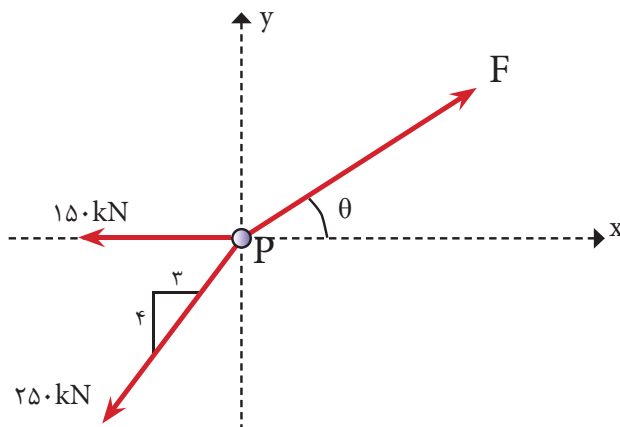
۱- پیکر آزاد شکل زیر را رسم نمائید.



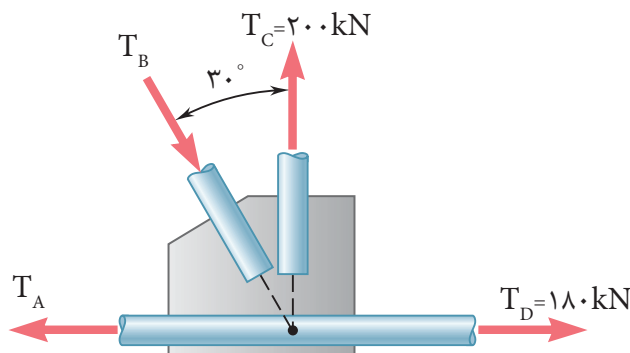
۲- کشش کابل‌ها را در شکل‌های زیر به دست آورید.



۳- مقدار نیروی F و زاویه θ را طوری تعیین کنید که ذره مادی P در حال تعادل باشد.



۴- مقدار T_A و T_B را طوری تعیین کنید که تعادل در اتصال شکل زیر برقرار باشد.



۴-۱-۲- تعادل جسم صلب

در قسمت قبل بنا به فرض، اجسام را به عنوان یک نقطه مادی در نظر گرفتیم. در حالی که چنین فرضی همیشه امکان پذیر نخواهد بود و نمی توان از ابعاد جسم صرف نظر نمود بنابراین در این حالت نیروها در یک نقطه متقارب نخواهند بود و علاوه بر حرکت، امکان دَوَران (گشتاور) جسم تحت تأثیر نیروهای وارده نیز وجود دارد. لذا شرط تعادل در مورد اجسام صلب به صورت زیر خواهد بود:

- ۱- برای این که جسم در راستای محور x جابه جایی نداشته باشد باید: $\Sigma F_x = 0$
- ۲- برای این که جسم در راستای محور y جابه جایی نداشته باشد باید: $\Sigma F_y = 0$
- ۳- برای این که جسم چرخش نداشته باشد باید: $\Sigma M = 0$

(۴-۳)

۲-۴ انواع تکیه گاه ها و عکس العمل های آن ها

برای بررسی تعادل اجسام صلب، همانند نقاط مادی باید ابتدا پیکر آزاد آن ها را ترسیم نمود. برای این منظور، باید جسم را از محیط اطراف آن جدا نمائیم و چون اجسام بر روی تکیه گاه هایی قرار دارند که با توجه به نوع آن ها مانع از حرکت (جابجایی) و یا چرخش جسم می گردند، لازم است ابتدا تکیه گاه ها و عکس العمل های آن ها را معرفی نمائیم.

تعریف عکس العمل تکیه گاهی

منظور از عکس العمل تکیه گاهی اجسام، واکنشی است که تکیه گاه در جهت حفظ تعادل آن ها از خود نشان می دهد و مانع از حرکت و یا دوران جسم مورد نظر می شود.

۴-۲-۱- انواع تکیه گاه ها

الف) تکیه گاه غلطکی (یک مجهولی)

عبارت است از تکیه گاهی که تنها یک عکس العمل آن هم عمود بر سطح اتکای خود دارد؛ همانند چرخ اتومبیل روی سطح بدون اصطکاک. (ردیف ۱ جدول ۴-۱)

ب) تکیه گاه مفصلی (دو مجهولی)

به تکیه گاهی گفته می شود که دارای دو عکس العمل می باشد؛ یکی مماس بر سطح اتکا و دیگری عمود بر آن خواهد بود. (ردیف ۲ جدول ۴-۱)

ج) تکیه گاه گیردار (سه مجهولی)

تکیه گاهی است که دارای سه عکس العمل به شرح زیر

می باشد: (ردیف ۳ جدول ۴-۱)

۱- مماس بر سطح تکیه گاه

۲- عمود بر سطح تکیه گاه

۳- عکس العمل دورانی

د) تکیه گاه میله ای

منظور از میله عضوی کوتاه است که در دو انتهای خود به صورت لولا یا مفصل متصل شده باشد. عکس العمل تکیه گاه میله ای در راستای میله و به صورت کششی یا فشاری خواهد بود.

(ردیف ۴ جدول ۴-۱)

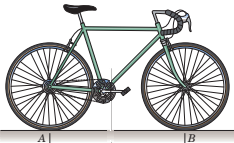
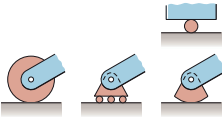
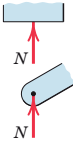
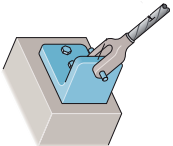
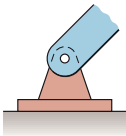
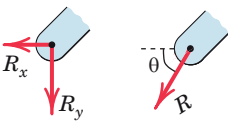
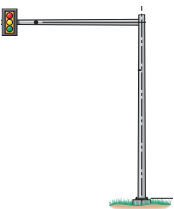
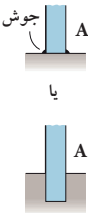
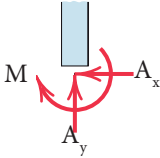
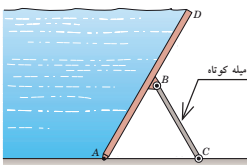
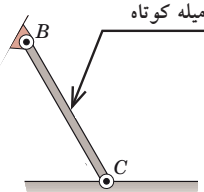
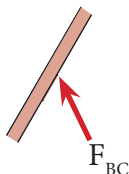
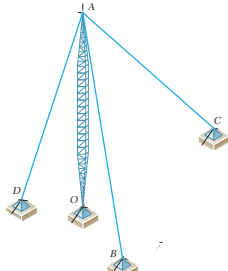

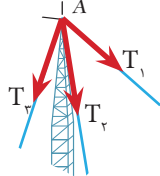
ه) تکیه گاه کابلی:

هر گاه جسم توسط کابل به تکیه گاه متصل شود، عکس العمل کابل به صورت کششی

و در راستای آن خواهد بود. (ردیف ۵ جدول ۴-۱)



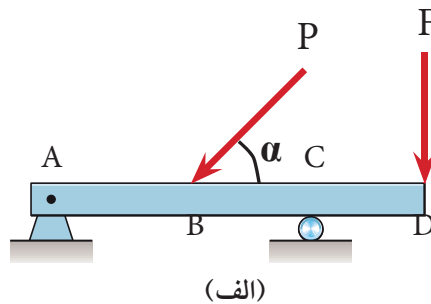
جدول (۱-۴) انواع تکیه گاه

ردیف	نوع تکیه گاه	شکل واقعی	شکل شماتیک	عکس العمل های تکیه گاهی
۱	غاطشی			
۲	مفصلی			
۳	گیردار			
۴	میله ای			
۵	کابلی			

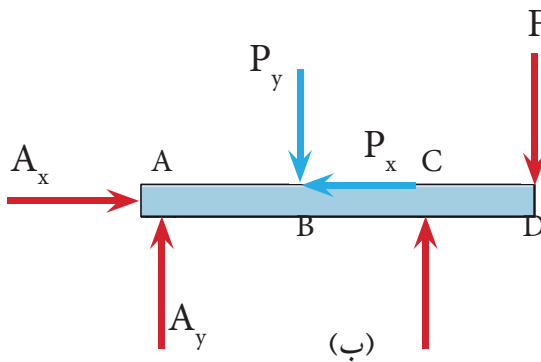
همان طور که گفته شد شرط تعادل اجسام صلب بر آورده شدن معادلات (۳-۴) می باشد و برای نیل به این هدف به صورت زیر عمل می نمایم.

گام اول - ترسیم پیکر آزاد جسم

ابتدا جسم را از تکیه گاه ها جدا نموده و با توجه به نوع تکیه گاه، عکس العمل های مربوطه را در محل تکیه گاه و در جهت دلخواه قرار می دهیم. به عنوان مثال پیکر آزاد تیر شکل (۴-۴-الف) به صورت شکل (۴-۴-ب) خواهد بود.



شکل ۴-۴



گام دوم - تجزیه نیروها

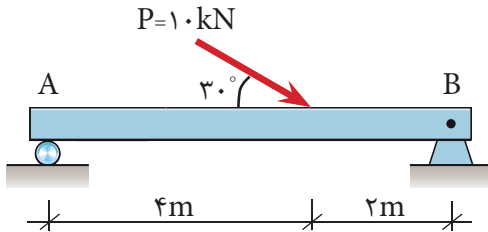
همه نیروهای مورب را روی پیکر آزاد در صورت وجود به مؤلفه های آن تجزیه می نمایم. به عنوان مثال در شکل (۴-۴-ب) نیروی P به دو مؤلفه متعامد تجزیه شده است.

گام سوم - تشکیل معادلات و حل آنها

با تشکیل معادلات تعادل و حل آنها مجهولات مسئله (عکس العمل ها) تعیین می شوند.

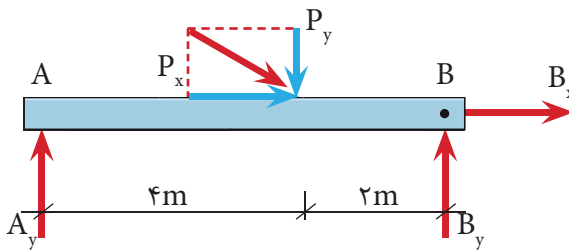
مثال ۲

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر زیر را به دست آورید



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد جسم



گام دوم:

تجزیه نیروی P

$$P_x = P \cos \theta = 10 \times \cos 30^\circ = 8.66 \text{ kN}$$

$$P_y = P \sin \theta = 10 \times \sin 30^\circ = 5 \text{ kN}$$

گام سوم: تشکیل معادلات تعادل و حل آنها

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow B_x + P_x = 0 \Rightarrow B_x + 8.66 = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = -8.66 \text{ kN}}$$

لازم به توضیح است که علامت منفی در جواب فوق به این معنی است که جهت صحیح

عکس العمل B_x در پیکر آزاد تیر به سمت چپ می‌باشد

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = P_y \Rightarrow A_y + B_y = 5 \text{ kN} \quad \text{رابطه I}$$

معادله فوق دارای دو مجهول بوده و قابل حل نمی‌باشد لذا از شرط سوم یعنی $\sum M = 0$

استفاده می‌کنیم و در این معادله بهتر است گشتاور نسبت به نقطه‌ای محاسبه شود که

بیشترین مجهولات تکیه‌گاهی در آن نقطه متمرکز است (یعنی نقطه B)

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times 6 - P_y \times 2 = 0 \Rightarrow A_y \times 6 - 5 \times 2 = 0 \Rightarrow 6A_y = 10$$

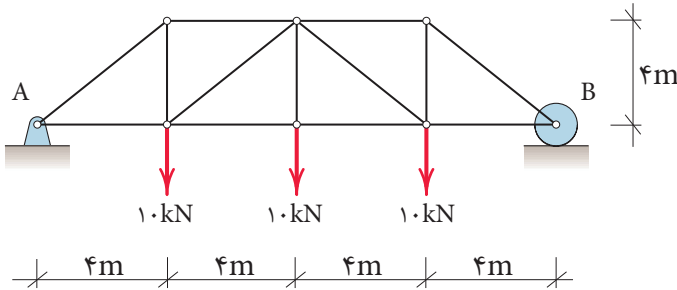
$$A_y = \frac{10}{6} \Rightarrow \boxed{A_y = 1.67 \text{ kN}}$$

حال با قرار دادن مقدار A_y در رابطه I خواهیم داشت:

$$A_y + B_y = 5 \Rightarrow 1.67 + B_y = 5 \Rightarrow B_y = 5 - 1.67 \Rightarrow \boxed{B_y = 3.33 \text{ kN}}$$

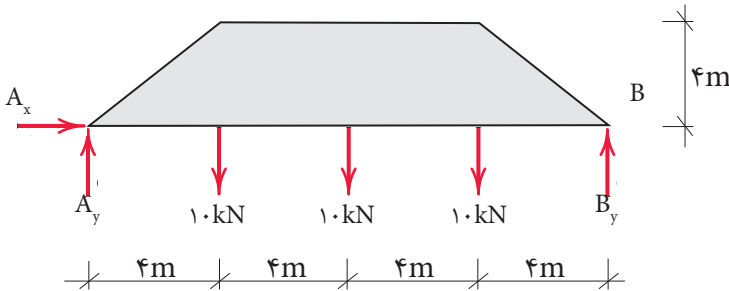
مثال ۳

عکس العمل های تکیه گاهی را در خرابای شکل زیر به دست آورید.



گام (۱)

ترسیم پیکر آزاد



گام (۲)

تشکیل معادلات تعادل:

با توجه به اینکه نیروی افقی به سیستم وارد نمی شود لذا عکس العمل افقی تکیه گاه A یعنی (A_x) برابر صفر است.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 - 10 - 10 = 0$$

$$A_y + B_y = 30 \text{ kN} \quad \text{رابطه I}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 10 \times 4 + 10 \times 8 + 10 \times 12 - B_y \times 16 = 0$$

$$16B_y = 240 \Rightarrow B_y = \frac{240}{16} \Rightarrow \boxed{B_y = 15 \text{ kN} \uparrow}$$

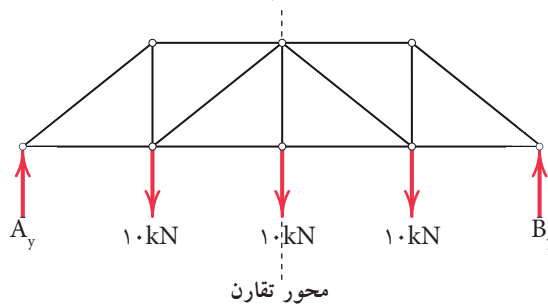
مقدار B_y را در رابطه I قرار می دهیم داریم:

$$A_y + 15 = 30 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{A_y = 15 \text{ kN} \uparrow}$$

نکته:

هرگاه بارگذاری و هندسه سازه ای متقارن باشند کل بارهای وارده به صورت مساوی بین دو تکیه گاه تقسیم می شود.

بنابراین با توجه به تقارن در سازه فوق داریم:

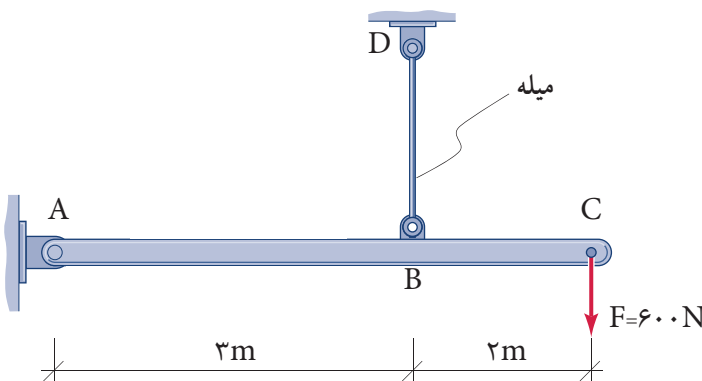


$$\text{کل بار} = 10 + 10 + 10 = 30 \text{ kN}$$

$$\boxed{A_y = B_y = \frac{30}{2} = 15 \text{ kN}}$$

مثال ۴

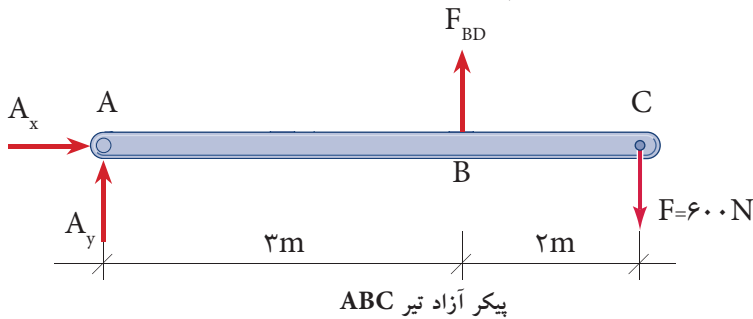
عکس العمل های تکیه گاهی تیر ABC را به دست آورید.



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد تیر ABC

چون عضو BD میله است و با توجه به این که در تکیه گاه میله ای عکس العمل تکیه گاهی، در راستای میله می باشد، خواهیم داشت:



گام دوم:

تشکیل معادلات تعادل

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} - 600 = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} = 600 \text{ N} \quad \text{رابطه I}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 600 \times 5 - F_{BD} \times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{BD} = 1000 \text{ N}}$$

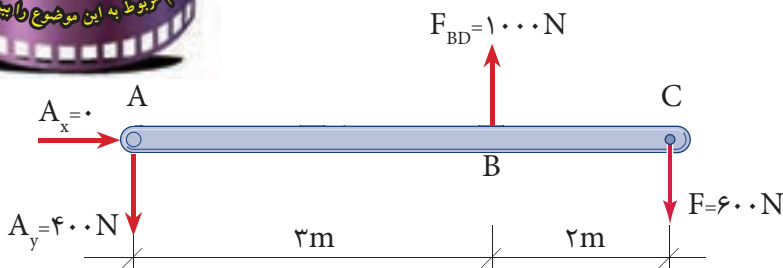
از رابطه I داریم:

$$A_y + F_{BD} = 600 \Rightarrow A_y + 1000 = 600 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -400 \text{ N} \downarrow}$$



با توجه به علامت منفی در مقدار A_y ، جهت عکس العمل

تکیه گاهی A_y به طرف پایین (↓) خواهد بود؛ یعنی:



خلاصه فصل

- مفهوم تعادل آن است که ذره یا جسم مادی هیچ گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.
- شرط تعادل نقطه مادی آن است که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد یعنی:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = 0 \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 \end{cases}$$

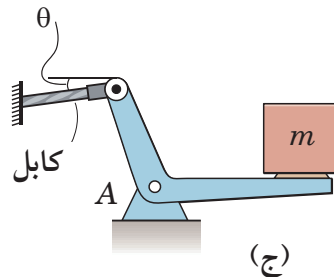
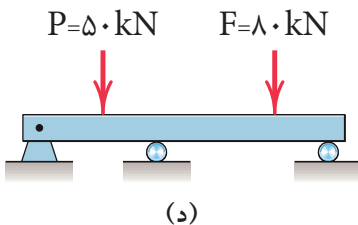
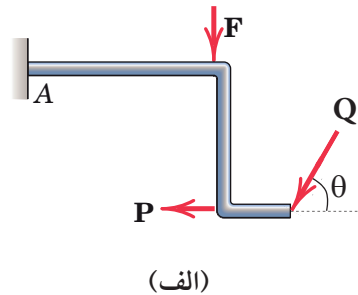
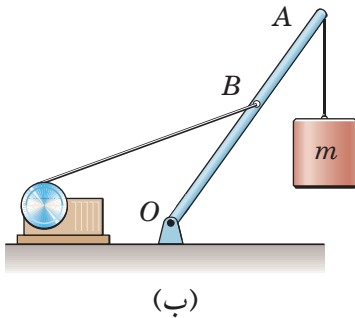
- هرگاه جسم یا نقطه مادی را از محیط اطراف خود جدا و نیروهای وارد بر آن‌ها را در راستاهای موجود نمایش دهیم، پیکر آزاد جسم و یا نقطه مادی را ترسیم نموده ایم.
- شرایط تعادل جسم صلب عبارت است از:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$

- برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی از معادلات تعادل جسم صلب و یا نقطه مادی استفاده می‌شود.

خودآزمایی

۱- پیکر آزاد هر کدام از شکل‌های زیر را رسم نمائید.



۲- عکس العمل‌های تکیه‌گاهی را در شکل‌های زیر به دست آورید.

$$(g = 10 \frac{m}{s^2})$$

