

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ایستایی ساختمان

رشته ساختمان

زمینه صنعت

شاخه آموزش فنی و حرفه‌ای

شماره درس ۲۶۹۲

خلیل ارجمندی، محمد اسماعیل

۶۹۰

ایستایی ساختمان / مؤلفان: محمد اسماعیل خلیل ارجمندی، مجید شجاعی اردکانی. -

۲۱ /

تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۹۵.

الف ۱۸۸ خ /

۱۷۰ ص. مصور. - (آموزش فنی و حرفه‌ای؛ شماره درس ۲۶۹۲)

۱۳۹۵

متون درسی رشته ساختمان، زمینه صنعت.

برنامه‌ریزی و نظارت، بررسی و تصویب محتوا: کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف

کتاب‌های درسی رشته ساختمان دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش
وزارت آموزش و پرورش.

۱. سازه - پایداری. الف. ایران. وزارت آموزش و پرورش. کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف

کتاب‌های درسی رشته ساختمان. ب. عنوان. ج. فروست.

همکاران محترم و هنرجویان عزیز:

پیشنهادهات و نظرات خود را درباره محتوای این کتاب به نشانی تهران- صندوق پستی شماره ۴۸۷۴/۱۵ دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

info@tvoccd.sch.ir

پیام نگار (ایمیل)

www.tvoccd.sch.ir

وب‌گاه (وب‌سایت)

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش

نام کتاب: ایستایی ساختمان-۴۹۴/۷

مؤلفان: محمداسماعیل خلیل‌ارجمندی، مجید شجاعی‌اردکانی

اعضای کمیسیون تخصصی: ابوالقاسم رافع، محمدعلی فرزانه، محمدصالح رحیم‌لباف‌زاده و مالک مختاری

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وب‌سایت: www.chap.sch.ir

رسمی، صفحه‌آرایی و طراحی جلد: امیرحسین متینی

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)

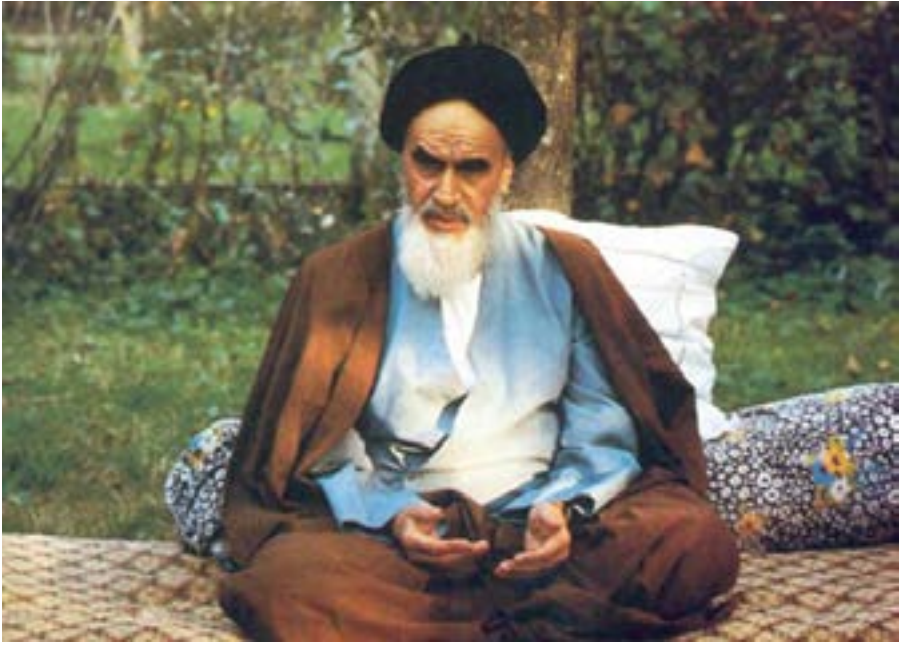
تلفن: ۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ چهارم ۱۳۹۵

حق چاپ محفوظ است.

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۲۴۳-۱ ISBN 978-964-05-2243-1



مهم‌ترین چیزی که برای کشور ما لازم است، تعهد اسلامی و
تهذیب اسلامی است.

امام خمینی (قدس سره الشریف)

مقدمه:

کتاب حاضر مشتمل بر دو بخش استاتیک (فصل‌های ۱ تا ۶) و مقاومت مصالح مقدماتی (فصل‌های ۷ تا ۹) است که تحت عنوان ایستایی به رشته تحریر درآمده است. با توجه به این که هنرجویان رشتهٔ ساختمان دروس استاتیک و مقاومت مصالح را در سه مقطع متوسطه، کاردانی و کارشناسی ناپیوسته می‌گذرانند، لذا در این مقطع سعی شده است مبانی مقدماتی دروس فوق‌الذکر با تأکید بیشتر بر روی استاتیک مد نظر قرار گیرد و در بخش مقاومت مصالح مقدماتی صرفاً به آشنایی با مبانی مقاومت مصالح اکتفا شده است. با توجه به این که اغلب آیین‌نامه‌های ساختمانی از دستگاه آحاد اندازه‌گیری بین‌المللی (SI) استفاده می‌کنند، در این کتاب نیز از این دستگاه به عنوان دستگاه آحاد اندازه‌گیری استفاده شده است. در فصل اول کتاب به مفاهیم عمومی و تعاریف پایه در مکانیک نیوتنی اشاره شده است. و در فصل دوم، هنرجویان با بردارها و جمع و تفریق بردارها به صورت ترسیمی آشنا می‌شوند. در فصل سوم به محاسبهٔ برآیند نیروها و گشتاور نیروها حول یک نقطه در حالت دوبعدی پرداخته می‌شود.

در فصل چهارم تعادل نقطهٔ مادی و تعادل اجسام صلب مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل پنجم تحلیل سازه‌های ساختمانی شامل خرپا و تیر بیان می‌گردد. فصل ششم خواص هندسی سطوح را مطرح می‌نماید. در فصل هفتم و هشتم تنش‌های محوری و برشی مورد بررسی واقع شده‌اند. در فصل نهم برای ایجاد انگیزه در هنرجویان تعیین شماره مقطع تیر به صورت ساده و صرفاً به منظور آشنایی با نحوهٔ طراحی مطرح گردیده است. از آنجایی که آموزش بصری (استفاده از تصاویر و فیلم) در یادگیری تأثیر بیشتری دارد، به همراه کتاب، لوح فشرده‌ای شامل فایل pdf کتاب به همراه فیلم‌های آموزشی ارائه می‌گردد که با کلیک کردن روی آیکون فیلم، فیلم آموزشی آن بخش نمایش داده می‌شود.

توصیه به همکاران گرامی:

- ۱- استفاده و آموزش ماشین حساب غیربرنامه‌پذیر آزاد است و بهتر است در هر کلاس از یک نوع تهیه گردد.
- ۲- استفاده از راه‌حل‌های مختلف توسط هنرجویان آزاد می‌باشد.

۳- توصیه می‌شود به منظور تفهیم بهتر مسائل استاتیکی متناسب با موضوع هر بخش، دست‌سازه‌های لازم توسط هنرجویان تهیه و مورد استفاده قرار گیرد. به عنوان مثال: انواع تکیه‌گاه‌ها - خرپاها و . . . می‌توانند به عنوان موضوع دست‌سازه‌ها قرار گیرند.

۴- دقت محاسبات تا دو رقم اعشار کفایت می‌نماید و تنها در مورد نسبت‌های مثلثاتی تا سه رقم اعشار در نظر گرفته شود.

۵- در حل مسائل آخر هر فصل نحوه تحلیل مسائل دارای اشکال پیچیده، با ترسیمات ساده برای هنرجویان تشریح گردد.

۶- در ارائه مسائل کتاب سعی شده است اجزای ساختمانی به صورت واقعی نمایش داده شود تا از این طریق هنرجویان تجسم بهتری از سازه‌های ساختمانی پیدا کنند، بنابراین لازم است همکاران محترم در زمان مناسب، نحوه مدل کردن این اشکال را به منظور حل مسأله برای هنرجویان تشریح نمایند.

توصیه به هنرجویان عزیز:

برای درک و فهم بهتر مسائل ایستایی توصیه می‌شود ابتدا مطالب تئوری را به دقت مطالعه نمائید و سپس مثال‌های حل شده را بدون توجه به راه حل آن‌ها تحلیل نموده و در نهایت جواب‌های خود را با جواب‌های کتاب مقایسه نمائید و موارد و علت اختلاف احتمالی جواب‌ها را بررسی نمائید. تنها به این شیوه می‌توانید از این کتاب که سعی شده است بسیار ساده و روان در اختیار شما قرار گیرد بهره‌مند شوید.

به منظور حل مسائل آخر هر فصل توصیه می‌گردد:

۱- مسئله را به دقت مطالعه کرده و معلومات و مجهولات آن را یادداشت نمائید.

۲- در صورت نیاز تبدیل واحدهای لازم را انجام دهید.

۳- شکل مسئله را به صورت ساده ترسیم نموده و اطلاعات لازم را روی آن نشان دهید.

۴- روابط مورد نیاز را بنویسید. داده‌های مسئله را در آن‌ها قرار داده و مجهولات را به دست آورید.

۵- سعی کنید جواب مسئله را از دید فنی بررسی و از منطقی بودن آن‌ها اطمینان حاصل کنید.

و در انتها:

از کلیه بزرگواران و صاحب نظران درخواست می‌شود، نظرات و پیشنهادات خود را به این دفتر ارسال کرده تا در چاپ‌های بعدی مورد استفاده قرار گیرد.

با تشکر - مؤلفین

هدف کلی

آشنایی با مبانی علوم استاتیک و مقاومت مصالح

فهرست:

بخش اول - استاتیک

فصل اول - مقدمه و مفاهیم عمومی

تعریف علم مکانیک	۱-۱
مفاهیم اصلی در علم مکانیک	۲-۱
فضا (Space)	۱-۲-۱
زمان (Time)	۲-۲-۱
جرم (Mass)	۳-۲-۱
نیرو (Force)	۴-۲-۱
فرضیات	۳-۱
۱) جسم صلب (Rigid Body)	۳
۲) نقطه مادی (Particle)	۳
قوانین نیوتن	۴-۱
قانون اول نیوتن	۱-۴-۱
قانون دوم نیوتن	۲-۴-۱
قانون سوم نیوتن	۳-۴-۱

فصل دوم - بُردارها

کمیت‌های فیزیکی	۱-۲
کمیت‌های عددی یا اسکالر	۱-۱-۲
کمیت‌های برداری	۲-۱-۲
بردارها (Vector)	۲-۲
انواع بردارها	۳-۲
بردار لغزان	۱-۳-۲
بردار ثابت	۲-۳-۲
بردارهای هم‌سنگ	۳-۳-۲
بردارهای زوج	۴-۳-۲
بردارهای مخالف	۵-۳-۲
بردار یک‌ه (واحد)	۶-۳-۲
بردار نیرو	۷-۳-۲

۴-۲	جمع و تفریق بردارها	۱۱
۲-۴-۱	روش های جمع و تفریق بردارها	۱۱
۲-۴-۱-۱	روش ترسیمی	۱۱
	الف) روش مثلث	۱۱
	ب) روش متوازی الاضلاع	۱۲
	ج) روش چندضلعی	۱۳
۵-۲	تجزیه یک بردار به مؤلفه های آن به روش ترسیمی	۱۸
۶-۲	تجزیه یک بردار به مؤلفه های متعامد آن در دستگاه مختصات دکارتی	۱۹
۲-۶-۱	نمایش برداری یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی	۲۱
۷-۲	تعیین اندازه یک بردار با استفاده از مؤلفه های متعامد آن	۲۱

فصل سوم - نیرو و سامانه های نیرویی

۱-۳	انواع نیرو	۲۸
۳-۱-۱	نیروهای خارجی	۲۸
۳-۱-۲	نیروهای داخلی	۲۹
۲-۳	برآیند سامانه های نیرویی وارد بر نقطه مادی به روش محاسباتی	۳۰
۳-۲-۱	برآیند نیروهای هم راستا و موازی	۳۰
۳-۲-۲	برآیند دو نیروی متعامد	۳۱
۳-۲-۳	محاسبه برآیند سامانه چندنیرویی وارد بر نقطه مادی	۳۲
۳-۳	گشتاور، لنگر (مُمان)	۳۹
۴-۳	گشتاور چند نیرو	۴۱
۵-۳	قضیه وارینون	۴۲
۶-۳	زوج نیرو	۴۵
۳-۶-۱	خصوصیات زوج نیرو	۴۵

فصل چهارم - تعادل

۱-۴	تعادل	۵۰
۴-۱-۱	تعادل نقطه مادی	۵۱
۴-۱-۱-۲	پیکر آزاد جسم	۵۲
۴-۱-۲	تعادل جسم صلب	۵۶
۲-۴	انواع تکیه گاه ها و عکس العمل های آن ها	۵۷

انواع تکیه گاه‌ها	۱-۲-۴	۵۷
محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی اجسام صلب	۳-۴	۵۹

فصل پنجم - تحلیل سازه‌های ساختمانی

خرپا (Truss)	۱-۵	۶۹
انواع خرپا	۱-۱-۵	۶۹
شکل خرپاها	۲-۱-۵	۷۰
فرضیات تحلیل خرپاها	۳-۱-۵	۷۱
روش تحلیل خرپا	۴-۱-۵	۷۲
روش مفاصل (گره‌ها) در تحلیل خرپاها	۵-۱-۵	۷۲
اعضای صفر نیرویی	۶-۱-۵	۷۶
تحلیل تیرها	۲-۵	۷۹
تعریف تیر (Beam)	۱-۲-۵	۷۹
انواع تیرها از نظر شرایط تکیه گاهی	۲-۲-۵	۷۹
انواع بارهای وارد به تیر	۳-۲-۵	۸۰
تعیین عکس العمل های تکیه گاهی تیرها با بار گسترده یکنواخت	۴-۲-۵	۸۱
رفتار تیر تحت تأثیر بارهای خارجی	۵-۲-۵	۸۳
نیروهای داخلی در تیرها با بار متمرکز	۶-۲-۵	۸۳
علائم قرار دادی نیروهای داخلی تیرها	۱-۶-۲-۵	۸۴
محاسبه نیروهای داخلی تیرها با بار متمرکز	۲-۶-۲-۵	۸۵
مقادیر حداکثر نیروهای برشی و لنگر خمشی در تیرها با بار متمرکز	۷-۲-۵	۸۸
ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیرها با بار متمرکز	۸-۲-۵	۸۸

فصل ششم - خواص هندسی سطوح

گشتاور اول سطح (ممان استاتیک)	۱-۶	۹۸
گشتاور اول (ممان استاتیک) سطوح مرکب	۲-۶	۱۰۱
مرکز سطح سطوح مرکب	۳-۶	۱۰۳
استفاده از تقارن در تعیین مرکز سطح سطوح متقارن	۴-۶	۱۰۶
سطوح با یک محور تقارن	۱-۴-۶	۱۰۶
سطوح با دو محور تقارن	۲-۴-۶	۱۰۶
گشتاور دوم سطح (ممان اینرسی) (Moment of Inertia)	۵-۶	۱۱۰

۱۱۲.....	قضیه محوره‌های موازی	۶-۶
۱۱۴.....	محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب	۷-۶
۱۱۵.....	مدول مقطع (اساس مقطع) (Section Modulus)	۸-۶
۱۱۹.....	مشخصات هندسی مقاطع نوردشده	۹-۶

بخش دوم - مقاومت مصالح

فصل هفتم - نیرو و تنش محوری

۱۲۹.....	نیروهای محوری (Axial Load)	۱-۷
۱۳۰.....	تنش محوری (Axial Stress)	۲-۷
۱۳۶.....	تغییر طول اجسام تحت تاثیر بارهای محوری	۳-۷

فصل هشتم - نیرو و تنش برشی

۱۴۲.....	نیروی برشی (مماسی)	۱-۸
۱۴۳.....	تنش‌های برشی (مماسی) (Shear Stress)	۲-۸
۱۴۴.....	بررسی رفتار اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ	۳-۸
۱۴۴.....	تنش کششی حداکثر ایجاد شده در ورق‌ها	۱-۳-۸
۱۴۵.....	تنش لهیدگی	۲-۳-۸
۱۴۵.....	تنش برشی در پیچ‌ها یا پرچ‌ها	۳-۳-۸
۱۴۶.....	گسیختگی برشی ورق	۴-۳-۸

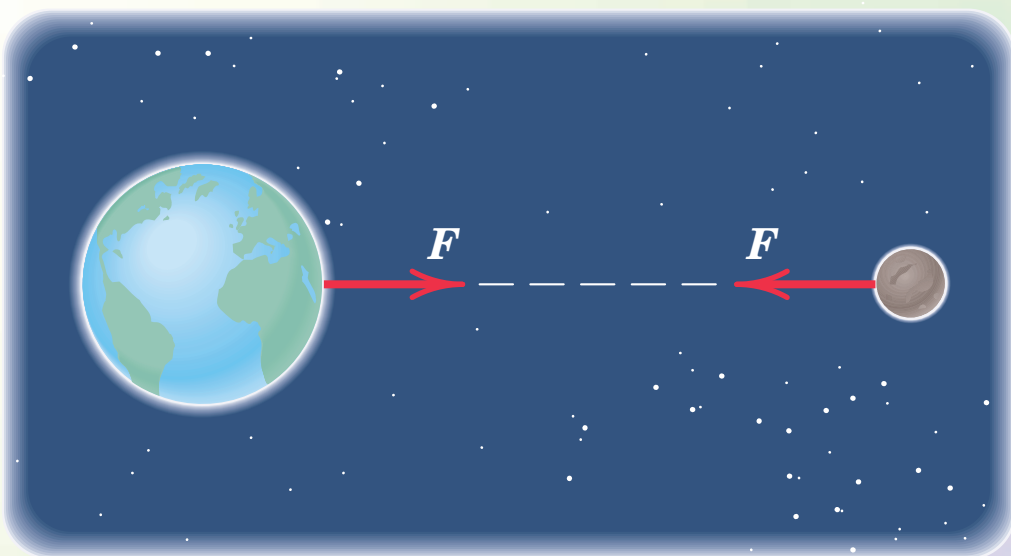
فصل نهم - تنش در تیرها

۱۵۲.....	تنش خمشی در تیرها با مقطع متقارن	۱-۹
۱۵۳.....	تنش‌های خمشی حداکثر در تیر	۱-۱-۹
۱۵۶.....	تنش برشی متوسط تیرهای با مقطع I شکل (مطالعه آزاد)	۲-۹
۱۵۸.....	تعیین شماره مقطع تیر فولادی با استفاده از تنش خمشی ماکزیمم تحت بار متمرکز	۳-۹

۱۶۳.....	ضمیمه - جداول مشخصات نیم‌رخ‌های فولادی	
۱۷۰.....	منابع و مأخذ	

فصل اول

مقدمه و مفاهیم عمومی



هدف‌های رفتاری

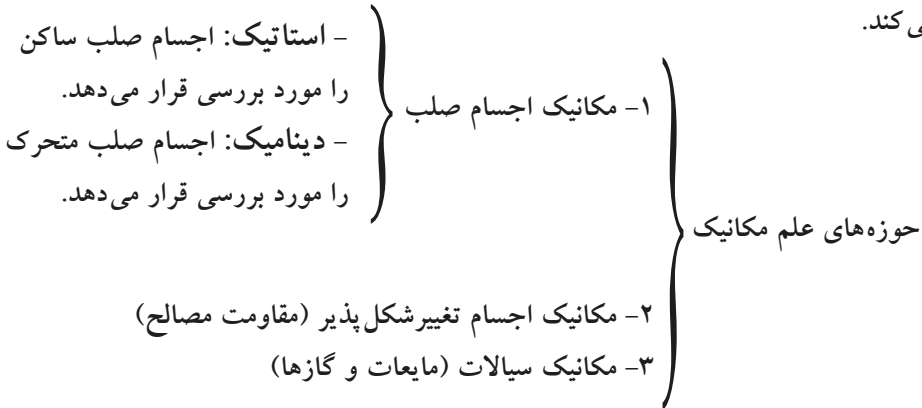
پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- علم مکانیک را تعریف نماید.
- ۲- حوزه‌های علم مکانیک را بشناسد.
- ۳- مفاهیم اصلی در علم مکانیک را بشناسد و تعریف نماید.
- ۴- فرضیات علم مکانیک را توضیح دهد.
- ۵- قوانین نیوتن را تعریف کند.
- ۶- کاربرد پیشنندهای واحدهای اندازه‌گیری را بداند.

مقدمه:

۱-۱ تعریف علم مکانیک:

علم مکانیک علمی است که شرایط سکون و حرکت اجسام تحت تاثیر نیرو را بررسی می‌کند.



در این کتاب از حوزه‌های فوق، در بخش اول با مکانیک اجسام صلب ساکن (استاتیک) و در بخش دوم تا حدودی با مکانیک اجسام تغییرشکل پذیر (مقاومت مصالح) آشنا می‌شویم.

تاریخ مهندسی (مطالعه آزاد)

محمد کرجی از نوایغ مهندسی ایران در بیش از هزار سال پیش بوده است. کرجی در کتاب «استخراج آب‌های زیرزمینی» به‌وضوح از کرویت زمین و قوه جاذبه و قوانین تعادل و حرکت، که برخی از آن‌ها چندین قرن بعد توسط دانشمندان اروپایی مطرح شد سخن می‌گوید.

۲-۱ مفاهیم اصلی در علم مکانیک:

مفاهیم اصلی و مورد استفاده در علم مکانیک و معرفی یکاهای اندازه‌گیری آن‌ها در سامانه بین‌المللی یکاها (SI) به شرح زیر می‌باشد.

۱-۲-۱ فضا (Space):

ناحیه هندسی است که رویدادهای فیزیکی در آن رخ می‌دهد. موقعیت هر نقطه در فضا را مکان می‌نامیم که نسبت به یک نقطه مرجع تعیین می‌شود و واحد اندازه‌گیری آن در سامانه SI، متر (m) می‌باشد.

۲-۲-۱ زمان (Time):

فاصله بین وقوع دو رویداد فیزیکی زمان نام دارد و واحد اندازه‌گیری آن ثانیه (s) می‌باشد.

۳-۲-۱ جرم (Mass):

هر چیزی که فضا را اشغال نماید ماده نام دارد و جسم ماده‌ای است که به وسیله یک سطح بسته محدود شده است. مقدار ماده تشکیل دهنده هر جسم را جرم آن جسم می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن کیلوگرم (kg) است.

۴-۲-۱ نیرو (Force):

تأثیر یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می‌نامیم و واحد اندازه‌گیری آن نیوتن (N) است.

۳-۱ فرضیات

در علم مکانیک به منظور ساده‌تر شدن حل مسائل، فرضیاتی به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود.

۱) جسم صلب (Rigid Body):

جسمی است که در اثر اعمال نیرو تغییر شکل ندهد.

۲) نقطه مادی (Particle):

جسمی است که از ابعاد آن صرف‌نظر می‌شود؛ به عنوان مثال می‌توان کره زمین را در فضا به صورت یک نقطه مادی در نظر گرفت.

۴-۱ قوانین نیوتن:

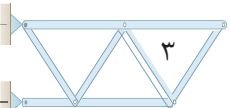
مکانیک اجسام صلب بر اساس قوانین نیوتن به شرح زیر استوار است:

۱-۴-۱ قانون اول نیوتن:

هرگاه مجموع نیروهای وارد بر یک جسم صفر باشد:

اگر جسم ساکن باشد تا ابد ساکن باقی می‌ماند.

اگر در حال حرکت باشد به حرکت یکنواخت و مستقیم‌الخط خود ادامه می‌دهد.



۱-۴-۲- قانون دوم نیوتن:

هرگاه مجموع نیروهای وارد بر یک جسم صفر نباشد، آن جسم شتابی متناسب با مجموع نیروها و در راستای آن می‌گیرد. قانون دوم نیوتن با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$F = m.a \quad (۱-۱)$$

در این رابطه:

F مجموع نیروهای وارد بر جسم بر حسب N

m جرم جسم بر حسب kg

a شتاب ایجاد شده در جسم بر حسب $\frac{m}{s^2}$ می‌باشد.

یک مورد خاص و بسیار مهم این قانون وزن اجسام است که به صورت زیر تعریف

می‌شود:

تعریف وزن (Weight):

وزن نیرویی است که از طرف زمین به اجسام وارد می‌شود و با رابطه (۲-۱) بیان می‌گردد که شباهت زیادی با رابطه $F=m.a$ دارد.

$$w = m.g \quad (۲-۱)$$

w : وزن جسم بر حسب نیوتن

m : جرم جسم بر حسب kg

g : شتاب جاذبه زمین معادل $(g = 9.81 \approx 10 \frac{m}{s^2})$ می‌باشد.

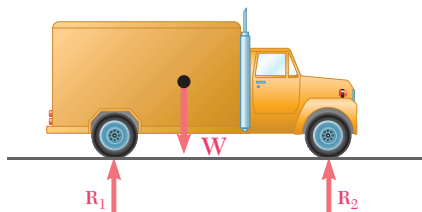
تذکر:

واحد دیگر وزن، کیلوگرم نیرو (kgf) می‌باشد که معادل ۱۰ نیوتن است یعنی:

$$1 kgf \approx 10 N$$

۱-۴-۳- قانون سوم نیوتن:

هر عملی را عکس‌العملی است مساوی با آن و در جهت خلاف آن.



شکل ۱-۱

یادآوری:

در این کتاب از سامانه بین‌المللی واحدهای اندازه‌گیری (SI) استفاده می‌کنیم که در اکثر کشورها نیز پذیرفته شده است.

واحدهای اندازه‌گیری کمیت‌ها در کتاب محاسبات فنی ساختمان بیان گردیده و در این جا به منظور تکمیل آن پیشنویندهای واحدهای اندازه‌گیری را یادآوری می‌نمائیم و مزیت استفاده از این پیشنویندها این است که از نوشتن اعداد خیلی بزرگ و خیلی کوچک اجتناب می‌شود. به عنوان مثال می‌توان 247500 N را به صورت $247/5 \text{ kN}$ و یا $0/00546 \text{ m}$ را به شکل $5/46 \text{ mm}$ نوشت.

تذکر:

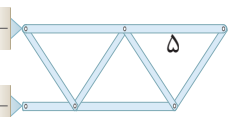
بین پیشوند و واحد اندازه‌گیری مورد نظر از هیچ علامتی استفاده نمی‌شود اما بین دو واحد اندازه‌گیری مختلف هر علامتی نظیر \times و $/$ می‌تواند وجود داشته باشد به طور مثال: N.m یعنی نیوتن متر و nm یعنی نانومتر که معادل (10^{-9} m) می‌باشد.

مثال: $7/5 \times 10^{-5} \text{ MN}$ چند نیوتن است؟

$$7/5 \times 10^{-5} \times 10^6 = 75 \text{ N}$$

جدول (۱-۱) پیشوندهای آحاد اندازه‌گیری

نام پیشوند	علامت اختصاری	مقدار عددی	شکل توانی
پیکو	p	$0/0000000001$	10^{-12}
نانو	n	$0/00000001$	10^{-9}
میکرو	μ	$0/000001$	10^{-6}
میلی	m	$0/001$	10^{-3}
کیلو	K	$1,000$	10^3
مگا	M	$1,000,000$	10^6
گیگا	G	$1,000,000,000$	10^9
ترا	T	$1,000,000,000,000$	10^{12}



۱- اصطلاحات زیر را تعریف کنید:

علم مکانیک - استاتیک - دینامیک - جسم صلب - نقطه مادی

۲- علم مکانیک به چند حوزه تقسیم می‌شود؛ نام ببرید.

۳- مفاهیم اصلی در علم مکانیک را نام برده و هر یک را توضیح دهید.

۴- قوانین نیوتن را نام برده و هر یک را توضیح دهید.

۵- جرم جسمی 60 kg است. وزن آن را بر حسب N و kgf محاسبه کنید.

۶- به واحدهای خواسته شده تبدیل کنید:

الف) $1/5 \text{ kN} = ? \text{ N}$

ب) $\text{kN.cm} = ? \text{ N.m}$

ج) $12 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = ? \text{ M} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

د) $25 \text{ MN.m} = ? \text{ N.cm}$

ه) $2 \mu\text{N.Mm} = ? \text{ N.m}$

و) $1 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} = ? \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

ز) $18 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} = ? \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

تاریخ مهندسی (مطالعه آزاد)

اخوان‌الصفاء گروهی از متفکران و فیلسوفان بودند که در سال ۳۷۳ هجری در بصره به صورت انجمنی مخفی گرد آمدند. نام افراد این انجمن تماماً مشخص نیست ولی بعضی از افراد این گروه، ایرانی بوده‌اند: ابوسلیمان محمد بن مشیر بستی مقدسی و ابوالحسن علی بن هارون زنجانی و محمد بن احمد نهرجوری از جمله ایرانیان اخوان‌الصفاء بوده‌اند.

گزیده‌ای از نظرات اخوان‌الصفاء دربارهٔ پدیدارهای طبیعی که در بخشی از رسائل آن‌ها موسوم به «حدود و رسوم» آمده است تعاریف بنیادی استاتیک و مقاومت مصالح است که در زیر نقل گردیده‌اند.

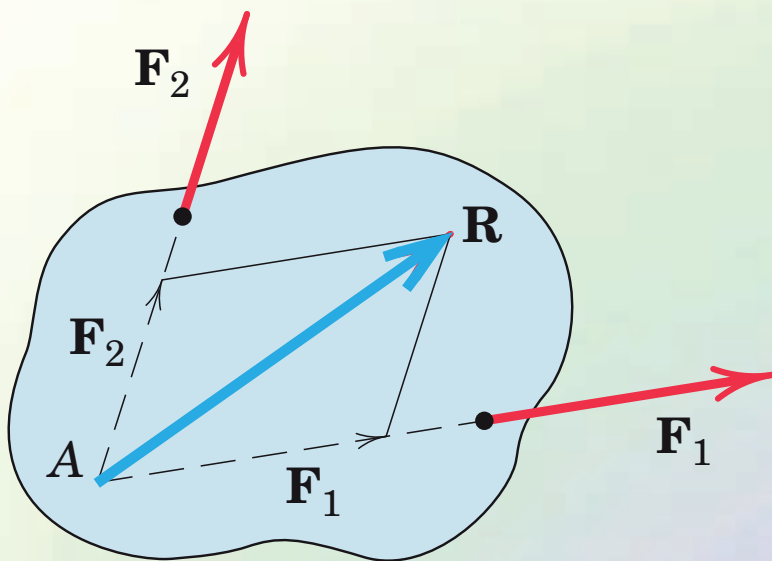
مکان: هر موضوعی که شیء متمکن را در بر گیرد، و آن نهایات جسم است.

زمان: شماره حرکت‌های سپهر، و تکرار شب و روز است.

جسم: هر چیزی که طول و عرض و عمق داشته باشد.

فصل دوم

بُردارها



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- کمیت‌های فیزیکی را بشناسد.
- ۲- انواع بردارها را تعریف نماید.
- ۳- جمع و تفریق بردارها را به روش ترسیمی انجام دهد.
- ۴- یک بردار را به مؤلفه‌های آن تجزیه نماید.
- ۵- نمایش برداری بردارها را بدانند.
- ۶- مقدار بردار را با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن محاسبه نماید.

۱-۲ کمیت‌های فیزیکی

۱-۱-۲- کمیت‌های عددی یا اسکالر

کمیت‌هایی هستند که فقط دارای اندازه یا مقدار می‌باشند؛ مانند جرم، زمان، طول و کار و انرژی.

۲-۱-۲- کمیت‌های برداری

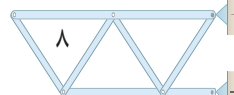
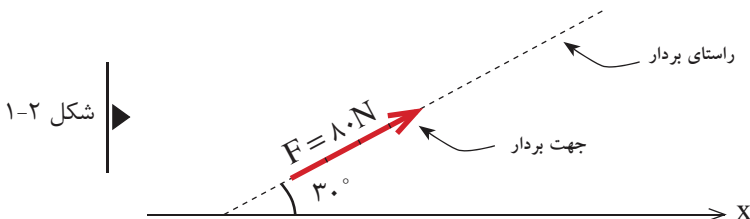
کمیت‌هایی هستند که علاوه بر مقدار دارای جهت و راستا نیز می‌باشند. مانند: بردارهای نیرو، گشتاور، سرعت، شتاب و جابجایی.

۲-۲ بردارها (Vector)

هر بردار به صورت یک پیکان با طولی متناسب با مقدار آن ترسیم می‌شود به عنوان مثال در شکل (۱-۲)، بردار نیروی (\vec{F}) با مقدار 80 N و با زاویه 30° نسبت به محور x و در جهت و راستای نشان داده شده ترسیم شده است.

نکته:

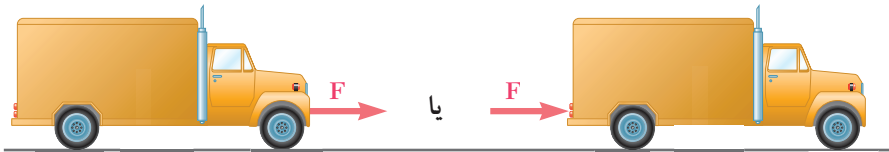
زاویه امتداد هر بردار، با یک امتداد مبنا که معمولاً امتدادهای x یا y است، مشخص می‌شود.



۳-۲ انواع بردارها

۲-۳-۱ بردار لغزان

برداری است که اگر در راستای خود جابه‌جا شود، اثر آن بر جسم تغییر ننماید. همانند نیروی F در شکل (۲-۲)



شکل ۲-۲

۲-۳-۲ بردار ثابت

برداری است که مکان معینی را در فضا اشغال می‌کند و نمی‌توان آن را جابه‌جا نمود. یعنی با جابه‌جا کردن آن، اثر آن بر جسم تغییر می‌نماید. مثلاً ضربه‌ای که به سر انسان وارد می‌شود با ضربه‌ای که با همان مقدار و همان جهت به پای او وارد می‌آید متفاوت است.

۳-۳-۲ بردارهای هم‌سنگ

دو بردار مساوی، موازی و هم‌جهت را بردارهای هم‌سنگ می‌نامیم. در شکل (۳-۲) بردارهای \vec{F} و \vec{P} هم‌سنگ‌اند.



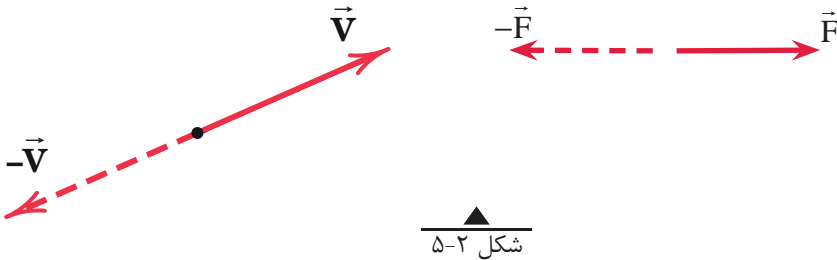
۲-۳-۴ بردارهای زوج

دو بردار مساوی، موازی و مختلف‌الجهت را بردارهای زوج می‌نامیم. در شکل (۴-۲) بردارهای \vec{F} و \vec{P} زوج‌اند.



۵-۳-۲ بردارهای مخالف

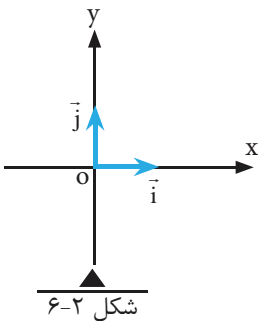
دو بردار مساوی، هم‌راستا و مختلف‌الجهت را بردارهای مخالف گویند. شکل (۵-۲)



۶-۳-۲ بردار یکه (واحد)

برداري که مقدار (اندازه) آن برابر واحد است را بردار یکه یا واحد می‌نامیم.

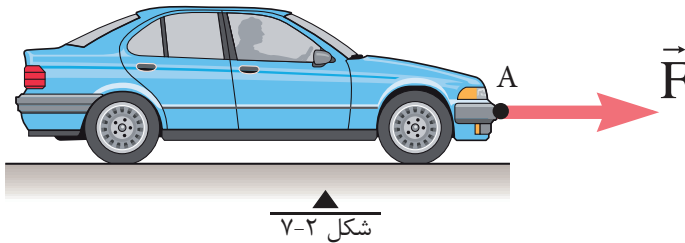
بردار واحد روی محور x ها را با \vec{i} و روی محور y ها را با \vec{j} نمایش می‌دهند. شکل (۶-۲)



۷-۳-۲ بردار نیرو

برداري است که علاوه بر مقدار، جهت و راستا دارای نقطه اثر نیز می‌باشد. در شکل (۷-۲) نقطه A ، نقطه‌اثر بردار نیروی \vec{F} می‌باشد.

و واحد اندازه‌گیری نیرو، نیوتن (N) است و مطابق قانون دوم نیوتن به صورت زیر تعریف می‌شود:



تعریف نیوتن با استفاده از قانون دوم نیوتن

یک نیوتن مقدار نیرویی است که اگر به جرم یک کیلوگرم وارد شود، در آن شتابی معادل یک

$$F = m.a$$

متر بر مجذور ثانیه و در جهت اعمال نیرو ایجاد نماید.

$$1N = 1kg \times 1 \frac{m}{s^2}$$

۴-۲ جمع و تفریق بردارها

عملیات جمع و تفریق کمیت‌های برداری با جمع و تفریق کمیت‌های عددی (اسکالر) متفاوت است. یعنی نمی‌توان مقادیر عددی دو یا چند بردار، به‌غیر از بردارهای هم‌راستا، و موازی را با یکدیگر جمع و یا تفریق نمود. در این کتاب برای نشان دادن یک بردار مانند \vec{V} از علامت (\rightarrow) در بالای آن استفاده می‌شود و برای نشان دادن مقدار (اندازه) آن بردار علامت (\rightarrow) بالای آن برداشته می‌شود.

\vec{V} : بردار V
اندازه یا مقدار بردار V :

۱-۴-۲ روش‌های جمع و تفریق بردارها

جمع و تفریق بردارها به دو روش ۱- ترسیمی ۲- محاسباتی انجام می‌شود که در این فصل با روش ترسیمی و در فصل بعد با روش‌های محاسباتی آشنا خواهید شد.

۱-۴-۲-۱ روش ترسیمی

در این روش با استفاده از وسایل ترسیم و مقیاس مناسب جمع و تفریق بردارها انجام می‌شود. روش‌های ترسیمی جمع و تفریق بردارها شامل سه روش زیر می‌باشد:

الف) روش مثلث

ب) روش متوازی‌الاضلاع

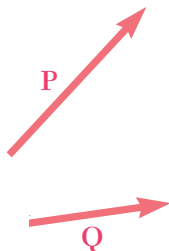
ج) روش چندضلعی

لازم به ذکر است که روش‌های مثلث و متوازی‌الاضلاع برای مجموع یا تفاضل دو بردار و روش چندضلعی برای مجموع یا تفاضل بیش از دو بردار مناسب می‌باشند.

الف) روش مثلث

دو بردار \vec{P} و \vec{Q} مطابق شکل (۸-۲) مفروض است. برای به‌دست آوردن مجموع

آنها یعنی $\vec{P} + \vec{Q}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:



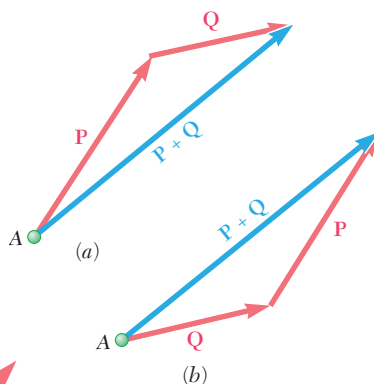
شکل ۸-۲



- (۱) از نقطه دلخواه مانند A هم سنگ یکی از بردارها ترسیم می شود
- (۲) از انتهای بردار اول هم سنگ دوم ترسیم می شود
- (۳) برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار دوم وصل می شود مجموع دو بردار خواهد بود که مقدار آن به وسیله خط کش مقیاس اندازه گیری می شود: شکل (۹-۲)

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

(۱-۲)



شکل ۹-۲

ب) روش متوازی الاضلاع

دو بردار \vec{P} و \vec{Q} مطابق شکل (۱۰-۲)

مفروض است و مجموع آنها یعنی $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ مدنظر می باشد. طبق قانون متوازی الاضلاع به شرح

زیر عمل می نماییم: شکل (۱۱-۲)

(۱) از نقطه دلخواه مانند O هم سنگ بردارهای \vec{P} و

\vec{Q} را ترسیم می نماییم

(۲) از انتهای بردار \vec{P} به موازات بردار \vec{Q} خطی

ترسیم می شود (خط d_1)

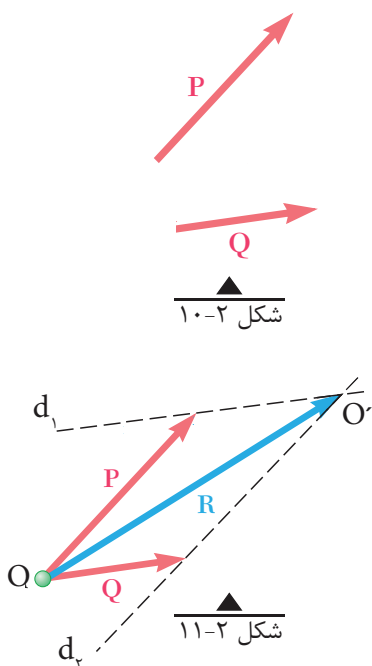
(۳) از انتهای بردار \vec{Q} به موازات بردار \vec{P} خطی

ترسیم می شود (خط d_2) تا خط d_1 را در نقطه

O' قطع نماید.

(۴) برداری که از O به O' ترسیم می شود همان مجموع دو بردار \vec{P} و \vec{Q} یعنی \vec{R} خواهد

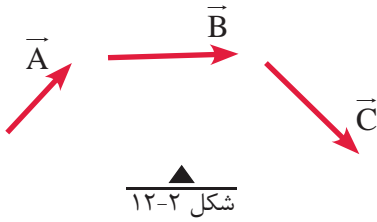
بود که مقدار آن به وسیله خط کش مقیاس برداشت می شود.



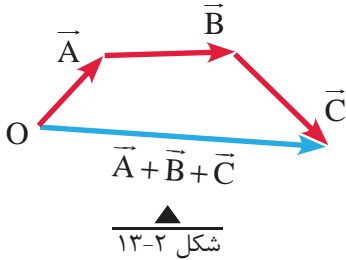
شکل ۱۰-۲

شکل ۱۱-۲

ج) روش چندضلعی



در این روش به منظور ترسیم مجموع چند بردار مانند شکل (۱۲-۲) از یک نقطه دلخواه مانند O هم‌سنگ بردار اول را رسم می‌کنیم و از انتهای بردار رسم شده هم‌سنگ بردار دوم ترسیم می‌شود. این روند تا ترسیم تمامی بردارها ادامه می‌یابد؛ برداری که از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر رسم می‌شود، مجموع بردارها خواهد بود. شکل (۱۳-۲)



نکته (۱)

هر گاه انتهای آخرین بردار بر ابتدای بردار اول منطبق گردد (یک چندضلعی بسته تشکیل شود)، مجموع بردارها صفر خواهد بود.

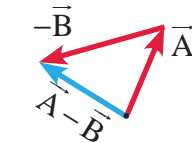
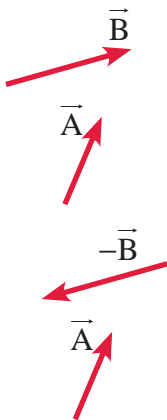
نکته (۲)

در حالتی که بردارها موازی یا هم‌راستا باشند، برای جمع و تفریق آن‌ها کافی است با در نظر گرفتن جهت بردارها، آن‌ها را روی یک محور ترسیم نمود.

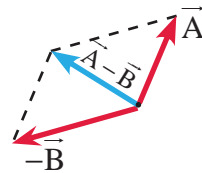
تذکر:

عملیات تفریق دو یا چند بردار به روش‌های فوق با استفاده از تعریف بردار مخالف مطابق شکل (۱۴-۲) امکان‌پذیر است. یعنی:

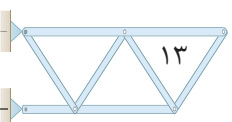
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (۲-۲)$$



تفاضل بردارهای \vec{A} و \vec{B} به روش مثلث

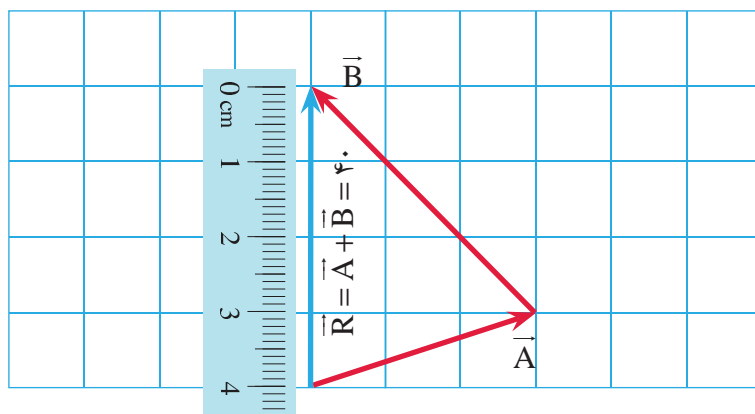
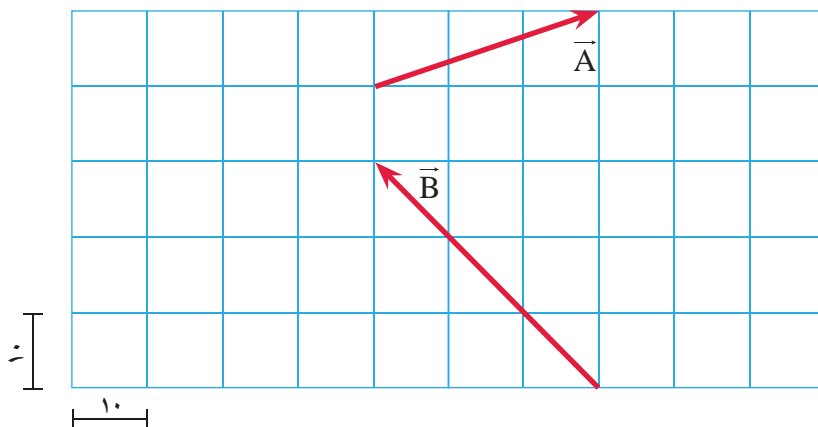


تفاضل بردارهای \vec{A} و \vec{B} به روش متوازی‌الاضلاع

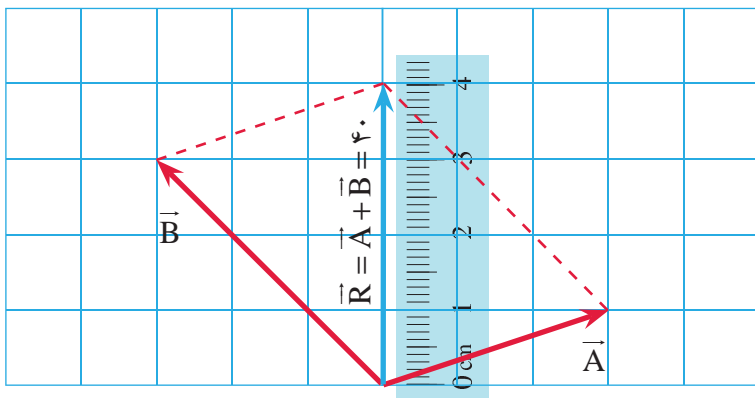


مثال ۱

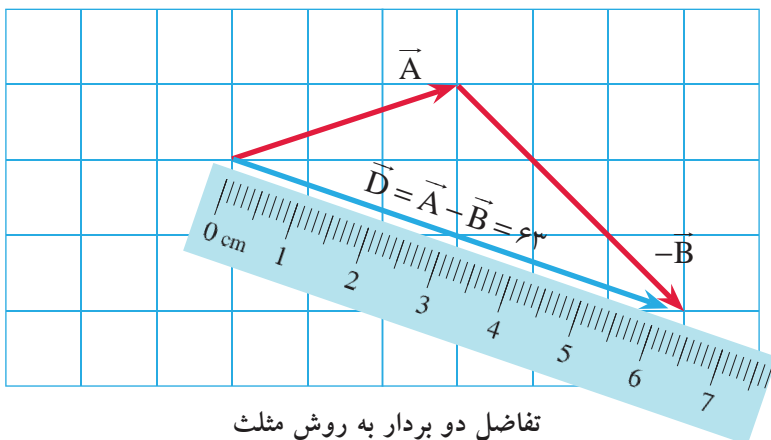
در شکل زیر بردارهای $\vec{A} + \vec{B}$ و $\vec{A} - \vec{B}$ را به روش‌های ترسیمی مثلث و متوازی‌الاضلاع نشان داده و اندازه تقریبی آن‌ها را با خط‌کش مقیاس برداشت نمایید.
(ابعاد شبکه برابر ۱۰ واحد است)



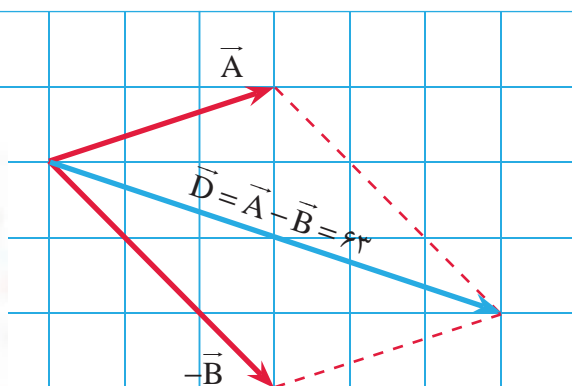
مجموع دو بردار به روش مثلث



مجموع دو بردار به روش متوازی الاضلاع

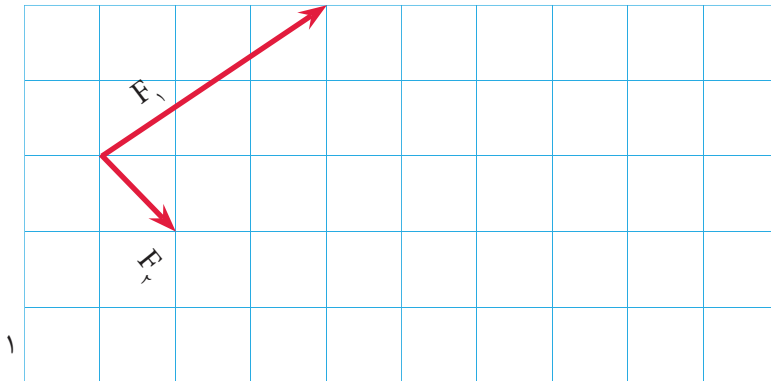


تفاضل دو بردار به روش مثلث

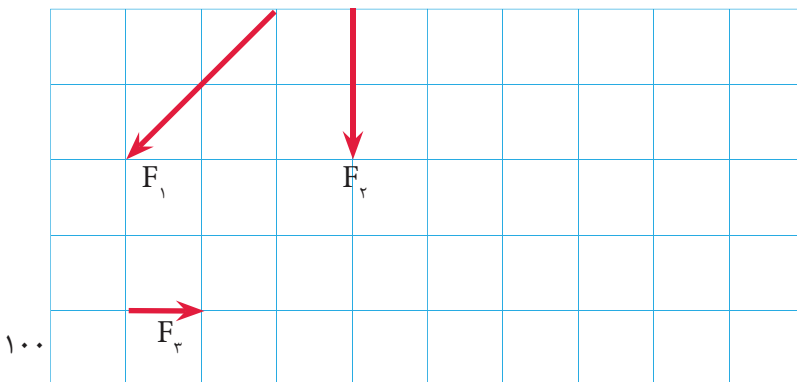


تفاضل دو بردار به روش متوازی الاضلاع

- ۱- کمیت‌های فیزیکی را نام برده و هر یک را تعریف کنید و مثال بزنید.
- ۲- از کمیت‌های زیر کدام یک اسکالر و کدام یک برداری می‌باشند؟
شتاب - وزن - سطح - حجم - جابه‌جایی
- ۳- انواع بردارها را نام برده و هر کدام را تعریف کنید.
- ۴- در هر شکل جمع بردارهای داده شده را به روش ترسیمی نشان دهید و اندازه و زاویه بردار برآیند (مجموع آن‌ها) با امتداد افق را با استفاده از خط کش و نقاله اندازه‌گیری نمایید.

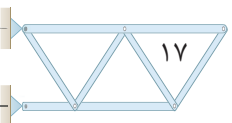
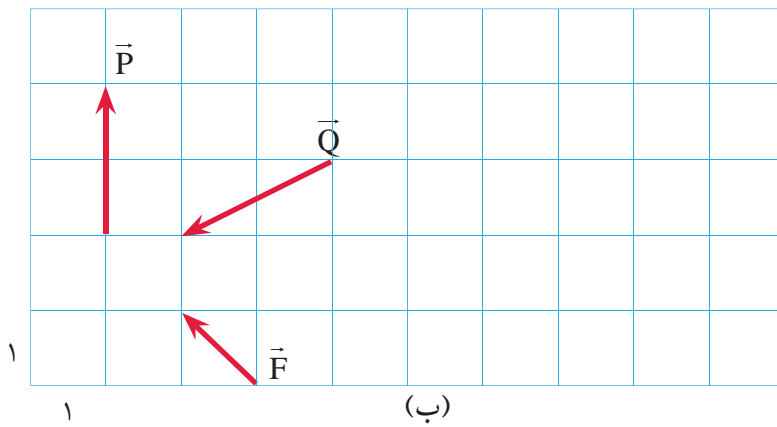
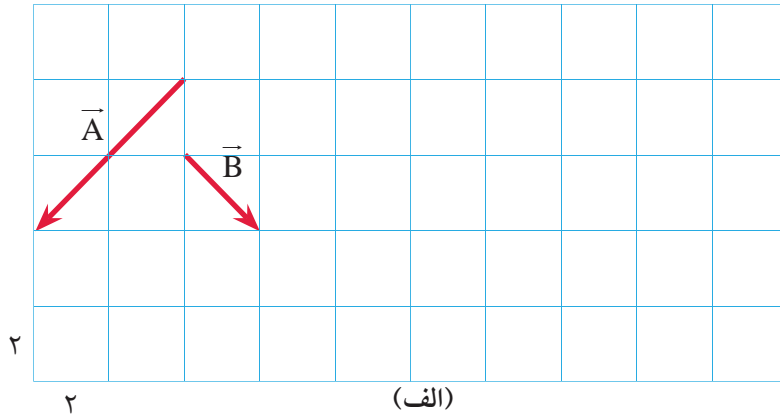


(الف)



(ب)

۵- در شکل‌های زیر حاصل عبارات $\vec{A}-\vec{B}$ و $\vec{F}-\vec{P}+\vec{Q}$ را به روش ترسیمی تعیین کنید.



۵-۲ تجزیه یک بردار به مؤلفه‌های آن به روش ترسیمی

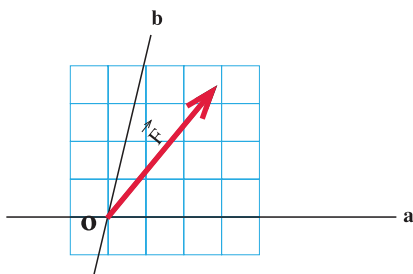
همان‌گونه که در قسمت قبل دیدیم دو بردار با امتداد و مقادیر مشخص را می‌توان با استفاده از روش‌های مثلث یا متوازی‌الاضلاع با یکدیگر جمع نمود و مجموع آن‌ها را به دست آورد؛ که این بردار مجموع را برآیند دو بردار اولیه نیز می‌نامند. حال چنانچه دو امتداد دلخواه در صفحه داشته باشیم و برداری به نام \vec{F} نیز داده شده باشد می‌توان آن را بر روی دو امتداد مورد نظر به شرح ذیل تجزیه نمود که عکس عمل جمع دو بردار می‌باشد. شکل‌های (۲-۱۵) و (۲-۱۶)

(۱) از انتهای بردار \vec{F} دو خط به موازات محورهای a و b ترسیم نموده (خطوط a' و b') تا آن‌ها را در نقاط O_1 و O_2 قطع نماید.

(۲) بردار $\overrightarrow{OO_1}$ مؤلفه \vec{F} روی امتداد a خواهد بود که با \vec{F}_a نشان داده می‌شود.

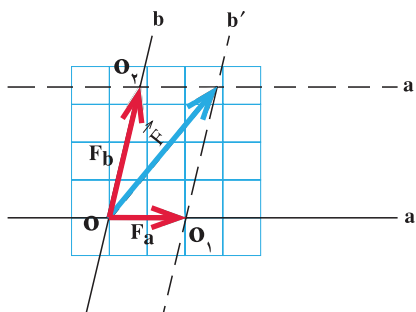
(۳) بردار $\overrightarrow{OO_2}$ مؤلفه \vec{F} روی امتداد b خواهد بود که با نماد \vec{F}_b نشان داده می‌شود.

روش فوق، روش کلی برای تجزیه یک بردار است. حالت خاصی از آن تجزیه یک بردار روی دو محور متعامد (عمود بر هم) است که کاربرد زیادی در حل مسائل ایستایی دارد.



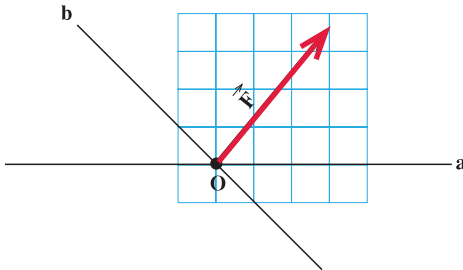
شکل ۱۵-۲

شکل ۱۶-۲

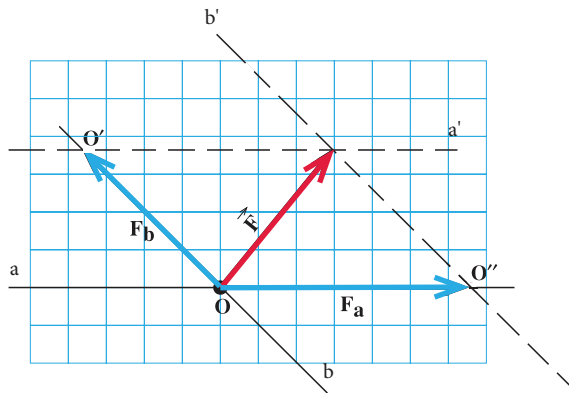


مثال ۲

در شکل روبه‌رو بردار F را روی امتدادهای a و b تجزیه کنید.

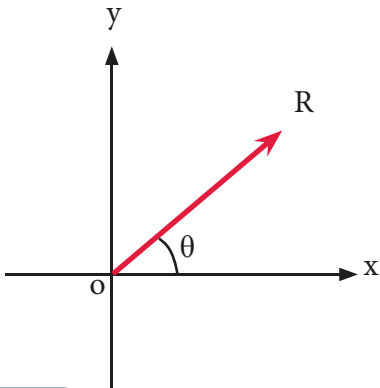


حل:

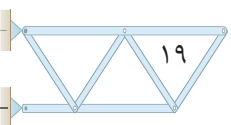


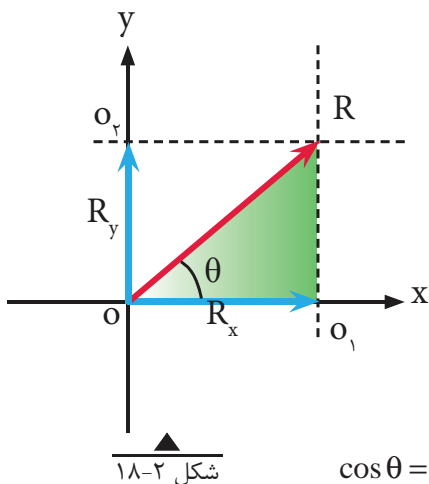
۶-۲ تجزیه یک بردار به مؤلفه‌های متعامد آن در دستگاه مختصات دکارتی

مطابق شکل (۱۷-۲) بردار \vec{R} با زاویه θ نسبت به محور x مفروض است. می‌خواهیم آن را روی محورهای متعامد x و y تجزیه نماییم. چنانچه مطابق مراحل سه‌گانه در بخش (۵-۲) عمل کنیم، به شکل (۱۸-۲) خواهیم رسید.



شکل ۱۶-۲





اندازه یا مقدار مؤلفه‌های R_x و R_y با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث رنگ شده شکل (۱۸-۲) به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

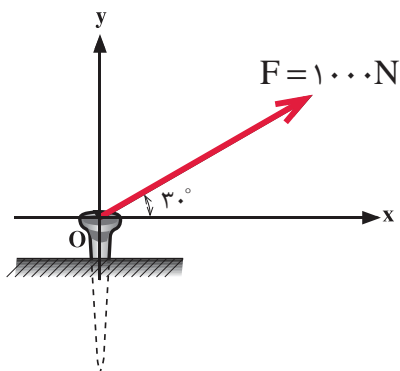
$$\cos \theta = \frac{R_x}{R} \Rightarrow$$

$$R_x = R \cdot \cos \theta$$

(۳-۲)

$$\sin \theta = \frac{R_y}{R} \Rightarrow$$

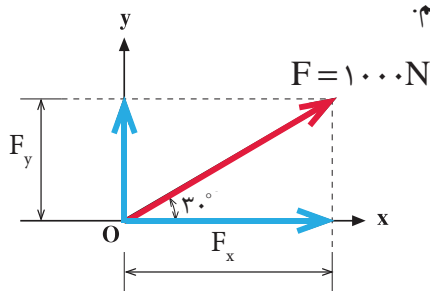
$$R_y = R \cdot \sin \theta$$



مثال ۳

نیروی F مطابق شکل بر میخی وارد می‌شود. مطلوب است تجزیه این نیرو روی محورهای x و y و محاسبه مقادیر مؤلفه‌ها.
حل:

نیروی F را به مؤلفه‌های متعامد تجزیه می‌کنیم.



$$F_x = F \cos \theta = 1000 \times \cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 866.02 \text{ N}$$

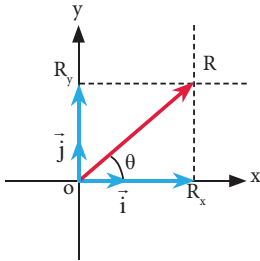
$$F_y = F \sin \theta = 1000 \times \sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 500 \text{ N}$$

۲-۶-۱- نمایش برداری یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی

در دستگاه مختصات دکارتی محوره‌های ox و oy بر یکدیگر عمود بوده و بردارهای واحد (یکه) روی آن‌ها به ترتیب با \vec{i} و \vec{j} نمایش داده می‌شوند و برداری مانند بردار \vec{R} مطابق شکل (۲-۱۹) در این دستگاه با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (۲-۴)$$

که در رابطه فوق R_x مؤلفه \vec{R} روی محور x و R_y مؤلفه \vec{R} روی محور y می‌باشد.



شکل ۲-۱۹

مثال ۴

فرم برداری بردار F در شکل (مثال ۳) را بنویسید.

حل:

فرم برداری بردار \vec{F} به صورت $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$ می‌باشد.

با توجه به نتایج مثال ۳ داریم:

$$F_x = ۸۶۶ / ۰.۲ \text{ N}$$

$$F_y = ۵۰۰ \text{ N}$$

بنابراین:

$$\vec{F} = ۸۶۶ / ۰.۲ \vec{i} + ۵۰۰ \vec{j}$$

۲-۷- تعیین اندازه یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن

همان‌طور که یک بردار را می‌توان به دو مؤلفه روی امتدادهای مختلف تجزیه کرد می‌توان به کمک مؤلفه‌های یک بردار، اندازه بردار و زاویه آن را به کمک رابطه فیثاغورث و نسبت‌های مثلثاتی تعیین کرد.

هر گاه برداری مانند $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$ داشته باشیم، می‌توان اندازه R و زاویه آن را با امتداد x به صورت زیر تعیین نمود:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (۲-۵)$$

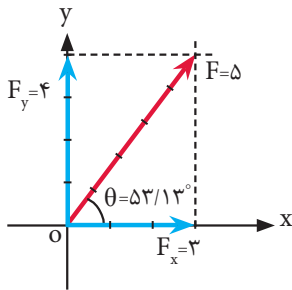
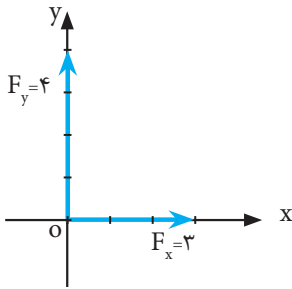
مقدار (اندازه) بردار R

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right|$$

زاویه بردار R نسبت به محور x ها (۲-۶)



مثال ۵



بردار $\vec{F} = (3\vec{i} + 4\vec{j})$ را ترسیم نموده، مقدار و زاویه آن را با محور x ها به دست آورید.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow \boxed{F = 5}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_y}{F_x} \right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left| \frac{4}{3} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 53/13^\circ}$$

خلاصه فصل

- کمیت‌های فیزیکی به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:
- الف- کمیت‌های اسکالر (عددی) ب- کمیت‌های برداری
- بردارهای یکه (واحد) روی محورهای x و y در دستگاه مختصات دکارتی به ترتیب با \vec{i} و \vec{j} نمایش داده می‌شوند.
- جمع و تفریق کمیت‌های برداری با جمع و تفریق کمیت‌های عددی متفاوت می‌باشد.
- جمع و تفریق دو یا چند بردار به صورت ترسیمی با روش‌های مثلث و متوازی‌الاضلاع و چندضلعی، انجام می‌شود.
- هر بردار را می‌توان روی دو محور دلخواه به مؤلفه‌های آن تجزیه نمود.
- مؤلفه‌های متعامد یک بردار در صفحه مختصات دکارتی با روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$R_x = R \cdot \cos \theta$$

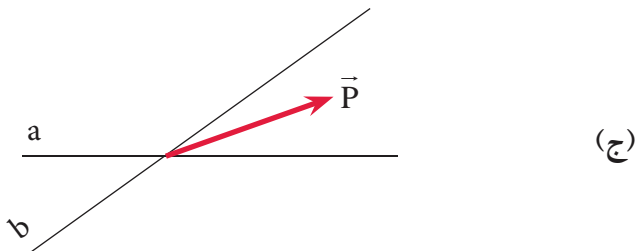
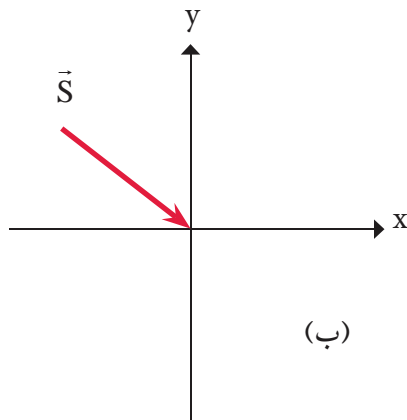
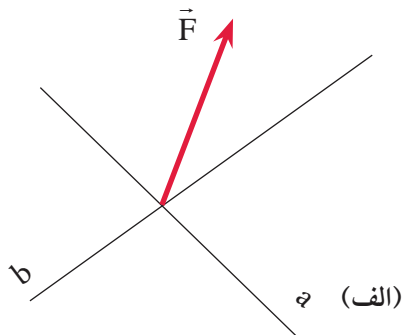
$$R_y = R \cdot \sin \theta$$

- فرم برداری یک بردار با استفاده از مؤلفه‌های متعامد آن در صفحه مختصات دکارتی عبارت است از:
$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$
- برای جمع و تفریق بردارهای هم‌راستا و یا موازی کافی است اندازه آن‌ها را با یکدیگر به صورت جبری جمع و یا تفریق نمود.
- اندازه برداری مانند $\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$ و زاویه آن با محور x ها از روابط زیر تعیین می‌شوند:

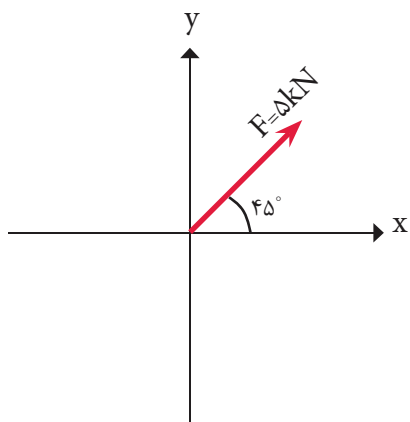
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \text{اندازه بردار } R$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \left(\frac{R_y}{R_x} \right) \right| \quad \text{زاویه بردار } R \text{ با محور } x$$

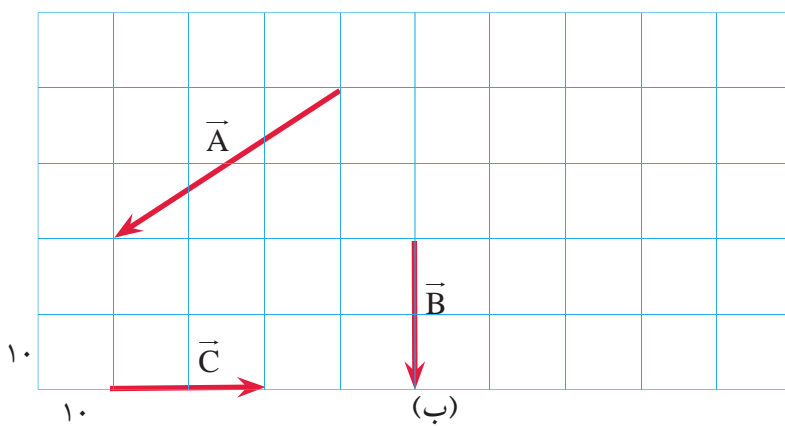
۱- بردارهای زیر را به روش ترسیمی روی محورهای داده شده تجزیه کنید.

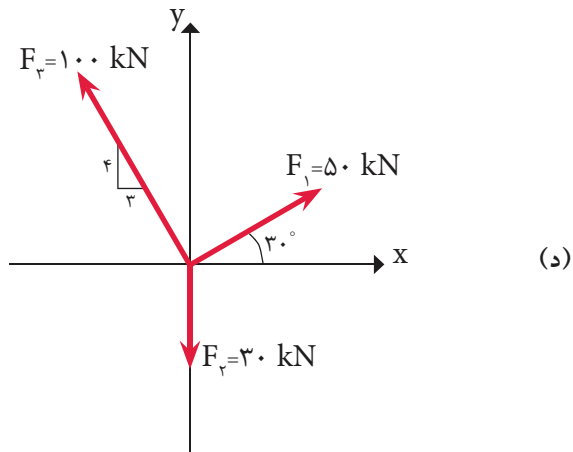
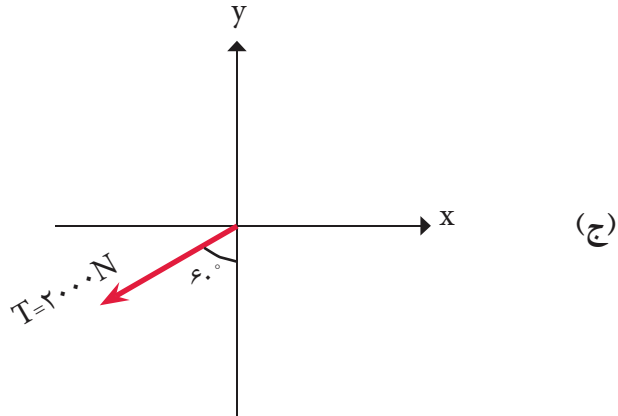


۲- بردارهای زیر را به مؤلفه‌های متعامد آن تجزیه نمائید و فرم برداری آن‌ها را بنویسید.



(الف)





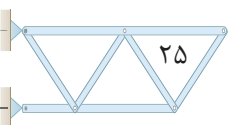
۳- بردارهای زیر را ترسیم نموده و اندازه و زاویه هر یک را نسبت به محور x و y تعیین کنید.

(ب) $\vec{P} = -5\vec{i}$

(الف) $\vec{F} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$

(د) $\vec{Q} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$

(ج) $\vec{T} = 3/5\vec{j}$



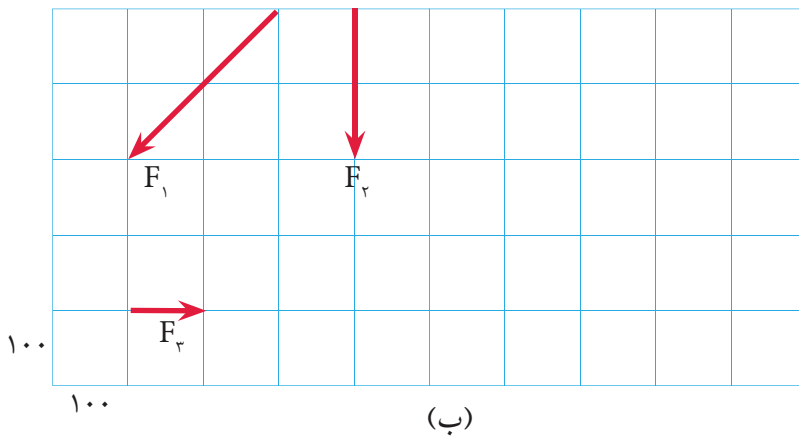
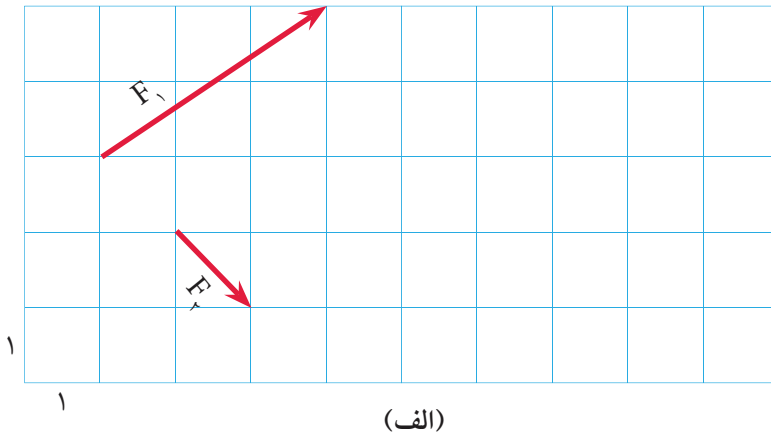
۴- در شکل‌های زیر مطلوب است:

الف) فرم برداری هر بردار.

ب) اندازه هر یک را به صورت ترسیمی (با خط‌کش) به دست آورید.

ج) اندازه هر یک را به صورت محاسباتی به دست آورید.

د) اندازه‌های محاسباتی و ترسیمی هر بردار را با هم مقایسه کنید.

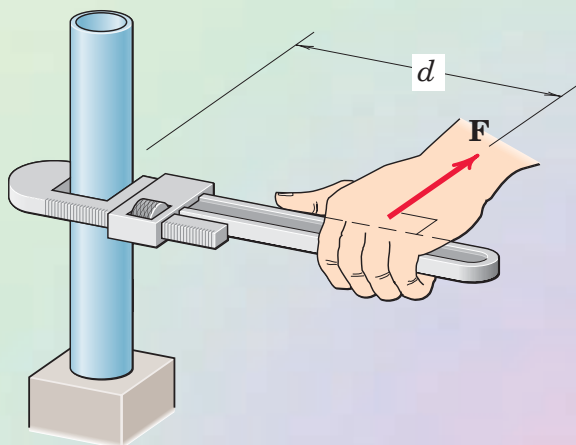
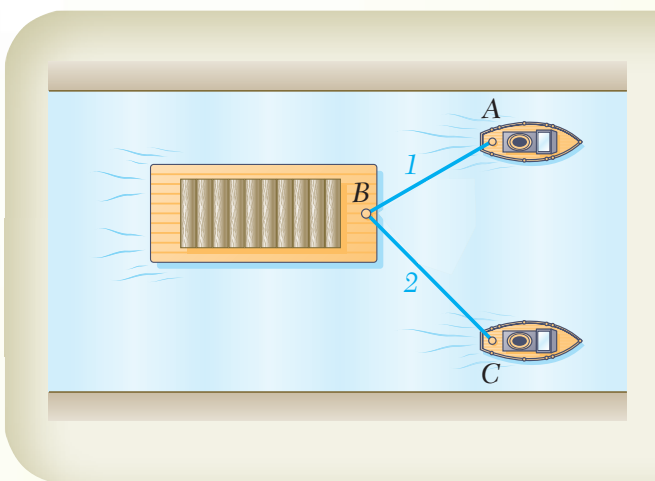


فصل

سوم

نیرو و

سامانه‌های نیروی



هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- انواع نیروها را بشناسد.
- ۲- مقدار و امتداد برآیند نیروهای وارد بر یک نقطهٔ مادی را محاسبه کند.
- ۳- گشتاور یا لنگر را تعریف نماید و مقدار آن را نسبت به یک نقطه محاسبه نموده و جهت آن را تشخیص دهد.
- ۴- قضیه وارینون را تعریف کند و برای محاسبهٔ گشتاور آن را به کار گیرد.
- ۵- زوج نیرو را تعریف نماید و خصوصیات آن را بشناسد.
- ۶- گشتاور زوج نیرو را محاسبه کند.

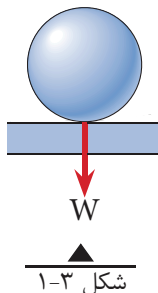
نیرو

نیرو کمیتی است برداری که می‌تواند باعث ایجاد حرکت، تغییر شکل یا چرخش در اجسام گردد.

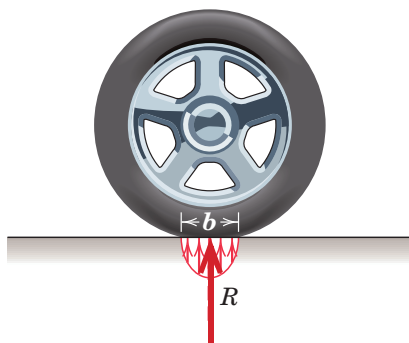
۱-۳ انواع نیرو

۱-۱-۳ نیروهای خارجی

نیروهایی هستند که از محیط اطراف و در خارج از وجود جسم به آن وارد می‌شوند. مکانیک اجسام صلب (استاتیک) فقط به نیروهای خارجی توجه دارد؛ مانند: وزن گوی در شکل (۱-۳) که به کف وارد می‌شود.

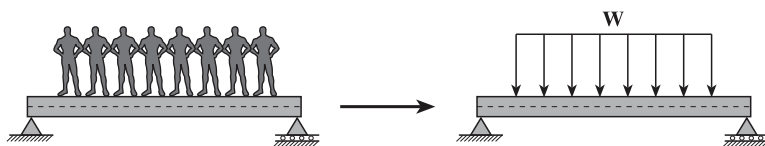


الف) نیروهای متمرکز: اگر نیرو به طول کوچکی از جسم وارد گردد آنرا نیروی متمرکز می‌نامند. شکل (۲-۳)



شکل ۲-۳

ب) نیروهای گسترده: اگر نیرو در طول قابل توجهی از جسم پخش گردد آنرا نیروی گسترده گویند. شکل (۳-۳)



شکل ۳-۳

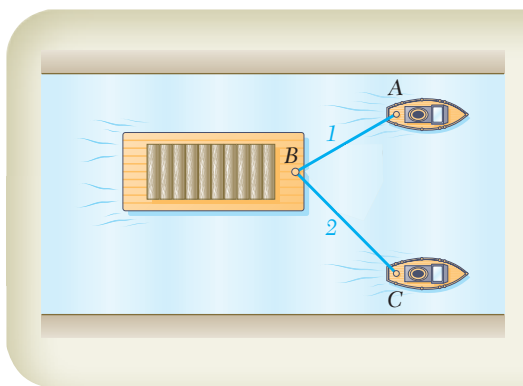
۲-۱-۳- نیروهای داخلی

نیروهایی هستند که در داخل جسم و بین ذرات تشکیل دهنده آن ایجاد می‌شوند؛ مانند نیرویی که شخص هنگام اجرای بارفیکس در دستان خود احساس می‌کند؛ در مکانیک اجسام تغییرشکل پذیر (مقاومت مصالح) به نیروهای داخلی توجه می‌شود.

۲-۳ برآیند سامانه‌های نیرویی وارد بر نقطه مادی به روش محاسباتی

منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت است از جمع برداری آن نیروها، بنابراین بردار برآیند به تنهایی اثر همه نیروهای وارد به جسم را دارد.

به عنوان مثال در شکل (۴-۳) شناور B در مسیری به حرکت در می‌آید که در واقع امتداد بردار برآیند دو نیروی وارده از طرف قایق‌های A و C خواهد بود. این بدان معناست که می‌توان به جای دو نیروی مذکور نیروی برآیند آن‌ها را در امتداد مسیر حرکت شناور قرار داده و آن‌را به حرکت درآورد.

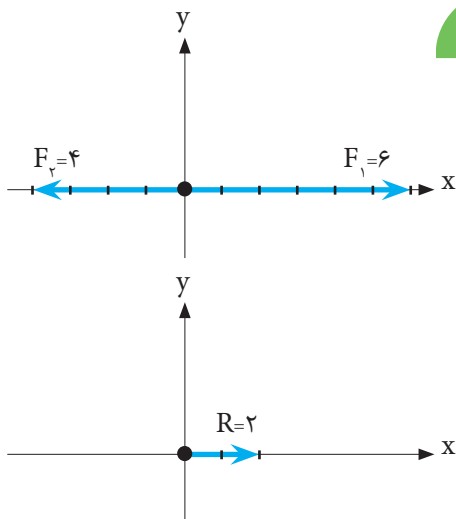


شکل ۴-۳

۳-۲-۱- برآیند نیروهای هم‌راستا و موازی

برای محاسبه برآیند نیروهای هم‌راستا کافی است مقادیر آن‌ها را با یکدیگر جمع جبری نماییم.

مثال ۱



$$\text{دو نیروی } F_1 = 6\vec{i} \text{ و } F_2 = -4\vec{i}$$

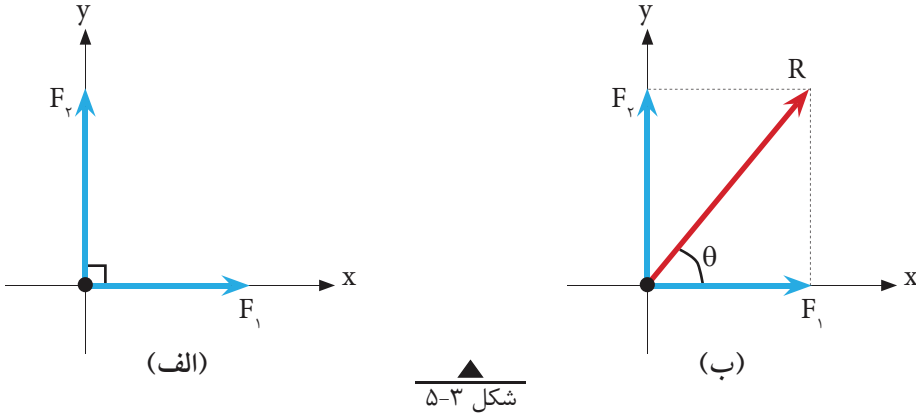
را روی محور مختصات ترسیم نموده و برآیند آن‌ها را محاسبه و ترسیم نمایید.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R} = 6\vec{i} - 4\vec{i} \Rightarrow \vec{R} = 2\vec{i}$$

۳-۲-۲- برآیند دو نیروی متعامد

برای محاسبه مقدار برآیند دو نیروی متعامد مطابق شکل (۳-۵-الف) با استفاده از رابطه فیثاغورث و شکل (۳-۵-ب) داریم:



$$R^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

و برای محاسبه زاویه برآیند با F_x می‌توان از رابطه تانژانت استفاده نمود:

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_y}{F_x} \right)$$

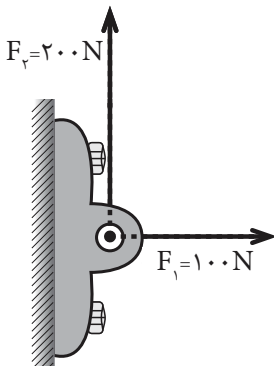
مثال ۲

در شکل زیر مطلوب است:

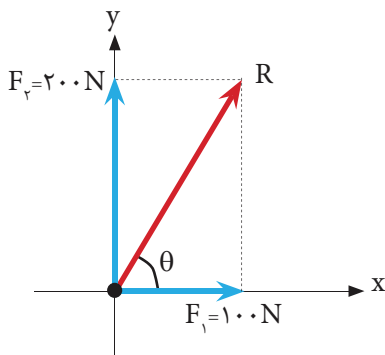
الف) ترسیم برآیند (R)

ب) تعیین مقدار برآیند

ج) تعیین زاویه برآیند با افق یا امتداد F_x



الف)

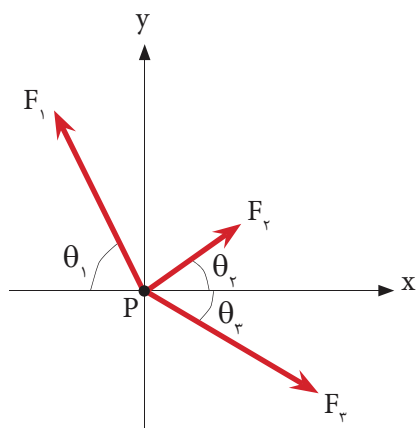


ب) $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{100^2 + 200^2} = \sqrt{50000} \Rightarrow R = 223.61 \text{ N}$

ج) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{200}{100}\right) \Rightarrow \theta = 63.43^\circ$

۳-۲-۳- محاسبه برآیند سامانه چندنیروی وارد به نقطه مادی

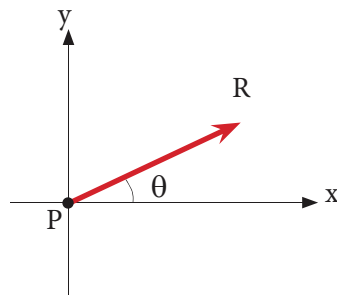
هر گاه بر یک نقطه مادی مانند P مطابق شکل (۳-۶-الف) نیروهای F_1 و F_2 و F_3 وارد شود، به کمک تجزیه به شرح زیر می توان اندازه برآیند این نیروها (R) و راستای برآیند با محور x یعنی θ را تعیین نمود. شکل (۳-۶-ب)



(الف)

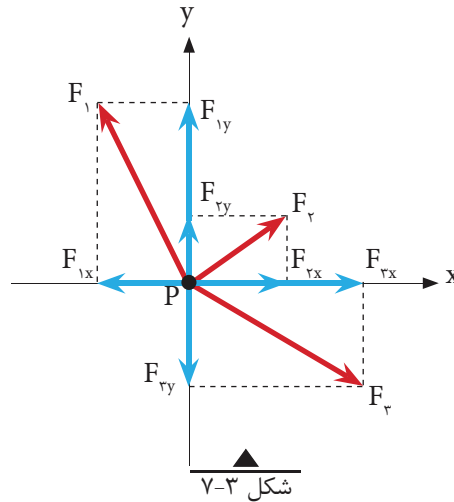
\cong

شکل ۳-۶



(ب)

گام اول: تجزیه هر یک از نیروها روی محورهای x و y : شکل (۷-۳)



گام دوم: نمایش برداری تمامی نیروها بر حسب بردارهای \vec{i} و \vec{j} ؛
گام سوم: محاسبه جمع جبری نیروهای هم‌راستا روی محورهای x و y

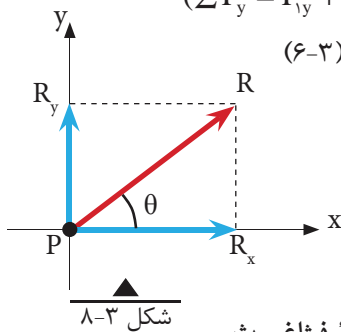
$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y \quad (۵-۳)$$

$\sum F_x$: مجموع مؤلفه‌های هم‌راستا با محور x ($\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$)

$\sum F_y$: مجموع مؤلفه‌های هم‌راستا با محور y ($\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$)

گام چهارم: نمایش برداری بردار برآیند (R) مطابق رابطه (۶-۳)

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \quad (۶-۳)$$



گام پنجم: نمایش ترسیمی بردار برآیند

مطابق شکل (۸-۳)

گام ششم: محاسبه اندازه (مقدار) برآیند با استفاده از رابطه فیثاغورث

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (۷-۳)$$

گام هفتم: محاسبه زاویه برآیند با امتداد محور x ها (θ)

با استفاده از رابطه تانژانت و با توجه به شکل ترسیم شده

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \quad (۸-۳) \quad \text{در گام پنجم}$$



مثال ۳

دو نیرو مطابق شکل توسط دو کابل بر یک سنگ معدنی وارد می‌شود. مطلوب است:

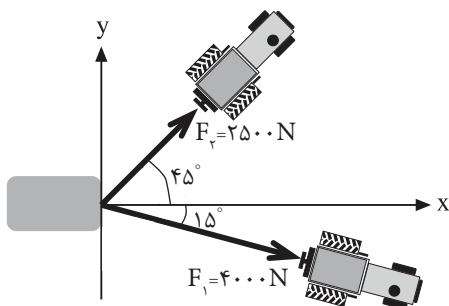
الف) نمایش برداری برآیند

ب) نمایش ترسیمی بردار برآیند

ج) محاسبه اندازه بردار برآیند

د) محاسبه زاویه برآیند با افق

ه) ترسیم مسیر جابه‌جایی سنگ

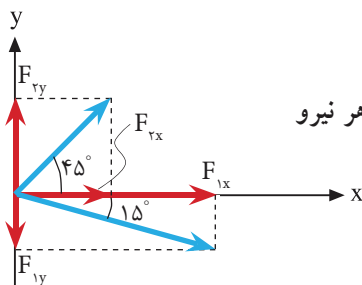


حل:

الف)

گام اول:

- تجزیه نیروها با توجه به اندازه و زاویه هر نیرو

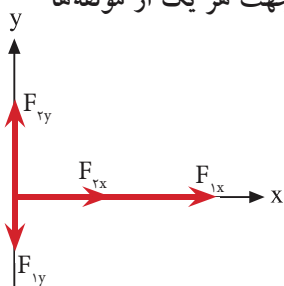


$$\begin{cases} F_{1x} = F_1 \cos \theta_1 = 4000 \times \cos 15^\circ \Rightarrow F_{1x} = 3863/70 \text{ N} \\ F_{1y} = F_1 \sin \theta_1 = 4000 \times \sin 15^\circ \Rightarrow F_{1y} = 1035/28 \text{ N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{2x} = F_2 \cos \theta_2 = 2500 \times \cos 45^\circ \Rightarrow F_{2x} = 1767/77 \text{ N} \\ F_{2y} = F_2 \sin \theta_2 = 2500 \times \sin 45^\circ \Rightarrow F_{2y} = 1767/77 \text{ N} \end{cases}$$

گام دوم:

- فرم برداری هر بردار با توجه به شکل مقابل و جهت هر یک از مؤلفه‌ها



$$\vec{F}_1 = 3863/70 \vec{i} - 1035/28 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = 1767/77 \vec{i} + 1767/77 \vec{j}$$

گام سوم:

- تعیین مجموع نیروهای هم‌راستا با محورهای x و y (ΣF_x و ΣF_y)

$$R_x = \Sigma F_x = 1767/77 + 3863/70 \Rightarrow R_x = 5631/47 \text{ N}$$

$$R_y = \Sigma F_y = 1767/77 - 1035/28 \Rightarrow R_y = 732/49 \text{ N}$$

گام چهارم:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

- نمایش برداری بردار برآیند

$$\boxed{\vec{R} = 5631/47 \vec{i} + 732/49 \vec{j}}$$

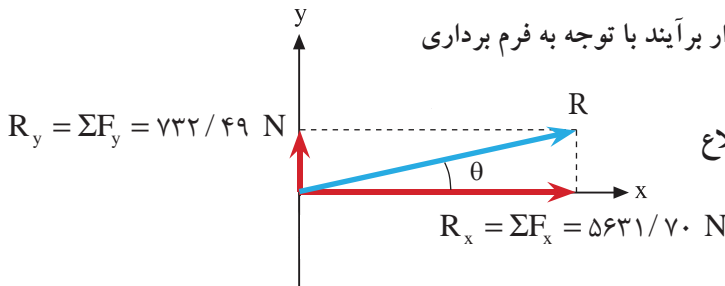
(ب)

گام پنجم:

- نمایش ترسیمی بردار برآیند با توجه به فرم برداری

بردار برآیند

و روش متوازی‌الاضلاع



(ج)

گام ششم:

- محاسبه اندازه بردار برآیند به کمک رابطه (۷-۳)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \Rightarrow R = \sqrt{5631/47^2 + 732/49^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 5678/91 \text{ N}}$$

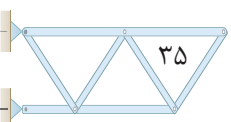
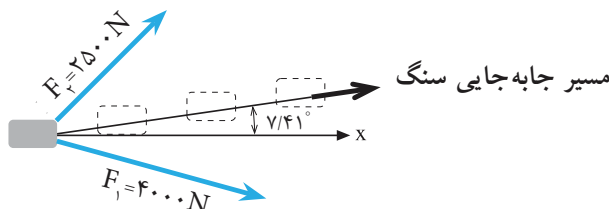
(د)

گام هفتم:

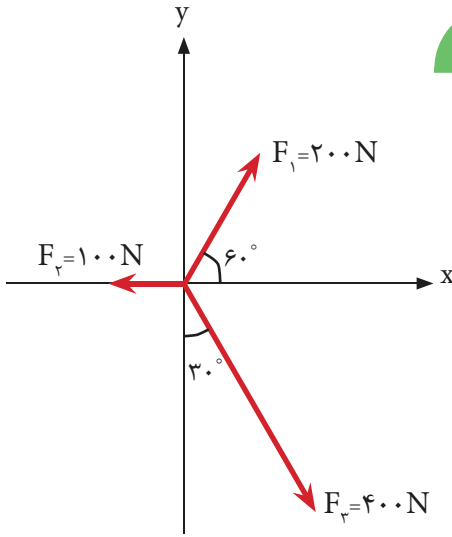
- محاسبه زاویه بردار برآیند با محور x ها به کمک رابطه (۸-۳)

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left| \frac{732/49}{5631/47} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 7/41^\circ}$$

(ه) مسیر جابه‌جایی سنگ در راستای بردار برآیند مطابق شکل زیر خواهد بود.



مثال ۴



در شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف - محاسبه مقدار برآیند نیروها

ب - محاسبه زاویه برآیند با افق

ج - ترسیم بردار برآیند

د - نمایش برداری بردار برآیند

حل:

الف) تجزیه هر یک از نیروها با توجه به روابط $F_x = F \cos \theta$ و $F_y = F \sin \theta$ و زاویه هر نیرو

با محور x ها:

$$\vec{F}_1 = 200 \cdot \cos 60^\circ \vec{i} + 200 \cdot \sin 60^\circ \vec{j} = 100 \vec{i} + 173/2 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = -100 \vec{i}$$

$$\vec{F}_3 = 400 \cdot \cos 60^\circ \vec{i} - 400 \cdot \sin 60^\circ \vec{j} = 200 \vec{i} - 346/4 \vec{j}$$

$$R_x = \sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$R_x = \sum F_x = 100 - 100 + 200 \Rightarrow R_x = 200 \text{ N}$$

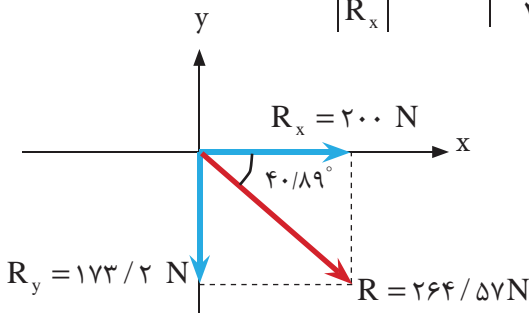
$$R_y = \sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$R_y = \sum F_y = 173/2 + 0 - 346/4 \Rightarrow R_y = -173/2 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{200^2 + (-173/2)^2} \Rightarrow \boxed{R = 264/57 \text{ N}}$$

(ب)

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{-173/2}{200} \right| \Rightarrow \boxed{\theta = 40/89^\circ}$$



(ج)

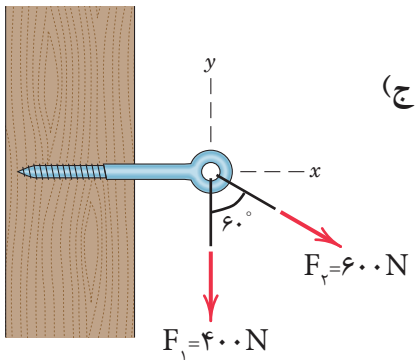
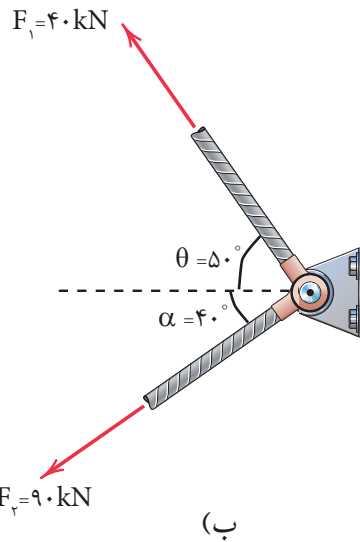
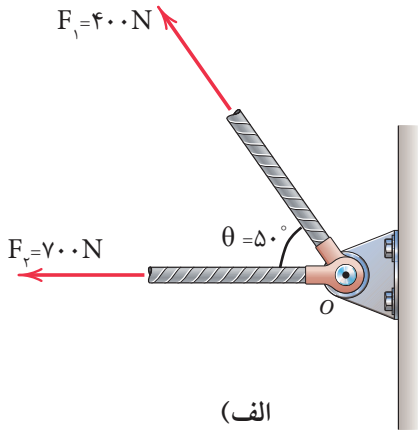
$$\vec{R} = 200 \vec{i} - 173/2 \vec{j} \quad (د)$$

۱- در شکل های زیر مطلوب است:

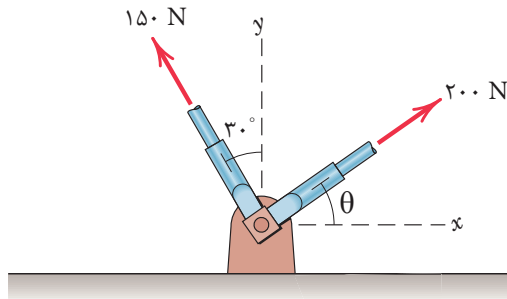
الف) محاسبه مقدار برآیند دو نیرو

ب) محاسبه زاویه برآیند با F_1

ج) محاسبه زاویه برآیند با امتداد افق



۲- در شکل زیر مقدار زاویه θ را چنان تعیین نمایید که برآیند دو نیرو بر محور y ها منطبق گردد. سپس در این حالت مقدار برآیند را محاسبه کنید.



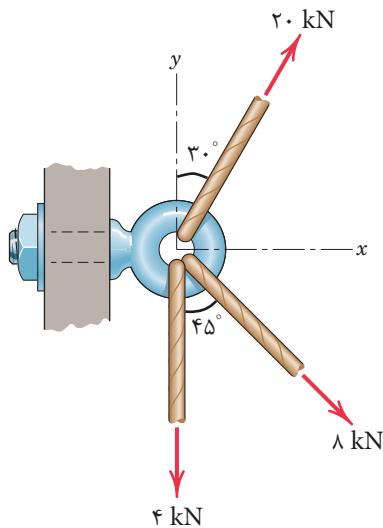
۳- در شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف) محاسبه مقدار برآیند نیروها

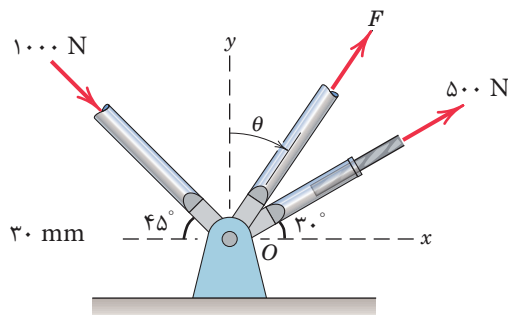
ب) محاسبه زاویه برآیند با افق

ج) ترسیم بردار برآیند

د) نمایش برداری بردار برآیند



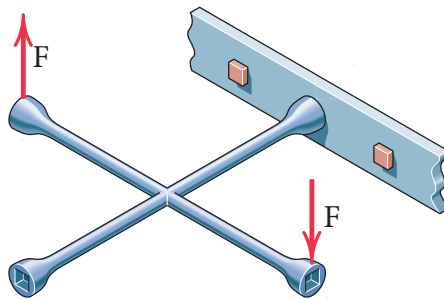
۴- در شکل زیر نیروی F و زاویه θ را طوری تعیین نمایید که برآیند نیروها روی محور افق و مقدار آن برابر 1500 N در جهت مثبت باشد.



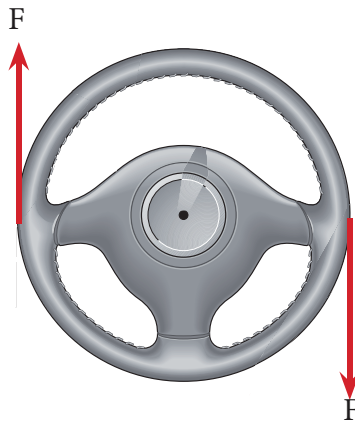
۳-۳ گشتاور، لنگر (مُمان)

یکی از اثرات نیرو بر اجسام تمایل به ایجاد چرخش در آن‌ها می‌باشد که به این پدیده گشتاور گفته می‌شود.

مطابق شکل‌های (۹-۳) و (۱۰-۳) نیرو باعث چرخش در اجسام می‌گردد.



شکل ۹-۳



شکل ۱۰-۳

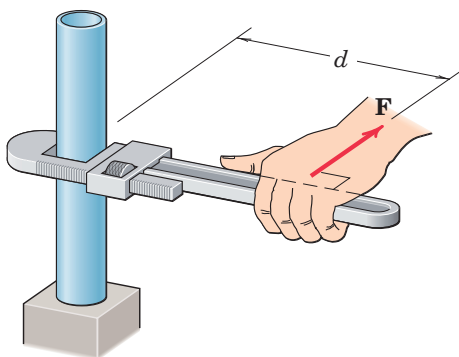
مقدار گشتاور حول یک محور عبارت است از حاصل ضرب نیرو (F) در کوتاه‌ترین فاصله نیرو یا امتداد آن تا محور مورد نظر (d). گشتاور را با M نمایش می‌دهند و رابطه آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M = F \cdot d \quad (۹-۳)$$

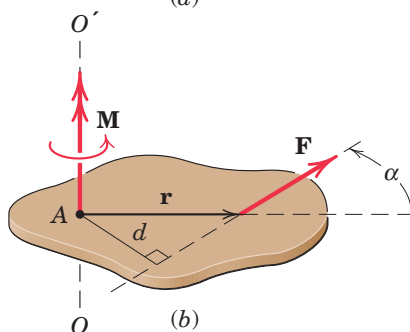
با توجه به شکل (۱۲-۳) نیروی F حول محور OO' ایجاد گشتاور می نماید. در این شکل d کوتاه ترین فاصله امتداد نیروی F تا محور OO' می باشد که بازوی لنگر نیز خوانده می شود بنابراین خواهیم داشت:

$$M_{OO'} = F \cdot d$$

(۱۰-۳)



(a)



(b)

شکل ۱۱-۳

گشتاور نیز کمیتی برداری است که آن را با نماد \uparrow نمایش می دهند و جهت آن مطابق ضرب بردارها خواهد بود که در مقاطع بالاتر با آن آشنا خواهید شد.

در این کتاب به دلیل بررسی نیروها در صفحه، گشتاور حول نقطه در نظر گرفته می شود لذا جهت چرخش آن در جهت عقربه ساعت \curvearrowright و یا خلاف عقربه ساعت \curvearrowleft خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل (۱۱-۳-b) گشتاور نیروی F حول نقطه A واقع بر محور OO' به صورت رابطه (۱۱-۳) خواهد بود.

$$M_A = F \cdot d$$

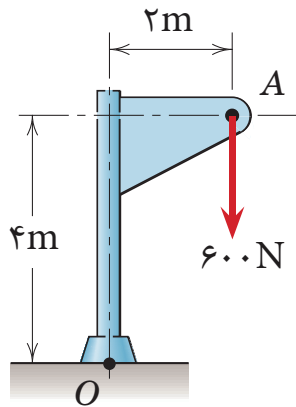
(۱۱-۳)

قرارداد:

در این کتاب جهت چرخش عقربه‌های ساعت مثبت فرض می‌شود.

مثال ۵

گشتاور نیروی F حول نقطه O را محاسبه و جهت چرخش آن را بنویسید.



حل:

$$F = 600 \text{ N}$$

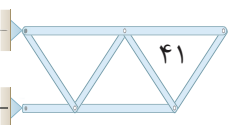
$$d = 2 \text{ m}$$

$$M_o = F \cdot d \Rightarrow M_o = 600 \times 2 \Rightarrow M_o = 1200 \text{ N.m} \quad \text{ساعت گرد}$$

گشتاور چند نیرو ۴-۳

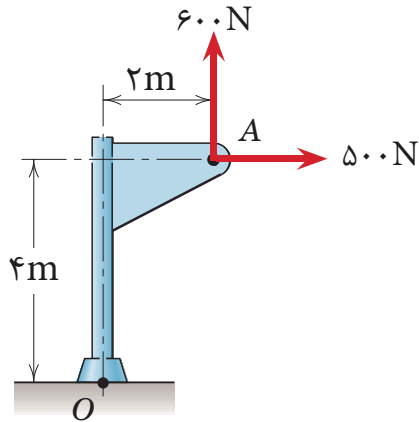
اگر به یک جسم چند نیرو اعمال شود گشتاور آن‌ها نسبت به یک نقطه برابر است با مجموع جبری گشتاور هر نیرو نسبت به آن نقطه یعنی:

$$M_o = \sum_{i=1}^n F_i d_i = F_1 d_1 + F_2 d_2 + \dots + F_n d_n \quad (۱۲-۳)$$



مثال ۶

در شکل زیر گشتاور نیروهای نشان داده شده را حول نقطه O محاسبه کنید و جهت آن را بنویسید.



حل:

$$F_1 = 500 \text{ N}$$

$$d_1 = 4 \text{ m}$$

$$F_2 = 600 \text{ N}$$

$$d_2 = 2 \text{ m}$$

$$M_o = F_1 d_1 + F_2 d_2$$

$$M_o = 500 \times 4 - 600 \times 2$$

$$M_o = +800 \text{ N.m} \quad \text{ساعت گرد}$$

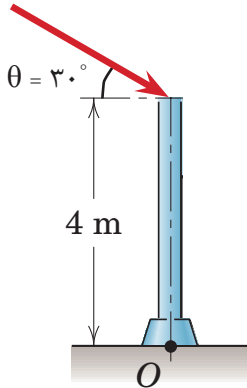
۵-۳ قضیه وارینون

گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطه معین برابر است با مجموع گشتاورهای آنها حول همان نقطه و یا گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر است با مجموع گشتاورهای مؤلفه‌های آن نیرو حول همان نقطه.

کاربرد این قضیه در مثال ۷ نشان داده شده است.

مثال ۷

$$F = 600 \text{ N}$$



گشتاور نیروی F را در شکل زیر به دو روش

حساب کنید:

الف) با استفاده از تعریف گشتاور

ب) به کمک قضیه وارینون

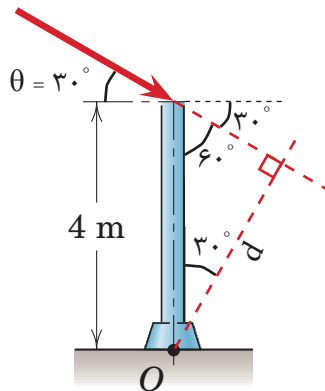
حل:

الف) با استفاده از تعریف:

ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه بازوی لنگر یعنی (d) را محاسبه

می‌نماییم؛ داریم:

$$F = 600 \text{ N}$$



$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{d}{4} \Rightarrow d = 4 \times \cos 30^\circ \Rightarrow d = 3.46 \text{ m}$$

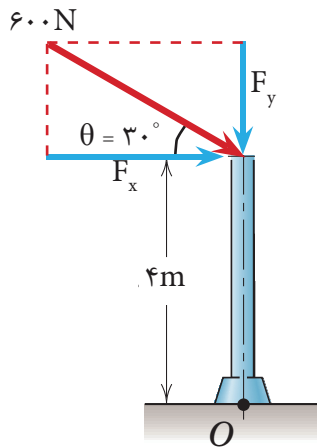
$$M_o = F \cdot d \Rightarrow M_o = 600 \times 3.46 \Rightarrow \boxed{M_o = 2078.4 \text{ N.m}}$$

ب) با استفاده از قضیه وارینون

در این روش ابتدا نیروی F را به دو مؤلفه متعامد تجزیه نموده و گشتاور آن‌ها را نسبت به نقطه O محاسبه و با یکدیگر جمع می‌نماییم.

$$F_x = F \cdot \cos \theta \Rightarrow F_x = 600 \times \cos 30^\circ \Rightarrow F_x = 519.61 \text{ N}$$

$$F_y = F \cdot \sin \theta \Rightarrow F_y = 600 \times \sin 30^\circ \Rightarrow F_y = 300 \text{ N}$$



با توجه به شکل بازوی لنگر F_x برابر ۴ متر و چون امتداد مؤلفه F_y از نقطه O می‌گذرد، بازوی لنگر آن صفر است.
خواهیم داشت:

$$M_o = \sum_{i=1}^n F_i d_i \Rightarrow M_o = F_x d_x + F_y d_y$$

$$M_o = F_x \times 4 + F_y \times 0 = 519.61 \times 4$$

$$\boxed{M_o = 2078.44 \text{ N.m}} \quad \curvearrowright$$

نکته:

هرگاه امتداد یک نیرو از نقطه‌ای عبور نماید گشتاور آن نیرو نسبت به همان نقطه برابر صفر است.

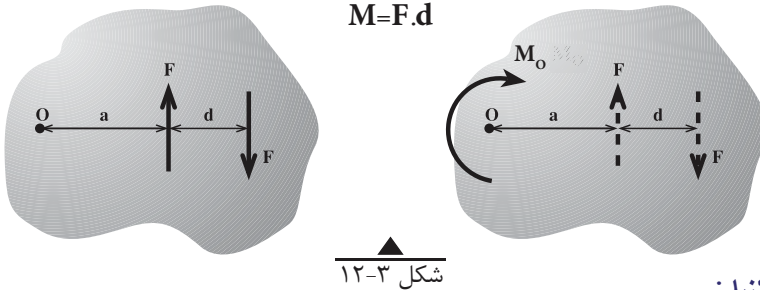
۶-۳ زوج نیرو:

به دو نیروی مساوی - موازی و مختلف‌الجهت زوج نیرو گفته می‌شود.

۳-۶-۱- خصوصیات زوج نیرو:

- ۱- برآیند زوج نیرو صفر است؛
- ۲- در اجسام ایجاد گشتاور (چرخش) می‌نماید؛
- ۳- گشتاور زوج نیرو نسبت به هر نقطه دلخواه مقداری ثابت و برابر است با حاصل ضرب اندازه یک نیرو در فاصله بین آن‌ها. شکل (۳-۱۲)

$$M = F \cdot d$$



تحقیق کنید:

چگونه می‌توان به کمک گشتاورگیری نسبت به یک نقطه دلخواه مانند O در شکل (۳-۱۲) خصوصیت سوم زوج نیرو را اثبات کرد.

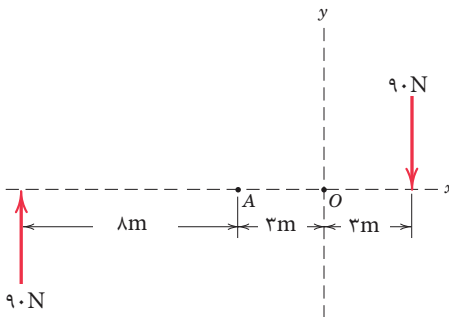
مثال ۸

در شکل روبه‌رو مطلوب است محاسبه گشتاور دو نیروی ۹۰ نیوتنی:

(الف) حول نقطه A

(ب) حول نقطه O

(ج) با استفاده از خاصیت زوج نیرو



حل:

(الف) $M_A = 90 \times 8 + 90 \times 6 = 1260 \text{ N.m}$

(ب) $M_O = 90 \times 11 + 90 \times 3 = 1260 \text{ N.m}$

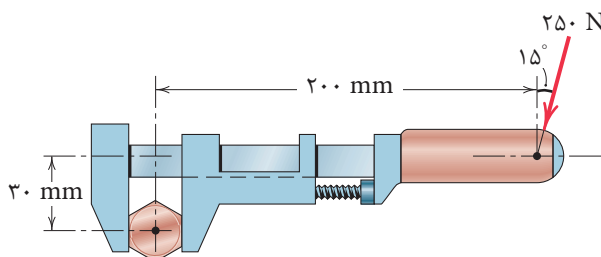
(ج) $M = F \cdot d = 90 \times 14 = 1260 \text{ N.m}$



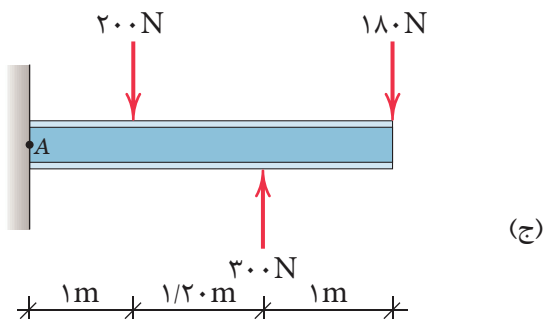
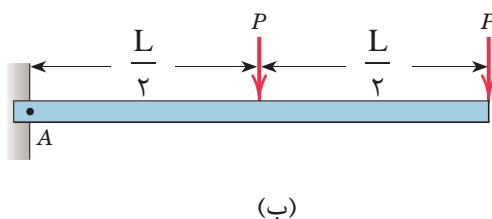
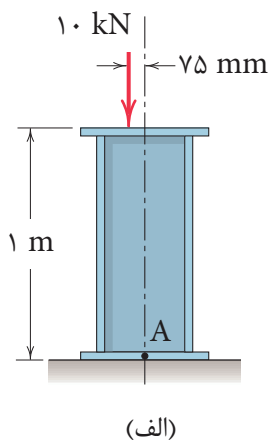
خلاصه فصل

- نیرو کمیتی است برداری که باعث حرکت، تغییر شکل و یا چرخش اجسام می‌گردد.
- انواع نیرو عبارتند از: نیروهای خارجی، نیروهای داخلی.
- منظور از برآیند دو یا چند نیرو عبارت است از نیرویی که به تنهایی اثر همه نیروها را در خود داشته باشد.
- برای تعیین برآیند چند نیرو از روش تجزیه به مؤلفه‌های متعامد استفاده می‌شود و مقدار برآیند از رابطه $R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$
- و زاویه برآیند با محور x ها از رابطه $\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right|$ به دست می‌آید.
- گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور عبارت است از حاصل ضرب نیرو (F) در کوتاه‌ترین فاصله نیرو تا آن محور (d). و از رابطه $M = F.d$ به دست می‌آید.
- قضیه وارینون: گشتاور برآیند چند نیرو حول یک نقطه معین برابر است با مجموع گشتاورهای آن‌ها حول همان نقطه.
- به دو نیروی مساوی، موازی و مختلف‌الجهت زوج نیرو گفته می‌شود.
- گشتاور زوج نیرو برابر است با حاصل ضرب یکی از نیروها در فاصله بین آن‌ها.

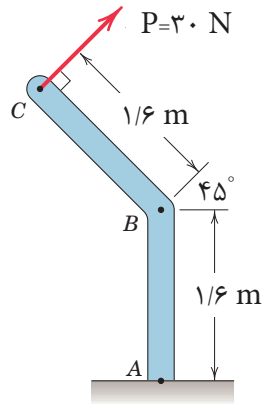
۱- در شکل زیر گشتاور نیروی ۲۵۰ نیوتنی را حول مرکز پیچ محاسبه نموده و جهت گشتاور را تعیین نمایید.



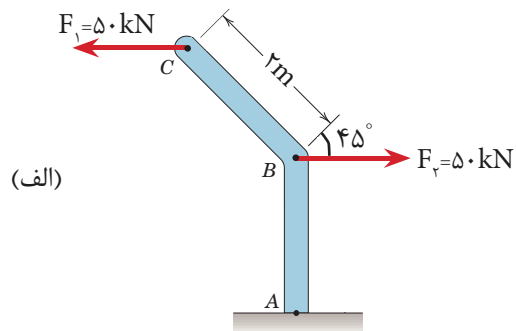
۲- در شکل‌های زیر گشتاور نیرو را حول نقطه A محاسبه نمایید.



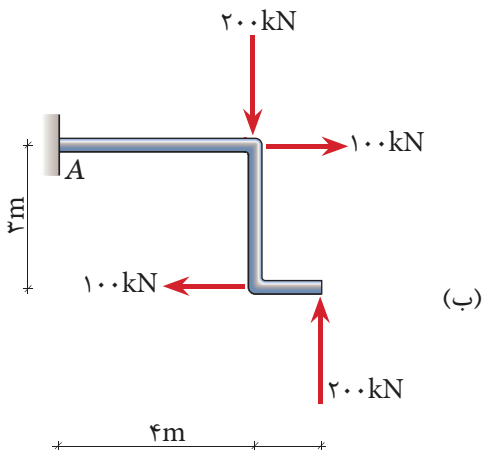
۳- گشتاور نیروی P حول نقطه A و B را به دست آورید.



۴- در شکل های زیر مطلوب است محاسبه M_A .



(الف)



(ب)

فصل چهارم

تعادل



پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- مفهوم تعادل را توضیح دهد.
- ۲- شرط تعادل نقطه‌ی مادی را بیان کند.
- ۳- پیکر آزاد ذره‌ی مادی را ترسیم کند.
- ۴- شرط تعادل نقطه‌ی مادی را در مسائل به کار گیرد.
- ۵- شروط لازم برای تعادل جسم صلب را توضیح دهد.
- ۶- انواع تکیه‌گاه‌ها را بشناسد.
- ۷- پیکر آزاد اجسام تحت تأثیر نیروهای مختلف را ترسیم کند.
- ۸- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در اجسام محاسبه کند.

۴-۱ تعادل

مفهوم تعادل آن‌است که ذره یا جسم مادی هیچ‌گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.

به منظور بررسی تعادل اجسام، آن‌ها را به دو حالت در نظر می‌گیریم.

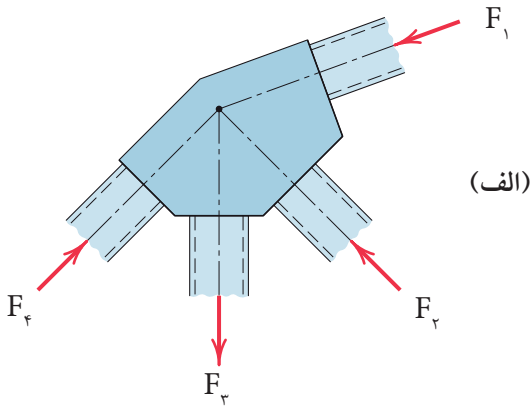
۱- نقطه‌ی مادی

۲- جسم صلب

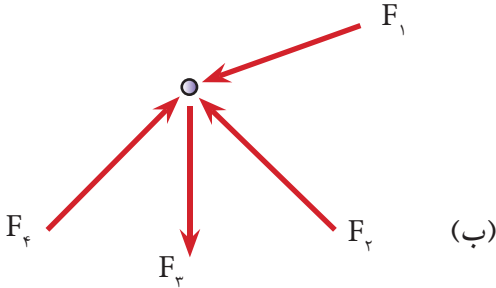
۱-۱-۴- تعادل نقطه مادی

با توجه به تعریف نقطه مادی در فصل اول، نیروهای وارد به جسم در یک نقطه متقارب خواهند بود و شرط تعادل در این حالت آن است که برآیند نیروهای وارده صفر باشد یعنی:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (۱-۴)$$



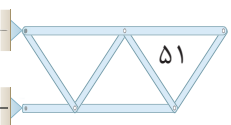
در شکل (۱-۴- الف) چنانچه از ابعاد قطعات اتصال صرف نظر شود، وضعیت نیروها به صورت شکل (۱-۴- ب) خواهند بود.



شکل ۱-۴

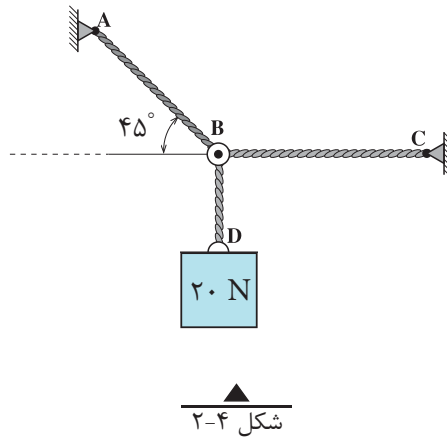
در صفحه مختصات دکارتی رابطه (۱-۴) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases} \quad (۲-۴)$$

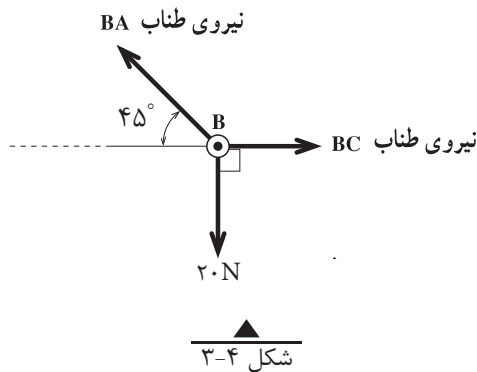


۴-۱-۱-۲- پیکر آزاد جسم

به منظور بررسی تعادل اجسام، لازم است ابتدا جسم را از محیط اطراف خود جدا نموده و نیروهای وارد بر آن را در راستاهای موجود نمایش دهیم که به این عمل، ترسیم پیکر آزاد جسم^۱ گفته می شود.



در شکل (۲-۴) وزنه 20 N توسط سه رشته کابل AB و BC و BD نگهداری شده است. چون کابل ها فقط نیروی کششی را تحمل می نمایند بنابراین نیروهای وارد به نقطه B به صورت کششی بوده و پیکر آزاد آن مطابق شکل (۳-۴) خواهد بود.



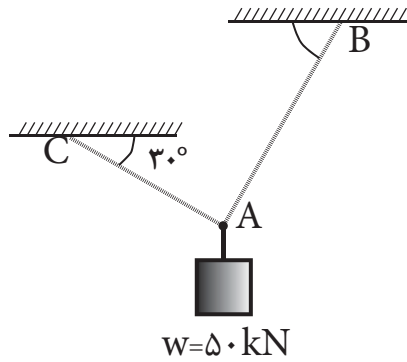
نکته:

در حل مسائل تعادل نقطه مادی، ابتدا پیکر آزاد آن را ترسیم نموده و سپس به کمک معادلات تعادل (۲-۴) مجهولات مسئله را محاسبه می نمائیم.

۱- FBD (Free Body Diagram)

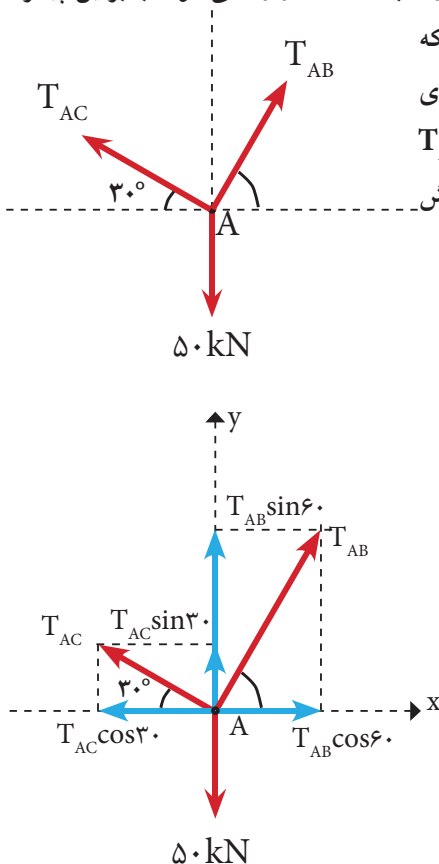
مثال ۱

کشش کابل‌های AB و AC را در سامانه در حال تعادل زیر به دست آورید.

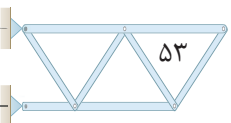


حل:

گام اول) با توجه به این موضوع که تمامی نیروها به نقطه A وارد می‌شوند بنابراین پیکر آزاد نقطه مادی A ترسیم می‌گردد. می‌دانیم که کابل‌ها همیشه رفتار کششی دارند بنابراین نیروی کابل‌های AB و AC را به ترتیب با T_{AB} و T_{AC} به صورت کششی و زوایای هر کدام را نمایش می‌دهیم.



گام دوم) تعیین محورهای مختصات x و y روی نقطه A و تجزیه نیروها در این دستگاه مختصات



گام سوم) تشکیل معادلات تعادل (۴-۲) و حل آنها تا رسیدن به خواسته‌های مسئله

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow T_{AB} \cos 60^\circ - T_{AC} \cos 30^\circ = 0 \quad \text{رابطه I}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow T_{AB} \sin 60^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ - 50 = 0 \quad \text{رابطه II}$$

چون حل هر یک از معادلات فوق با وجود دو مجهول امکان‌پذیر نیست بنابراین آنها را در یک دستگاه دو معادله دو مجهولی قرار داده که با استفاده از روش‌های مختلف قابل حل است.

در این جا از معادله اول یکی از مجهولات را بر حسب دیگری محاسبه و در معادله دوم قرار می‌دهیم تا یکی از مجهولات حذف شود:

$$\text{رابطه III} \quad T_{AB} = \frac{T_{AC} \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \Rightarrow T_{AB} = 1/\sqrt{3} T_{AC} \Rightarrow \text{از رابطه I نتیجه می‌شود}$$

مقدار T_{AB} را در رابطه II قرار داده خواهیم داشت:

$$1/\sqrt{3} T_{AC} \times \sin 60^\circ + T_{AC} \sin 30^\circ - 50 = 0 \Rightarrow 2 T_{AC} - 50 = 0$$

$$T_{AC} = \frac{50}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{AC} = 25 \text{ kN}}$$

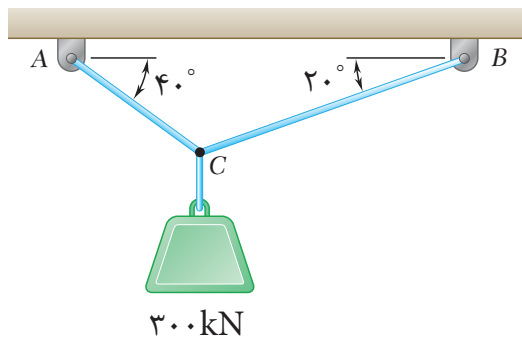
حال مقدار T_{AC} را در رابطه III قرار می‌دهیم:

$$\text{از رابطه III} \Rightarrow T_{AB} = 1/\sqrt{3} \times 25$$

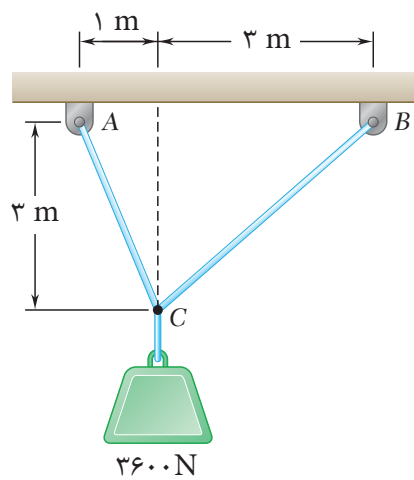
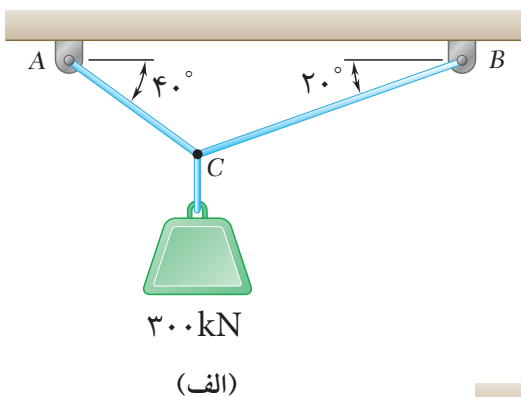
$$\Rightarrow \boxed{T_{AB} = 43/25 \text{ kN}}$$



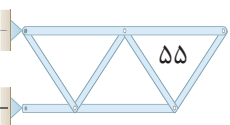
۱- پیکر آزاد شکل زیر را رسم نمائید.



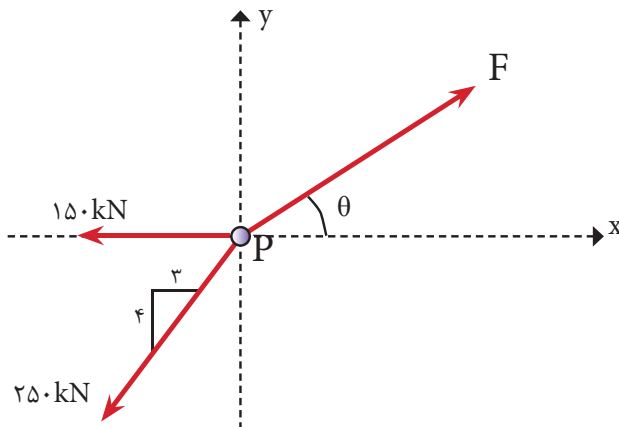
۲- کشش کابل‌ها را در شکل‌های زیر به دست آورید.



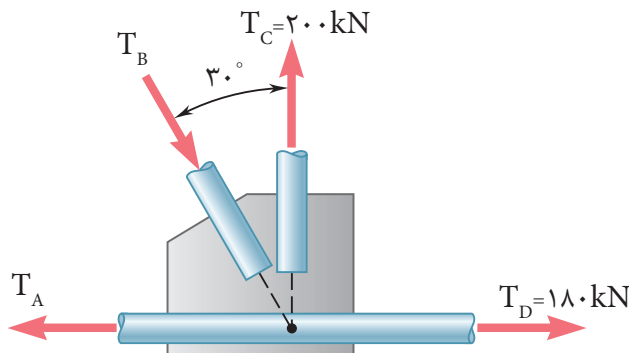
(ب)



۳- مقدار نیروی F و زاویه θ را طوری تعیین کنید که ذره مادی P در حال تعادل باشد.



۴- مقدار T_A و T_B را طوری تعیین کنید که تعادل در اتصال شکل زیر برقرار باشد.



۴-۱-۲- تعادل جسم صلب

در قسمت قبل بنا به فرض، اجسام را به عنوان یک نقطه مادی در نظر گرفتیم. در حالی که چنین فرضی همیشه امکان پذیر نخواهد بود و نمی توان از ابعاد جسم صرف نظر نمود بنابراین در این حالت نیروها در یک نقطه متقارب نخواهند بود و علاوه بر حرکت، امکان دَوَران (گشتاور) جسم تحت تأثیر نیروهای وارده نیز وجود دارد. لذا شرط تعادل در مورد اجسام صلب به صورت زیر خواهد بود:

- ۱- برای این که جسم در راستای محور x جابه جایی نداشته باشد باید: $\sum F_x = 0$
- ۲- برای این که جسم در راستای محور y جابه جایی نداشته باشد باید: $\sum F_y = 0$
- ۳- برای این که جسم چرخش نداشته باشد باید: $\sum M = 0$

(۴-۳)

۲-۴ انواع تکیه گاه ها و عکس العمل های آن ها

برای بررسی تعادل اجسام صلب، همانند نقاط مادی باید ابتدا پیکر آزاد آن ها را ترسیم نمود. برای این منظور، باید جسم را از محیط اطراف آن جدا نمائیم و چون اجسام بر روی تکیه گاه هایی قرار دارند که با توجه به نوع آن ها مانع از حرکت (جابه جایی) و یا چرخش جسم می گردند، لازم است ابتدا تکیه گاه ها و عکس العمل های آن ها را معرفی نمائیم.

تعریف عکس العمل تکیه گاهی

منظور از عکس العمل تکیه گاهی اجسام، واکنشی است که تکیه گاه در جهت حفظ تعادل آن ها از خود نشان می دهد و مانع از حرکت و یا دوران جسم مورد نظر می شود.

۴-۲-۱ انواع تکیه گاه ها

الف) تکیه گاه غلطکی (یک مجهولی)

عبارت است از تکیه گاهی که تنها یک عکس العمل آن هم عمود بر سطح اتکای خود دارد؛ همانند چرخ اتومبیل روی سطح بدون اصطکاک. (ردیف ۱ جدول ۴-۱)

ب) تکیه گاه مفصلی (دومجهولی)

به تکیه گاهی گفته می شود که دارای دو عکس العمل می باشد؛ یکی مماس بر سطح اتکا و دیگری عمود بر آن خواهد بود. (ردیف ۲ جدول ۴-۱)

ج) تکیه گاه گیردار (سه مجهولی)

تکیه گاهی است که دارای سه عکس العمل به شرح زیر

می باشد: (ردیف ۳ جدول ۴-۱)

۱- مماس بر سطح تکیه گاه

۲- عمود بر سطح تکیه گاه

۳- عکس العمل دورانی

د) تکیه گاه میله ای

منظور از میله عضوی کوتاه است که در دو انتهای خود به صورت لولا یا مفصل متصل شده باشد. عکس العمل تکیه گاه میله ای در راستای میله و به صورت کششی یا فشاری خواهد بود.

(ردیف ۴ جدول ۴-۱)

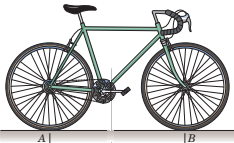
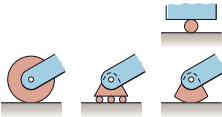
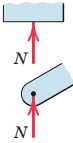
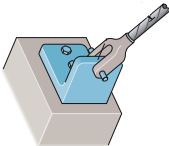
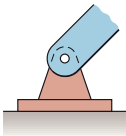
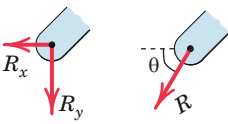
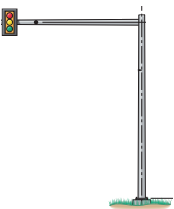
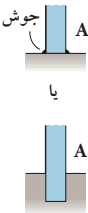
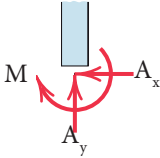
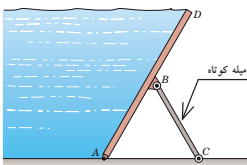
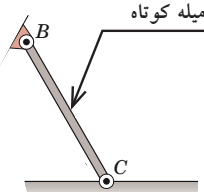
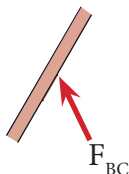
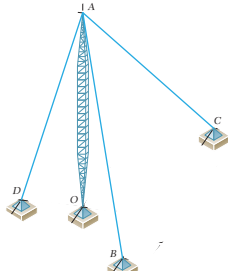

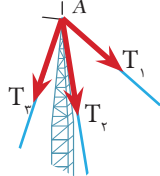
ه) تکیه گاه کابلی:

هر گاه جسم توسط کابل به تکیه گاه متصل شود، عکس العمل کابل به صورت کششی

و در راستای آن خواهد بود. (ردیف ۵ جدول ۴-۱)



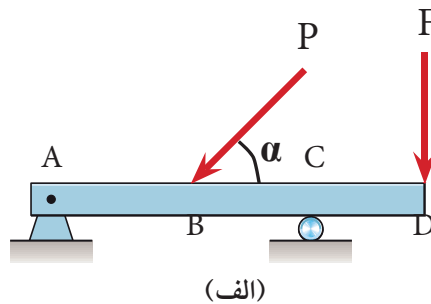
جدول (۱-۴) انواع تکیه گاه

ردیف	نوع تکیه گاه	شکل واقعی	شکل شماتیک	عکس العمل های تکیه گاهی
۱	غاطشی			
۲	مفصلی			
۳	گیردار			
۴	میله ای			
۵	کابلی			

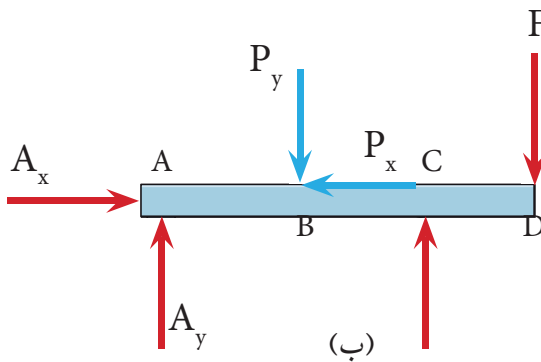
همان طور که گفته شد شرط تعادل اجسام صلب بر آورده شدن معادلات (۳-۴) می باشد و برای نیل به این هدف به صورت زیر عمل می نمایم.

گام اول - ترسیم پیکر آزاد جسم

ابتدا جسم را از تکیه گاه ها جدا نموده و با توجه به نوع تکیه گاه، عکس العمل های مربوطه را در محل تکیه گاه و در جهت دلخواه قرار می دهیم. به عنوان مثال پیکر آزاد تیر شکل (۴-۴-الف) به صورت شکل (۴-۴-ب) خواهد بود.



شکل ۴-۴



گام دوم - تجزیه نیروها

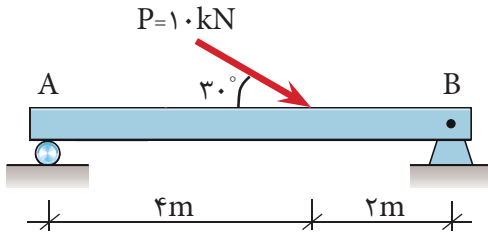
همه نیروهای مورب را روی پیکر آزاد در صورت وجود به مؤلفه های آن تجزیه می نمایم. به عنوان مثال در شکل (۴-۴-ب) نیروی P به دو مؤلفه متعامد تجزیه شده است.

گام سوم - تشکیل معادلات و حل آنها

با تشکیل معادلات تعادل و حل آنها مجهولات مسئله (عکس العمل ها) تعیین می شوند.

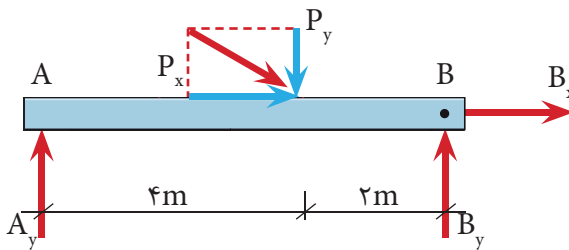
مثال ۲

عکس العمل‌های تکیه‌گاهی تیر زیر را به دست آورید



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد جسم



گام دوم:

تجزیه نیروی P

$$P_x = P \cos \theta = 10 \times \cos 30^\circ = 8.66 \text{ kN}$$

$$P_y = P \sin \theta = 10 \times \sin 30^\circ = 5 \text{ kN}$$

گام سوم: تشکیل معادلات تعادل و حل آنها

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow B_x + P_x = 0 \Rightarrow B_x + 8.66 = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = -8.66 \text{ kN}}$$

لازم به توضیح است که علامت منفی در جواب فوق به این معنی است که جهت صحیح

عکس العمل B_x در پیکر آزاد تیر به سمت چپ می‌باشد

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = P_y \Rightarrow A_y + B_y = 5 \text{ kN} \quad \text{رابطه I}$$

معادله فوق دارای دو مجهول بوده و قابل حل نمی‌باشد لذا از شرط سوم یعنی $\sum M = 0$

استفاده می‌کنیم و در این معادله بهتر است گشتاور نسبت به نقطه‌ای محاسبه شود که

بیشترین مجهولات تکیه‌گاهی در آن نقطه متمرکز است (یعنی نقطه B)

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \Rightarrow A_y \times 6 - P_y \times 2 = 0 \Rightarrow A_y \times 6 - 5 \times 2 = 0 \Rightarrow 6A_y = 10$$

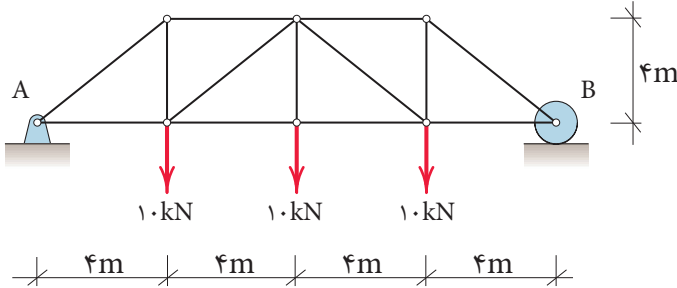
$$A_y = \frac{10}{6} \Rightarrow \boxed{A_y = 1.67 \text{ kN}}$$

حال با قرار دادن مقدار A_y در رابطه I خواهیم داشت:

$$A_y + B_y = 5 \Rightarrow 1.67 + B_y = 5 \Rightarrow B_y = 5 - 1.67 \Rightarrow \boxed{B_y = 3.33 \text{ kN}}$$

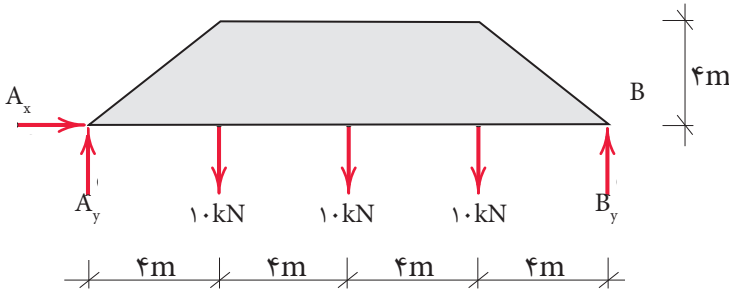
مثال ۳

عکس العمل های تکیه گاهی را در خرابای شکل زیر به دست آورید.



گام (۱)

ترسیم پیکر آزاد



گام (۲)

تشکیل معادلات تعادل:

با توجه به اینکه نیروی افقی به سیستم وارد نمی شود لذا عکس العمل افقی تکیه گاه A یعنی (A_x) برابر صفر است.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 - 10 - 10 = 0$$

$$A_y + B_y = 30 \text{ kN} \quad \text{رابطه I}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 10 \times 4 + 10 \times 8 + 10 \times 12 - B_y \times 16 = 0$$

$$16B_y = 240 \Rightarrow B_y = \frac{240}{16} \Rightarrow \boxed{B_y = 15 \text{ kN} \uparrow}$$

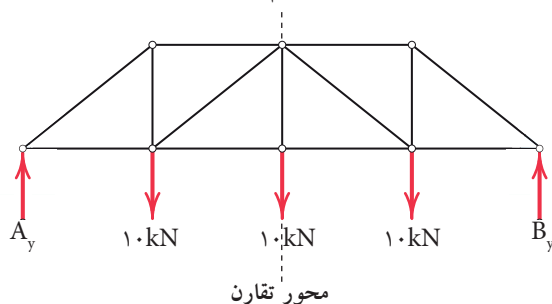
مقدار B_y را در رابطه I قرار می دهیم داریم:

$$A_y + 15 = 30 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{A_y = 15 \text{ kN} \uparrow}$$

نکته:

هرگاه بارگذاری و هندسه سازه ای متقارن باشند کل بارهای وارده به صورت مساوی بین دو تکیه گاه تقسیم می شود.

بنابراین با توجه به تقارن در سازه فوق داریم:

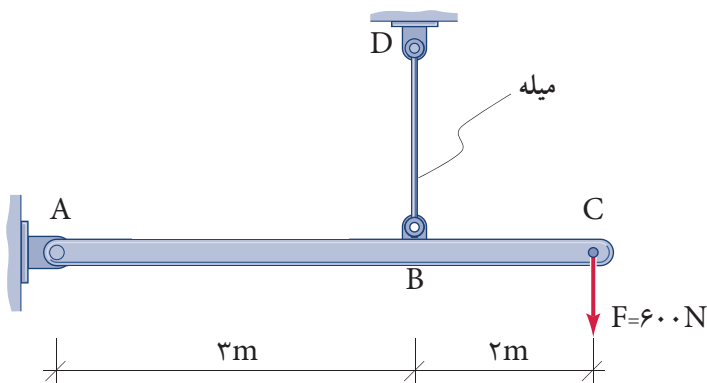


$$\text{کل بار} = 10 + 10 + 10 = 30 \text{ kN}$$

$$\boxed{A_y = B_y = \frac{30}{2} = 15 \text{ kN}}$$

مثال ۴

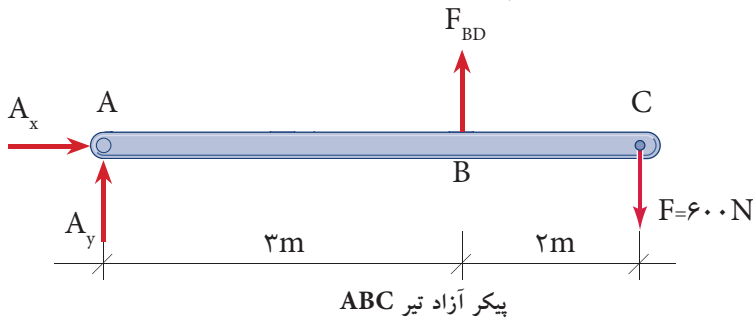
عکس العمل های تکیه گاهی تیر ABC را به دست آورید.



گام اول:

ترسیم پیکر آزاد تیر ABC

چون عضو BD میله است و با توجه به این که در تکیه گاه میله ای عکس العمل تکیه گاهی، در راستای میله می باشد، خواهیم داشت:



گام دوم:

تشکیل معادلات تعادل

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} - 600 = 0 \Rightarrow A_y + F_{BD} = 600 \text{ N} \quad \text{رابطه I}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 600 \times 5 - F_{BD} \times 3 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{BD} = 1000 \text{ N}}$$

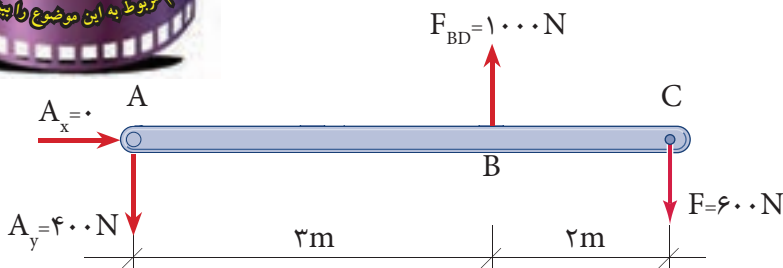
از رابطه I داریم:

$$A_y + F_{BD} = 600 \Rightarrow A_y + 1000 = 600 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -400 \text{ N} \downarrow}$$



با توجه به علامت منفی در مقدار A_y ، جهت عکس العمل

تکیه گاهی A_y به طرف پایین (↓) خواهد بود؛ یعنی:



خلاصه فصل

- مفهوم تعادل آن است که ذره یا جسم مادی هیچ گونه حرکت و یا چرخشی نداشته باشد.
- شرط تعادل نقطه مادی آن است که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد یعنی:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = 0 \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 \end{cases}$$

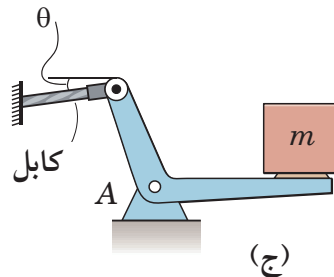
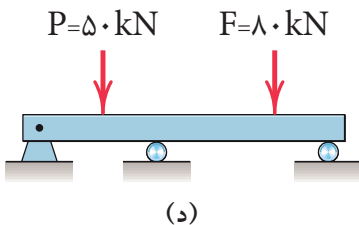
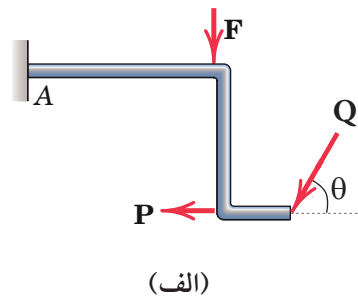
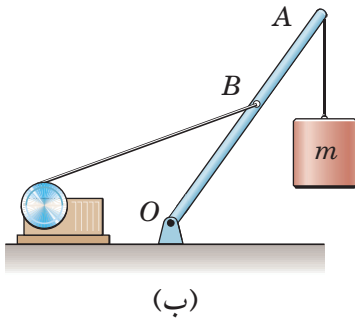
- هرگاه جسم یا نقطه مادی را از محیط اطراف خود جدا و نیروهای وارد بر آن‌ها را در راستاهای موجود نمایش دهیم، پیکر آزاد جسم و یا نقطه مادی را ترسیم نموده ایم.
- شرایط تعادل جسم صلب عبارت است از:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$

- برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی از معادلات تعادل جسم صلب و یا نقطه مادی استفاده می‌شود.

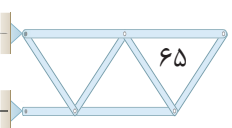
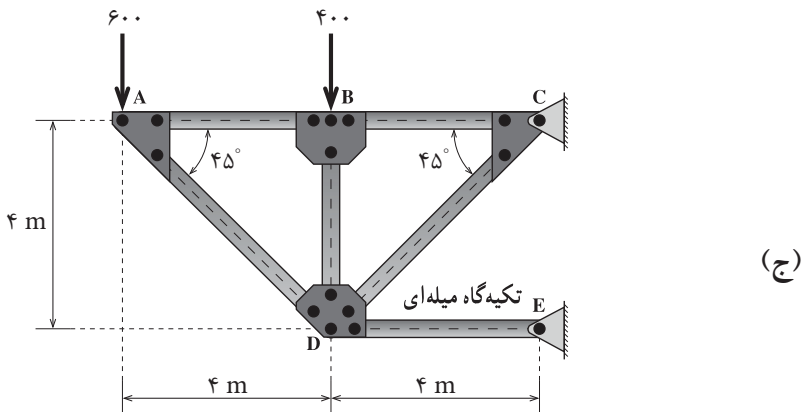
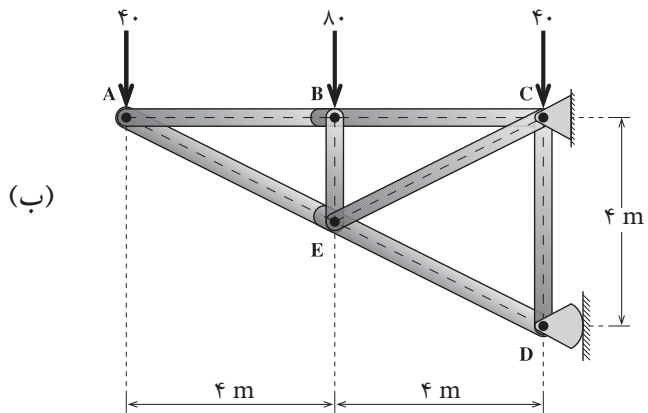
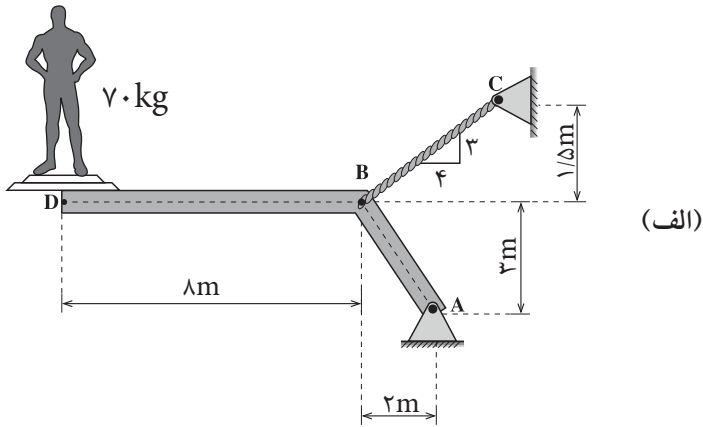
خودآزمایی

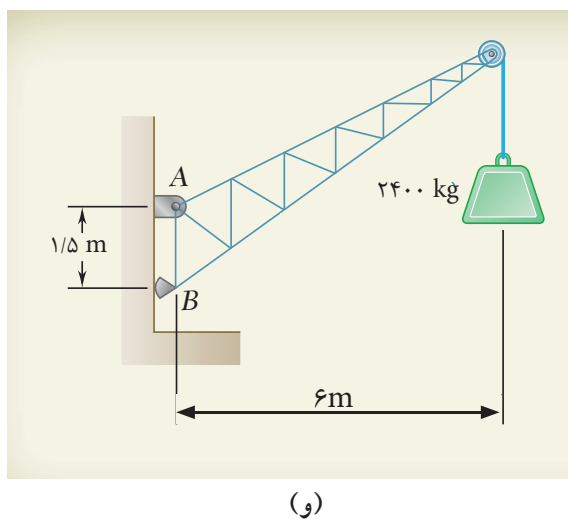
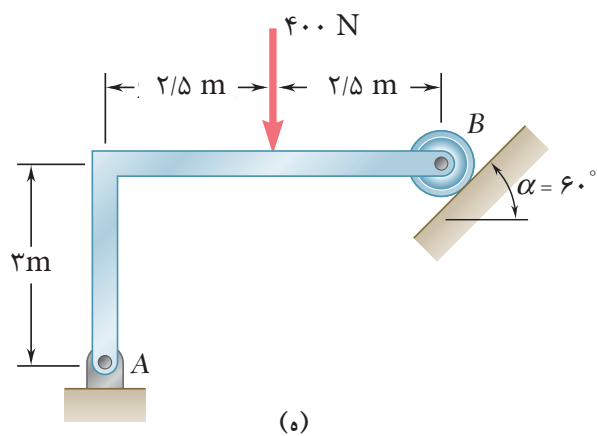
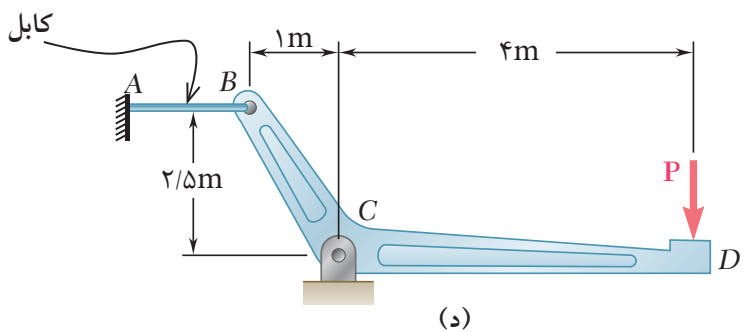
۱- پیکر آزاد هر کدام از شکل‌های زیر را رسم نمائید.



۲- عکس العمل‌های تکیه‌گاهی را در شکل‌های زیر به دست آورید.

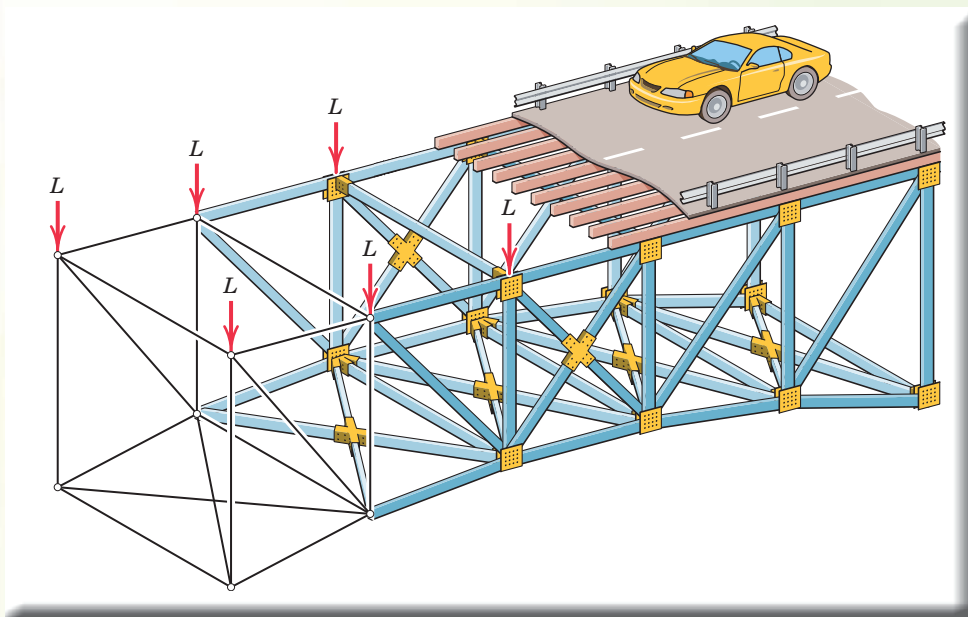
$$(g = 10 \frac{m}{s^2})$$





فصل پنجم

تحلیل سازه‌های ساختمانی



پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- تحلیل سازه را تعریف نماید.
- ۲- خرپا را بشناسد و انواع آن را نام ببرد.
- ۳- فرضیات تحلیل خرپا را بداند.
- ۴- روش مفاصل (گره‌ها) را در تحلیل خرپا به کار گیرد.
- ۵- اعضای صفر نیرویی را در خرپاها تعیین نماید.
- ۶- تیر را تعریف کرده و بارهای وارد بر آن را بشناسد.
- ۷- رفتار تیر تحت تأثیر بارهای خارجی را بشناسد.
- ۸- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرها با بار گسترده یکنواخت را به دست آورد.
- ۹- نیروهای داخلی تیرها با بار متمرکز را محاسبه نماید.
- ۱۰- نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در تیرهای با بار متمرکز را ترسیم نماید.
- ۱۱- مقادیر حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی تیرها با بار متمرکز را به دست آورد.

مقدمه:

سازه‌های ساختمانی شامل انواع سازه‌های قابی، سازه‌های پوسته‌ای، سازه‌های کابلی و سازه‌های خرپایی می‌باشد.

به هر عضو یا مجموعه‌ای از اعضا که نیروی وارد شده را تحمل نموده و منتقل نماید، سازه گفته می‌شود.

بنابراین تیرها، ستون‌ها، بادبندها و ... نیز نوعی سازه می‌باشند.

منظور از تحلیل سازه، بررسی پایداری سازه، تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، نیروهای داخلی و تغییر شکل سازه تحت تأثیر نیروهای خارجی وارد به آن می‌باشد که در فصل چهارم راجع به تعیین عکس‌العمل‌ها بحث شد و در این فصل تنها به تعیین نیروهای داخلی در اجزای خرپاهای صفحه‌ای و تیرها بسنده می‌شود.

۵-۱ خرپا (Truss)

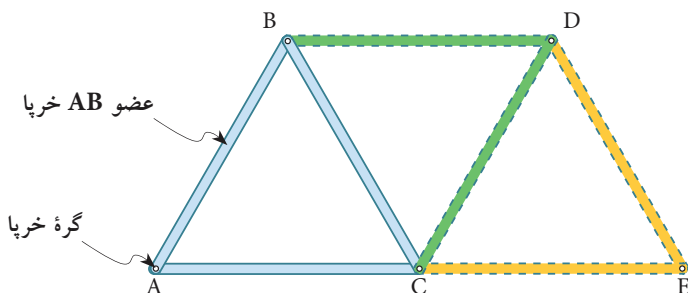
خرپاها سازه‌هایی هستند متشکل از اعضا (میله‌هایی) که در دو انتهای خود به صورت مفصل (پین) به یکدیگر متصل شده و عموماً تشکیل شبکه‌های مثلثی می‌دهند.

۵-۱-۱ انواع خرپا

خرپاها به طور کلی به دو گروه تقسیم می‌شوند.

۱- خرپاهای صفحه‌ای: خرپاهایی هستند که فرم پایه آن‌ها تشکیل شده از سه عضو

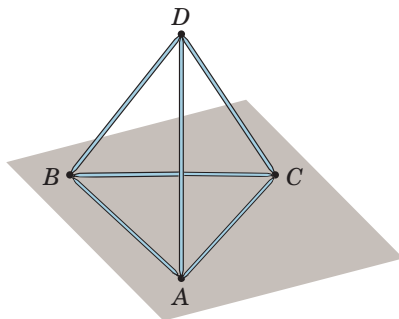
(میله) و سه گره (پین یا مفصل) که در یک صفحه واقع شده و با افزودن دو عضو و یک گره جدید گسترش می‌یابد.



شکل ۵-۱

۲- خرپاهای فضایی: به خرپاهایی گفته می‌شود که فرم پایه آن‌ها تشکیل شده از

شش عضو و چهار گره که یک شبکه فضایی ساخته و با افزودن سه عضو و یک گره جدید گسترش می‌یابد.

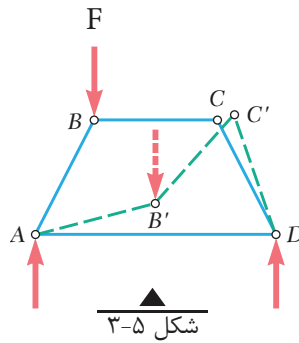


شکل ۵-۲

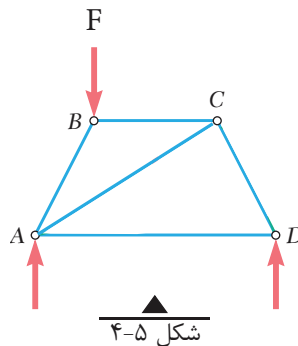
۵-۱-۲- شکل خرپاها

همان‌طور که گفته شد خرپاهای ساده از تعدادی شبکه مثلثی تشکیل می‌یابند و دلیل استفاده از هندسه مثلثی در خرپاها، پایداری هندسی مثلث نسبت به سایر اشکال هندسی می‌باشد. چرا که در مثلث تغییر زاویه مشروط به تغییر طول اضلاع آن می‌باشد و این تغییر در هندسه مثلثی خرپاها به سادگی اتفاق نمی‌افتد درحالی‌که در یک هندسه چهارضلعی بدون تغییر طول اضلاع آن‌ها تغییر شکل به راحتی صورت می‌پذیرد.

با توجه به شکل (۳-۵) دیده می‌شود که در چهارضلعی ABCD که اضلاع آن به صورت مفصل یا پین به هم متصل شده‌اند با وارد آوردن نیروی نه‌چندان بزرگ F به راحتی دچار تغییرشکل شده و نقطه B به B' و C به C' منتقل می‌شود بنابراین سازه ناپایدار بوده و این مسئله نامطلوب است.



برای تأمین پایداری سازه فوق کافی است عضو قطری BC را به آن بیافزاییم و چهار ضلعی را به دو مثلث تبدیل نماییم. (شکل ۴-۵)

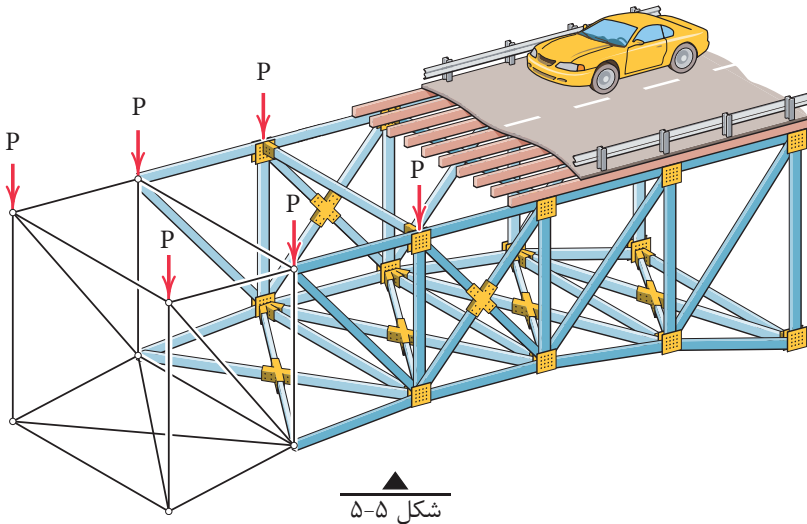


کار عملی: شکل‌های (۳-۵) و (۴-۵) را با قطعات چوبی و اتصال مفصلی بسازید و با اعمال نیروی متناسب، عملکرد آن‌ها را با یکدیگر مقایسه نمایید.

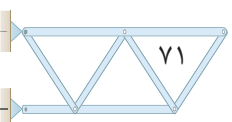
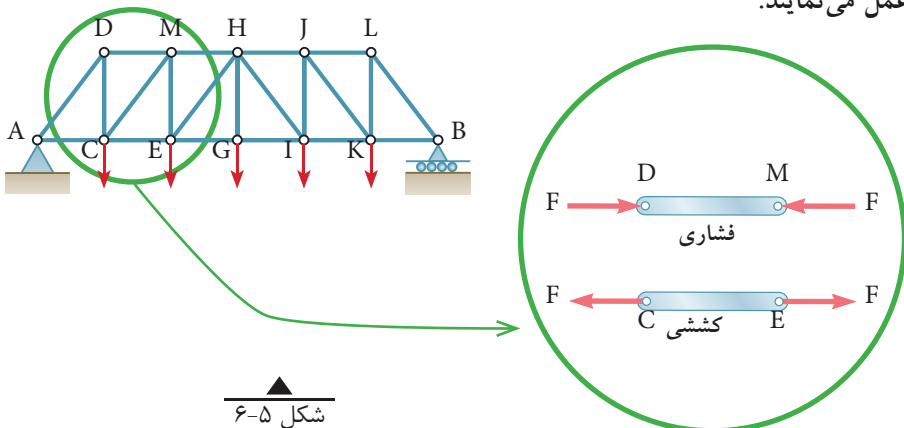
۵-۱-۳- فرضیات تحلیل خرپاها:

منظور از تحلیل خرپا، تعیین نیروی داخلی هر عضو خرپا و محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن می‌باشد و مبتنی بر فرضیاتی به شرح ذیل است:

۱- نیروهای خارجی وارد بر خرپا در صفحه خرپا و در محل گره‌ها به آن اعمال می‌شود. شکل (۵-۵)



۲- اعضای خرپا (میل‌ها) به صورت مفصلی به یکدیگر متصل می‌شوند. با توجه به فرضیات فوق، نیروهای داخلی و خارجی در محل گره به صورت متقارب خواهند بود. بنابراین نیروهای داخلی اعضا در راستای آن‌ها و به صورت کششی یا فشاری عمل می‌نمایند.



۵-۱-۴- روش تحلیل خرپا

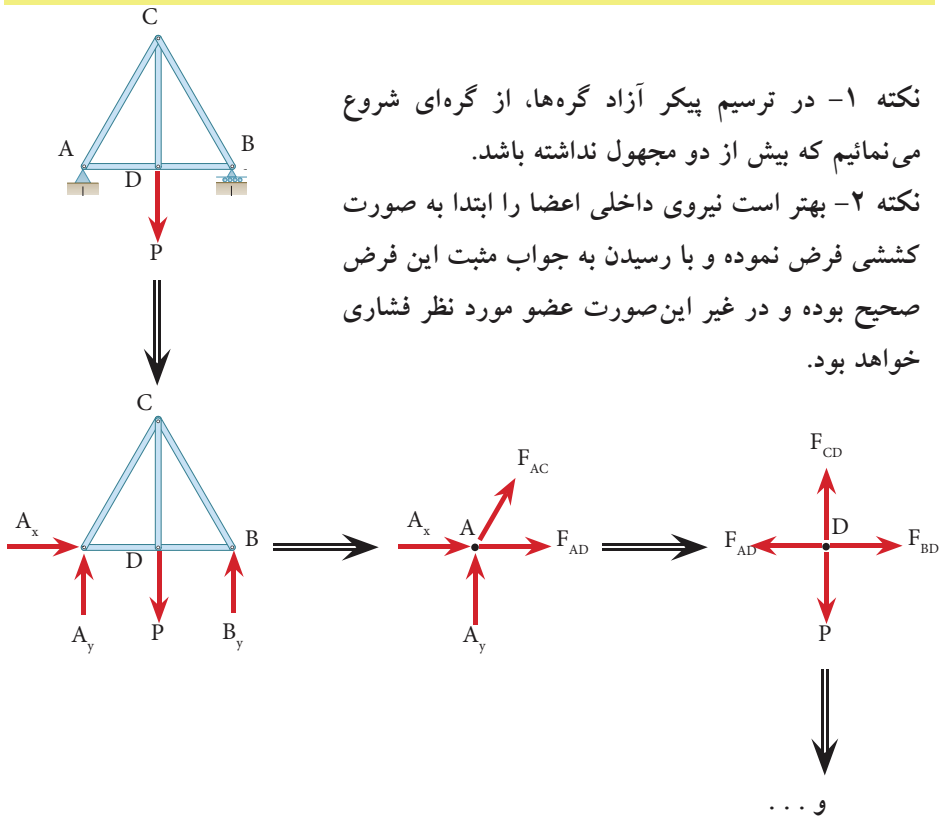
برای تحلیل خرپاها روش‌های مختلفی وجود دارد که در این قسمت به روش تحلیل مفاصل (گره‌ها) اشاره می‌شود و در مقاطع بالاتر با سایر روش‌های تحلیل خرپا آشنا خواهید شد.

۵-۱-۵- روش مفاصل (گره‌ها) در تحلیل خرپاها:

فلسفه این روش بر این اصل استوار است که چون کل خرپا در حال تعادل است پس هر گره آن نیز باید در حال تعادل باشد، بنابراین عموماً مراحل تحلیل خرپا در این روش عبارت است از:

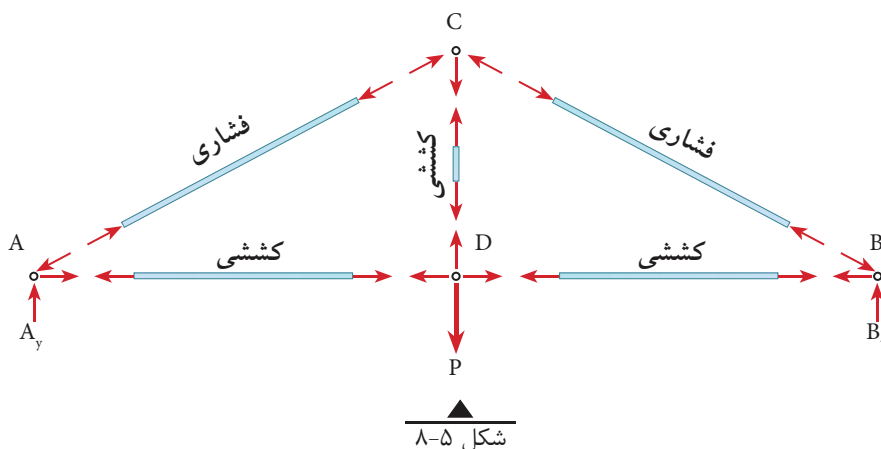
(۱) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی ← (۲) ترسیم پیکر آزاد هر گره ←

(۳) اعمال شرایط تعادل هر گره (نقطه مادی) یعنی: $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$ ← (۴) حل معادلات تشکیل شده و محاسبه مجهولات مورد نظر



شکل ۵-۷

نکته ۳- در ترسیم پیکر آزاد هرگره جهت نیروهای کششی از گره دور شده و جهت نیروهای فشاری به گره نزدیک می‌شود.
نتیجه نهایی تحلیل خرابای شکل (۷-۵) در شکل (۸-۵) نشان داده شده است.

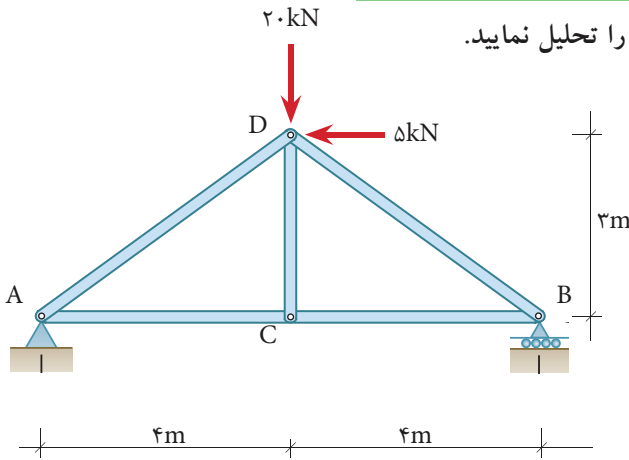


تاریخ مهندسی (مطالعه آزاد)

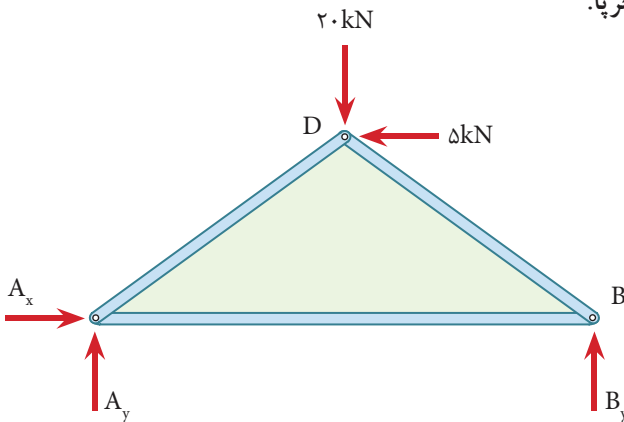
در کتاب‌های تاریخ فنی غرب، چنین آمده است که اولین نوع ساختمان‌های خرابایی، در قرون شانزدهم میلادی ساخته شده است. همچنین گفته شده که اولین نوع خرابای واقعی ثبت شده در تاریخ در قرن شانزدهم میلادی توسط یک مهندس رومی به نام پالادیو (Paladio) (۱۵۸۰ - ۱۵۱۸ م) ابداع و ساخته شده است. اما سندهای تاریخی نشان‌دهنده آن است که ساختمان خرابایی در ایران باستان از هزاره سوم قبل از میلاد ساخته می‌شده است. مورد استناد در این بررسی لوحه‌ای است که در حفاری‌های باستان‌شناسی شوش به دست آمده و تاریخ آن به هزاره سوم قبل از میلاد (پنج هزار سال پیش) می‌رسد.

مثال ۱

خرپای شکل روبه‌رو را تحلیل نمایید.



۱ - ترسیم پیکر آزاد کل خرپا.



۲ - محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی.

$$\overset{+}{\sum} F_x = 0 \Rightarrow A_x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 5 \text{ kN} \rightarrow}$$

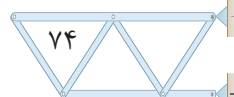
$$\overset{+}{\uparrow} \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 20 = 0$$

$$A_y + B_y = 20 \text{ kN} \quad \text{معادله I}$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_A = 0 \Rightarrow 20 \times 4 - 5 \times 3 - B_y \times 8 = 0$$

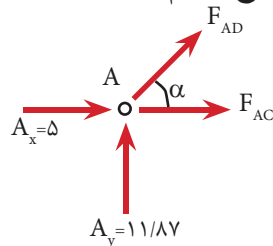
$$B_y = \frac{65}{8} \Rightarrow \boxed{B_y = 8.13 \text{ kN}}$$

$$\text{در معادله I} \quad A_y + 8.13 = 20 \Rightarrow \boxed{A_y = 11.87 \text{ kN}}$$



۳ - تحلیل گره‌ها:

برای تحلیل گره‌ها با توجه وجود دو عضو (دو مجهول) در هر یک از گره‌های A و B می‌توانیم از هریک از آن‌ها شروع نماییم که در این مثال گره A انتخاب می‌گردد.



پیکر آزاد گره A:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36.87^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0.6 \\ \cos \alpha = 0.8 \end{cases}$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow 5 + F_{AD} \cos \alpha + F_{AC} = 0 \Rightarrow 5 + 0.8 F_{AD} + F_{AC} = 0 \quad \text{معادله II}$$

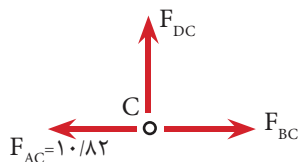
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 11/17 + F_{AD} \sin \alpha = 0 \Rightarrow 0.6 F_{AD} = -11/17$$

$$\Rightarrow F_{AD} = -19/17 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$

$$\text{II معادله از} \Rightarrow 5 + 0.8(-19/17) + F_{AC} = 0$$

$$\Rightarrow F_{AC} = 10/17 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

باتوجه به مشخص شدن نیروی داخلی عضو AC می‌بینیم که گره C نیز دارای دو مجهول BC و CD می‌باشد و اکنون می‌توان تحلیل این گره را آغاز کرد.

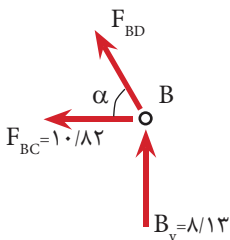


پیکر آزاد گره C:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow F_{BC} - 10/17 = 0 \Rightarrow F_{BC} = 10/17 \text{ kN} \quad \text{کششی}$$

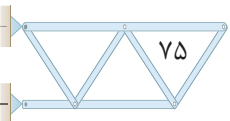
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CD} = 0$$

پیکر آزاد گره B:



$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BD} \sin \alpha + 8/17 = 0$$

$$\Rightarrow F_{BD} = \frac{-8/17}{0.6} \Rightarrow F_{BD} = -13/55 \text{ kN} \quad \text{فشاری}$$



۵-۱-۶- اعضای صفر نیرویی

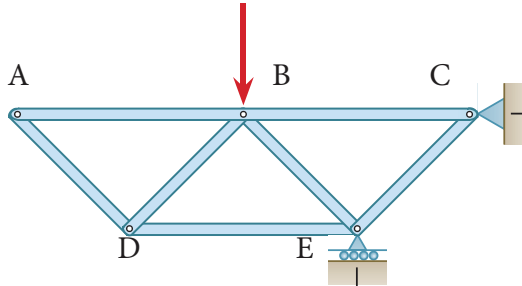
در مثال فوق ملاحظه گردید که نیروی داخلی عضو CD برابر صفر است که اصطلاحاً به آن عضو صفر نیرویی گفته می‌شود.

در موارد زیر اعضای صفر نیرویی بدون تحلیل قابل تشخیص هستند.

الف) هرگاه در گره‌ای دو عضو غیر هم‌راستا وجود داشته باشد و به آن گره نیروی خارجی و یا عکس‌العمل تکیه‌گاهی اعمال نشود، هر دو عضو صفر نیرویی خواهند بود. برای نمونه در شکل (۵-۹)، اعضای AB و AD دارای چنین شرایطی هستند بنابراین عضو صفر نیرویی خواهند بود. یعنی:

$$F_{AB} = F_{AD} = 0$$

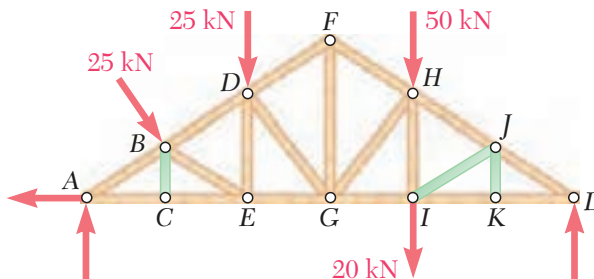
$$1000 \text{ N}$$



شکل ۵-۹

آیا این خرپا دارای عضو صفر نیرویی دیگری می‌باشد؟ چرا؟ نام ببرید.

ب) هرگاه در گره‌ای سه عضو وجود داشته باشد که دو عضو آن هم‌راستا باشند، در صورتی که نیروی خارجی روی گره مذکور نباشد، عضو سوم صفر نیرویی خواهد بود. در خرپای شکل (۵-۱۰) اعضای BC و KJ و IJ صفر نیرویی می‌باشند.

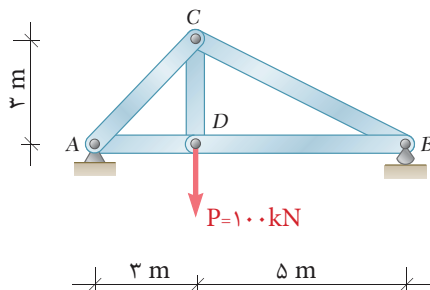


شکل ۵-۱۰

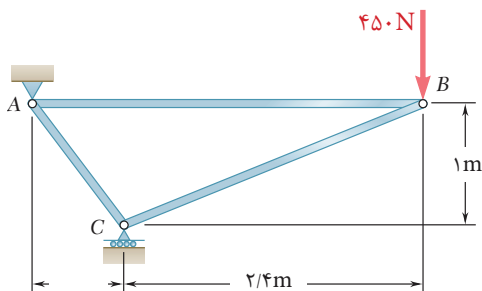
۱- در خرابای شکل زیر مطلوب است:

الف) محاسبه عکس العمل‌های تکیه‌گاهی

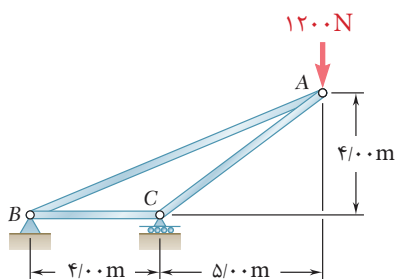
ب) محاسبه نیروهای داخلی اعضا و تعیین کششی یا فشاری بودن آنها



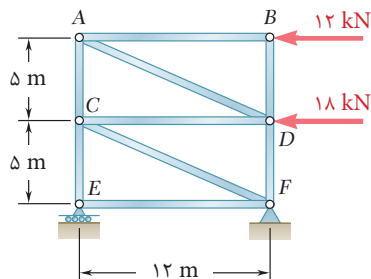
۲- در خراباهای زیر نیروهای داخلی اعضا را محاسبه نمایید.



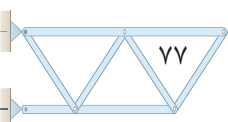
(الف)



(ب)



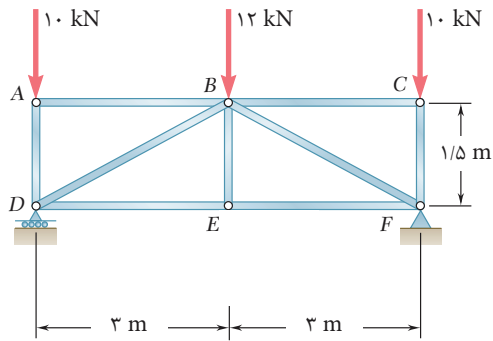
(ج)



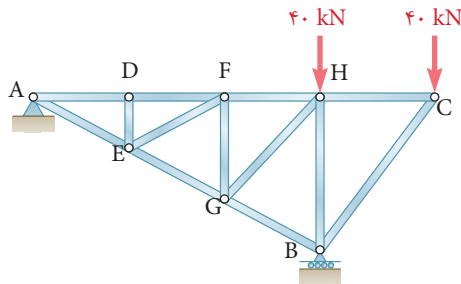
۳- در خرپای شکل زیر

اولاً: اعضای صفر نیرویی را تعیین کنید.

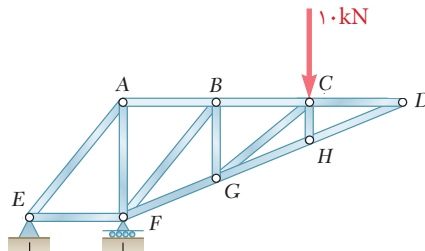
ثانیاً: نیروی داخلی سایر اعضا را محاسبه کنید.



۴- در خرپاهای زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص نمایید.



(الف)



(ب)

۵-۲ تحلیل تیرها

هدف از تحلیل تیر در این فصل تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی در هر مقطع از تیر می‌باشد.

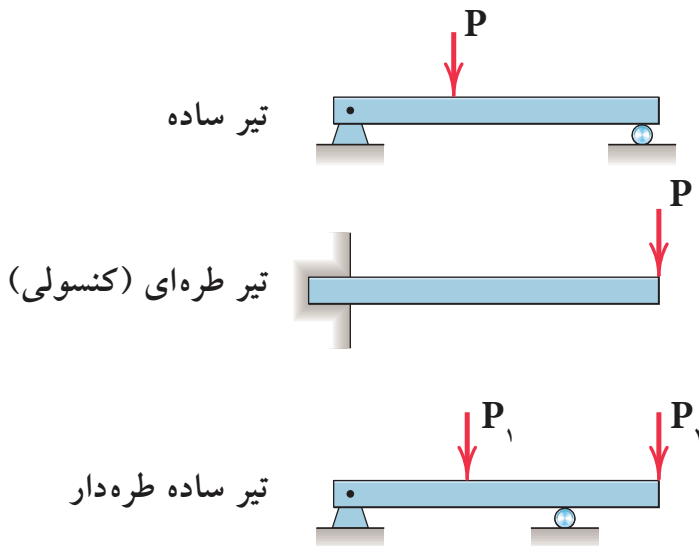
۵-۲-۱- تعریف تیر (Beam)

تیر عضوی است که بارهای عمود بر محور خود را تحمل و منتقل می‌نماید و در اکثر سازه‌های ساختمانی به کار می‌رود.

۵-۲-۲- انواع تیرها از نظر شرایط تکیه‌گاهی

با توجه به انواع تکیه‌گاه‌ها که قبلاً معرفی شده‌اند تیرها می‌توانند به صورت‌های مختلف روی تکیه‌گاه‌ها قرار گیرند که در این قسمت به معرفی چند نوع از آن‌ها اکتفا می‌شود.

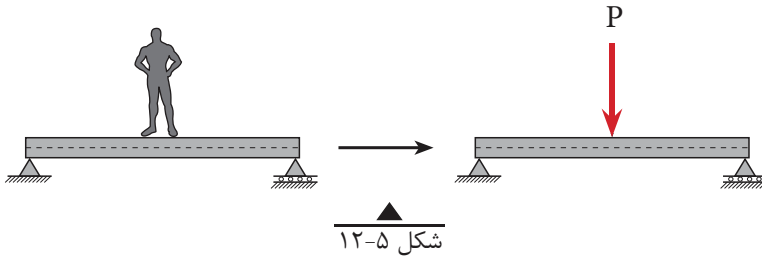
شکل (۵-۱۱)



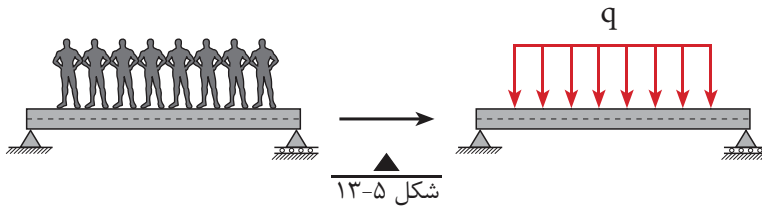
شکل ۵-۱۱

۵-۲-۳- انواع بارهای وارد به تیر

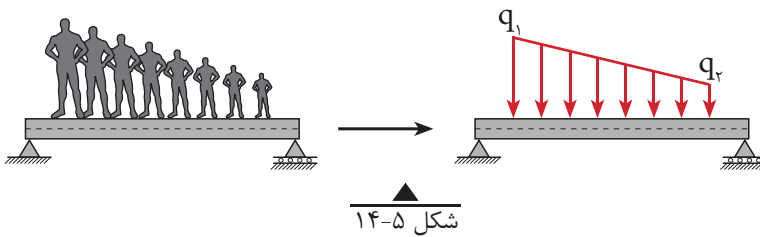
بارها به صورت‌های گوناگون به تیرها وارد می‌گردند که تعدادی از آن‌ها عبارت‌اند از:
الف) بار متمرکز



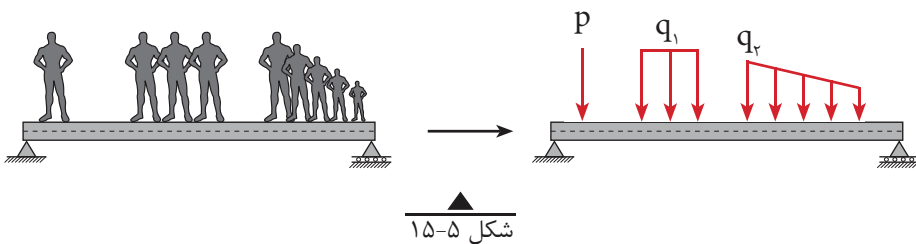
ب) بار گسترده یکنواخت



ج) بار گسترده غیر یکنواخت



د) ترکیبی از انواع فوق



۵-۲-۴- تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرها با بار گسترده یکنواخت

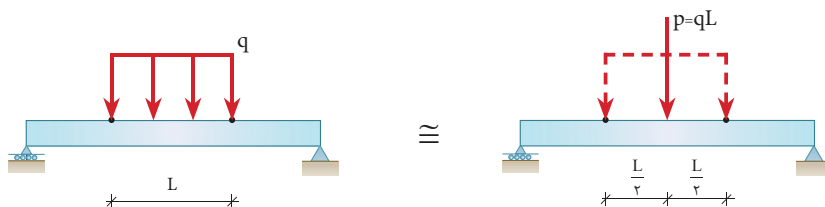
برای محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرها تحت بار گسترده یکنواخت ابتدا باید مقدار

و محل اثر برآیند بارهای گسترده یکنواخت وارد به تیر را تعیین نمود. مطابق شکل (۵-۱۶)

مقدار برآیند بار گسترده برابر مساحت مستطیل بار وارده و محل اثر آن نقطه تلاقی دو قطر مستطیل (نصف طول آن) خواهد بود.

با توجه به موارد فوق‌الذکر پیکر آزاد تیر را ترسیم نموده و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را

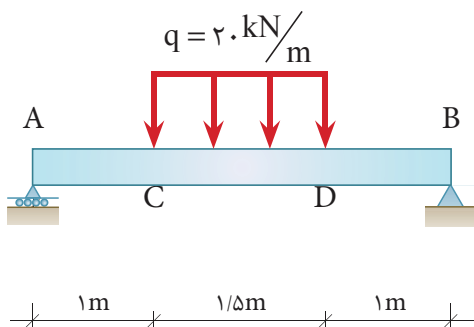
محاسبه می‌نماییم.



شکل ۵-۱۶

مثال ۲

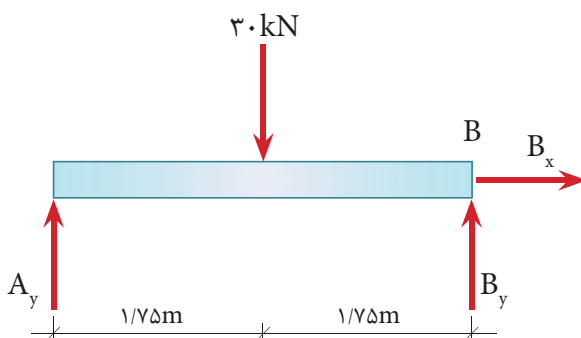
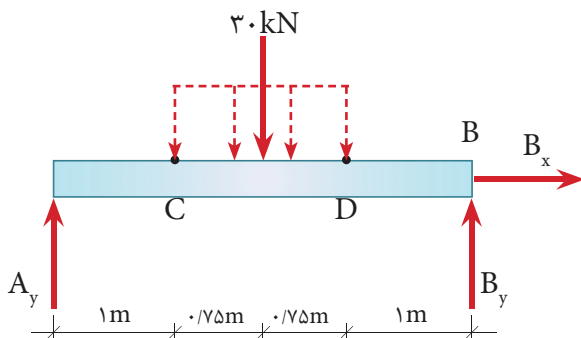
عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر شکل زیر را محاسبه نمایید.



الف) ابتدا مقدار برآیند بار گسترده (مساحت مستطیل) را به دست می‌آوریم

$$P = q.L \Rightarrow P = 20 \times 1/5 = 4 \text{ kN}$$

ب) محل اثر برآیند بار گسترده در نصف طول مستطیل می باشد که در پیکر آزاد تیر دیده می شود.



ج) با تشکیل معادلات تعادل و حل آن ها خواهیم داشت:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 30 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_y + B_y = 30 \text{ kN}} \quad \text{I}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 30 \times 1.5 - B_y \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_y = 15 \text{ kN}}$$

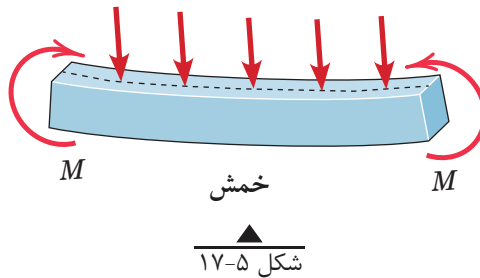
مقدار B_y را در معادله I قرار می دهیم تا A_y به دست آید.

$$\text{I از معادله} \Rightarrow A_y + B_y = 30 \Rightarrow A_y + 15 = 30 \Rightarrow \boxed{A_y = 15 \text{ kN}}$$

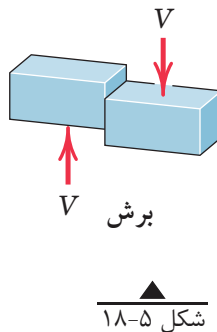
۵-۲-۵- رفتار تیر تحت تأثیر بارهای خارجی

هنگامی که تیری تحت تأثیر نیروهای خارجی مطابق شکل (۵-۱۷) واقع می‌شود، در آن پدیده‌های خمش و برش ایجاد می‌گردد.

پدیده خمش باعث ایجاد کشش و فشار در لایه‌ها یا تارهای تحتانی و فوقانی تیر می‌گردد. شکل (۵-۱۷)

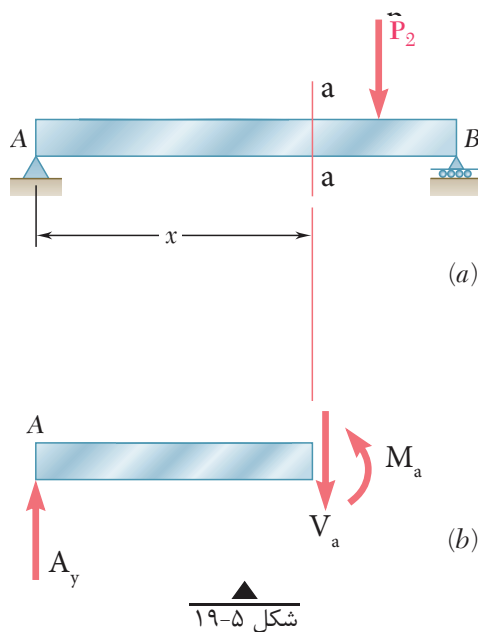


پدیده برش، رفتاری از تیر است که تمایل دارد تیر را در مقاطع مختلف آن قطع نماید. این رفتار، شبیه رفتار یک قیچی می‌باشد. شکل (۵-۱۸)

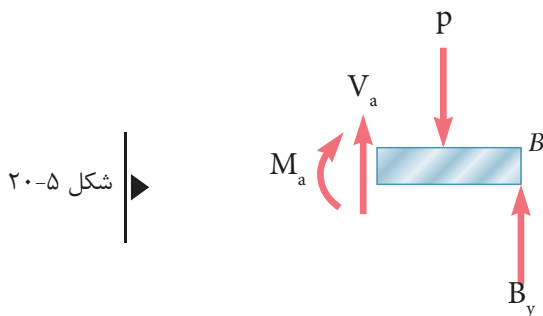


۵-۲-۶- نیروهای داخلی در تیرها با بار متمرکز

هنگامی که تیر تحت تأثیر بار قرار می‌گیرد در هر نقطه از طول تیر نیروهایی به وجود می‌آیند که به آن‌ها نیروهای داخلی تیر می‌گویند. برای این که نیروهای داخلی در هر نقطه از تیر تعیین شود باید یک برش (مقطع) عمود بر محور تیر در آن نقطه در نظر گرفت و پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ یا راست مقطع مورد نظر را ترسیم نموده و با توجه به بحث تعادل اثر قطعه دیگر را بر روی آن اعمال کرد. به عنوان مثال در شکل (۵-۱۹) در مقطع a-a خواهیم داشت:



و مطابق قانون سوم نیوتن همین اثر روی قطعه سمت راست و در جهت مخالف وجود دارد. شکل (۵-۲۰)



بنابراین نیروهای داخلی در هر مقطع از تیرها عبارتند از:

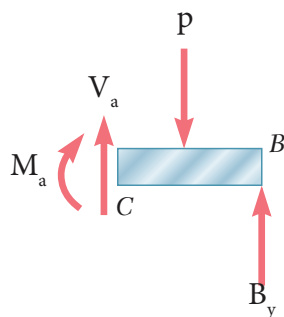
- ۱- نیروی برشی (V)
- ۲- لنگر خمشی (M)

۵-۲-۶-۱- علائم قرار دادی نیروهای داخلی تیرها

برای ایجاد یکنواختی در محاسبات نیروهای داخلی در مقاطع تیرها بهتر است جهت های مثبت نیروی برشی و لنگر خمشی را به صورت شکل (۵-۲۱) در نظر بگیریم.



قطعه سمت چپ



قطعه سمت راست

شکل ۵-۲۱

۵-۲-۶-۲- محاسبه نیروهای داخلی تیرها با بار متمرکز

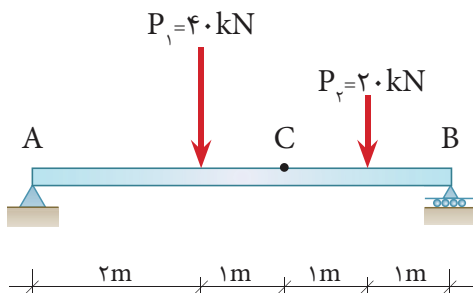
برای محاسبه نیروهای داخلی در هر مقطع، پس از ترسیم پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ یا راست آن مقطع و قرار دادن نیروی برشی V و لنگر خمشی M مطابق قرارداد فوق کافی است معادلات تعادل را برای قطعه مورد نظر تشکیل داده و اقدام به حل آن‌ها نماییم.

مثال ۲

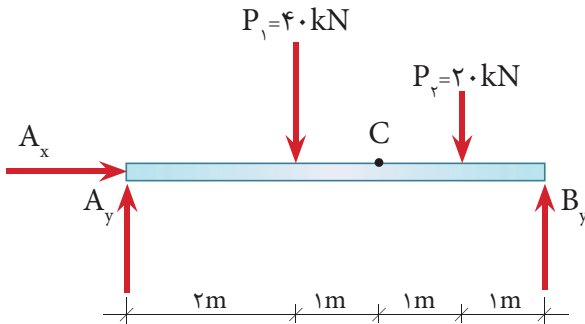
در تیر شکل مقابل مطلوب است:

الف) محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

ب) محاسبه نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطه C



گام ۱) ترسیم پیکر آزاد تیر:



گام ۲) محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 40 - 20 = 0$$

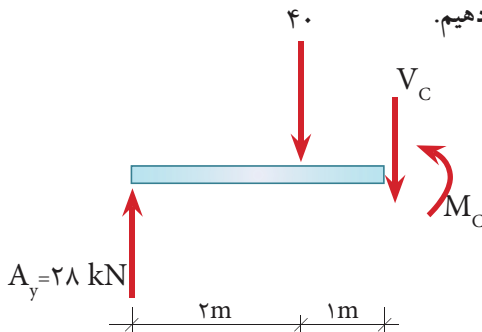
$$A_y + B_y = 60 \text{ kN} \quad \text{رابطه I}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow 40 \times 2 + 20 \times 4 - 5B_y = 0$$

$$\boxed{B_y = 32 \text{ kN}}$$

$$\text{I از رابطه I} \Rightarrow A_y + 32 = 60 \Rightarrow \boxed{A_y = 28 \text{ kN}}$$

گام ۳) برای تعیین نیروهای داخلی در مقطع C، تیر را در این نقطه به دو قسمت تقسیم نموده و قطعه سمت چپ را مورد بررسی قرار می دهیم.



گام ۴) تشکیل معادلات تعادل

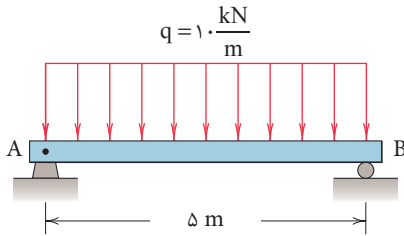
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 28 - 40 - V_c = 0 \Rightarrow \boxed{V_c = -12 \text{ kN}}$$

و حل آن ها برای این قطعه

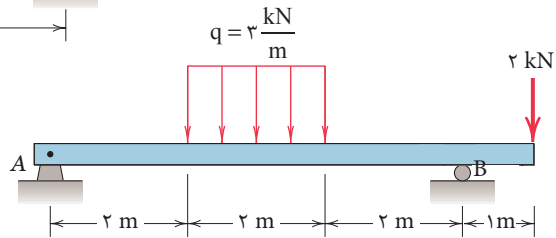
$$+\circlearrowleft \sum M_c = 0 \Rightarrow 28 \times 3 - 40 \times 1 - M_c = 0$$

$$\boxed{M_c = 44 \text{ kN.m}}$$

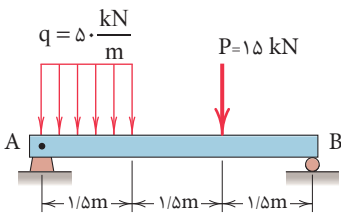
۱- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرهای زیر را به‌دست آورید.



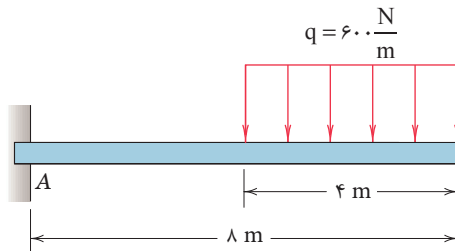
(الف)



(ب)

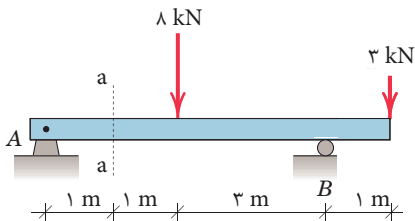


(ج)

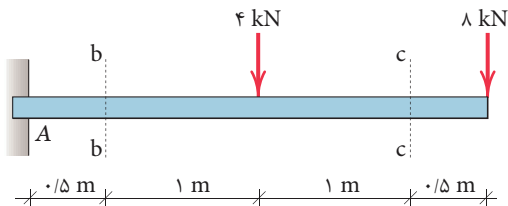


(د)

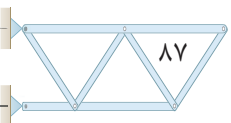
۲- در تیرهای زیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در مقاطع نشان‌داده شده به‌دست آورید.



(الف)



(ب)



۵-۲-۷- مقادیر حداکثر نیروهای برشی و لنگر خمشی در تیرها با بار متمرکز

در مثال قبل چگونگی محاسبه نیروی برشی و لنگر خمشی در نقطه دلخواه C را مشاهده نمودیم. برای مهندسین معمولاً مقدار ماکزیمم نیروهای داخلی و محل آن‌ها مهم است. حال این سوال مطرح می‌شود که مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر در کدام نقطه از طول تیر به وجود می‌آید؟

برای پاسخ به این سوال باید مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در تمام نقاط طول تیر همانند مثال قبل محاسبه نموده تا مقادیر حداکثر مورد نظر و محل آن‌ها مشخص شود که این روش، کاری است طاقت‌فرسا. لذا بهتر است که مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی در طول تیر را به صورت نمودار نشان داده و از روی نمودار مقادیر حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی و محل آن‌ها را تعیین نمود.

۵-۲-۸- ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیرها با بار متمرکز

نمودار نیروی برشی و یا لنگر خمشی عبارت است از نموداری که مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در هر نقطه از تیر مشخص نماید. هدف از ترسیم چنین نمودارهایی تعیین نقاطی است که حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در آن‌ها به وجود می‌آید. برای رسیدن به این هدف تیر را در محل‌هایی که بارگذاری آن تغییر می‌نماید به چند ناحیه تقسیم نموده و در هر ناحیه معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی را بر حسب طول تیر تعیین و سپس نمودار معادلات مذکور ترسیم می‌گردد.

مراحل ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر با بار متمرکز به شرح ذیل خواهد بود:

۱- محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر

۲- ما بین هر دو بار متمرکز یک مقطع به فاصله X از تکیه‌گاه در نظر گرفته و محدوده X را تعیین می‌نماییم. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نیز، بار متمرکز محسوب می‌شوند.

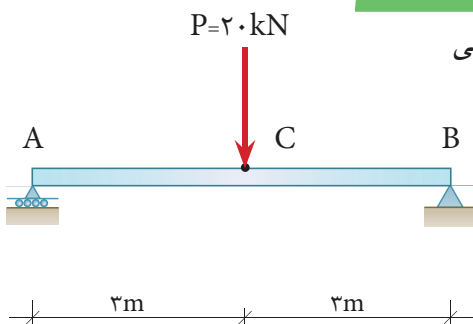
۳- پیکر آزاد یکی از قطعات سمت چپ و یا راست مقطع مورد نظر را ترسیم می‌کنیم.

۴- با تشکیل معادلات تعادل برای قطعه مورد نظر، به معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی بر حسب X خواهیم رسید.

۵- با ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی در محدوده‌های مختلف تیر به نمودارهای موردنظر دست می‌یابیم.

مثال ۳

نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی
تیر مقابل را ترسیم نمایید.



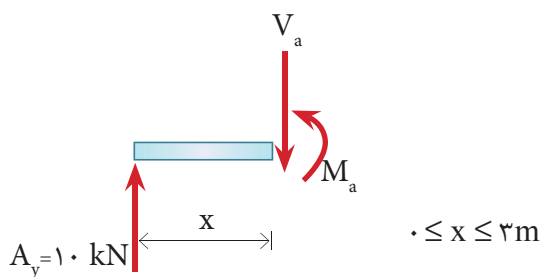
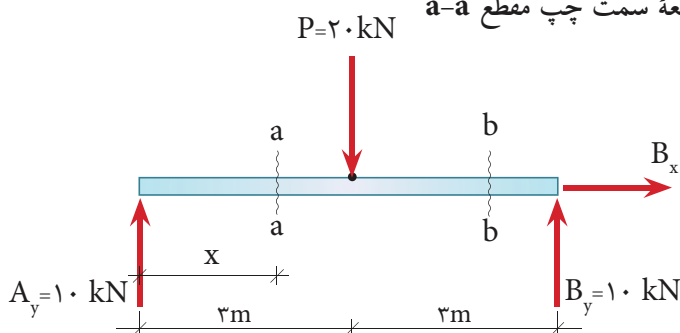
۱- محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی: با توجه به تقارن تیر داریم:

$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = 0}$$

$$\boxed{A_y = B_y = \frac{2}{2} = 1 \text{ kN}}$$

۲- مقطع a-a به فاصله x از تکیه‌گاه A را در نظر گرفته و محدوده x را مشخص می‌نمائیم.

۳- ترسیم پیکر آزاد قطعه سمت چپ مقطع a-a



۴- با تشکیل معادلات تعادل برای قطعه فوق خواهیم داشت:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10 - V_a = 0$$

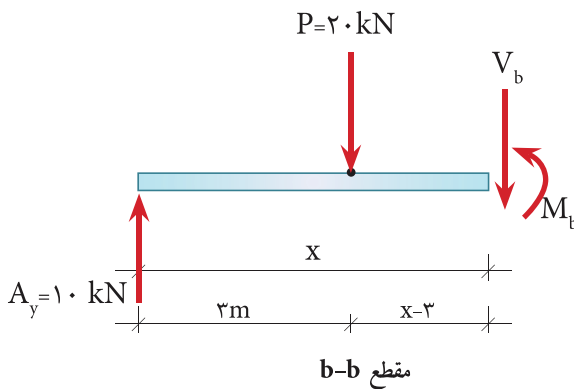
$$\boxed{V_a = 10 \text{ kN}} \quad \text{(I)} \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \quad \text{معادله نیروی برشی در محدوده}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_a = 0 \Rightarrow 10 \times x - M_a = 0$$

$$\boxed{M_a = 10 \times x} \quad \text{(II)} \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \quad \text{معادله لنگر خمشی در محدوده}$$

این معادلات مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی را در محدوده $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$ مشخص می نمایند.

عملیات فوق را برای مقطع b-b در محدوده $3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$ تکرار می نمائیم. خواهیم داشت:



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 10 - 20 - V_b = 0$$

$$\boxed{V_b = -10 \text{ kN}} \quad \text{(III)} \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \quad \text{معادله نیروی برشی در محدوده}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_b = 0 \Rightarrow 10 \times x - 20 \times (x - 3) - M_b = 0$$

$$M_b = 10 \times x - 20 \times (x - 3)$$

$$\boxed{M_b = 60 - 10 \times x} \quad \text{(IV)} \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \quad \text{معادله لنگر خمشی در محدوده}$$

۵- اکنون نمودار نیروی برشی را با استفاده از معادلات I و III ترسیم می‌نمائیم.

$$(I) \quad V_a = 10 \text{ kN} \quad 0 \leq x \leq 3\text{m}$$

$$(III) \quad V_b = -10 \text{ kN} \quad 3\text{m} \leq x \leq 6\text{m}$$

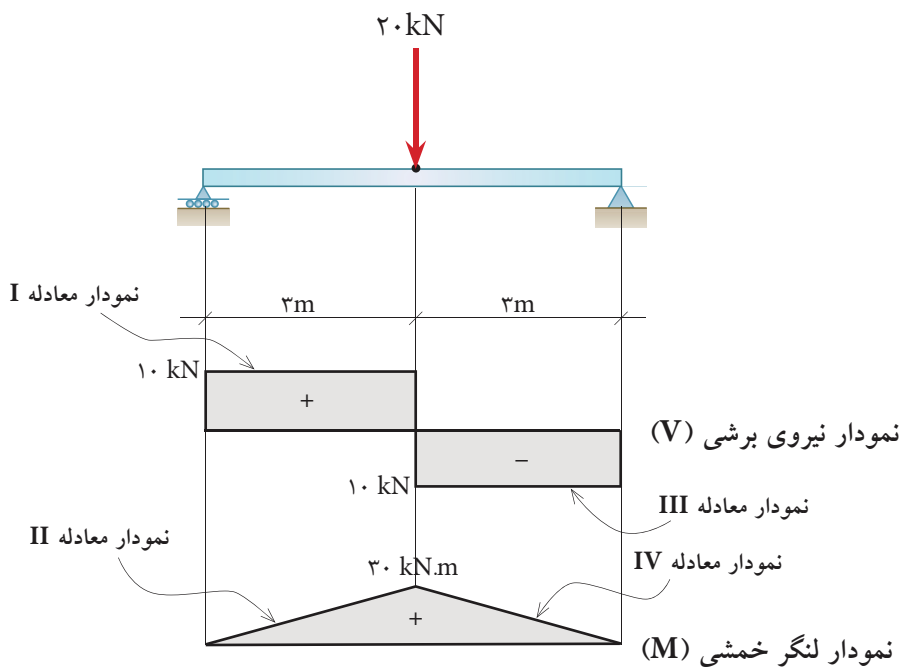
۶- نمودار لنگر خمشی را با استفاده از معادلات II و IV و به‌روش نقطه‌یابی در نقاط ابتدا و انتهای هر ناحیه ترسیم می‌کنیم.

$$(II) \quad M_a = 10x \quad 0 \leq x \leq 3\text{m}$$

$x \text{ (m)}$	$M \text{ (kN.m)}$
۰	۰
۳	۳۰

$$(IV) \quad M_b = 60 - 10x \quad 3\text{m} \leq x \leq 6\text{m}$$

$x \text{ (m)}$	$M \text{ (kN.m)}$
۳	۳۰
۶	۰



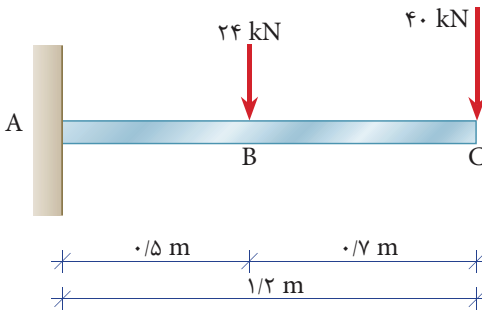
مثال ۴

در تیر شکل مقابل مطلوب است:

الف- ترسیم دیاگرام نیروی برشی تیر

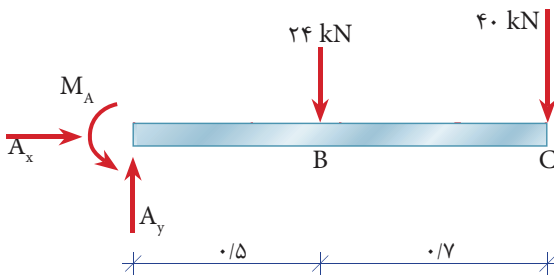
ب- ترسیم دیاگرام لنگر خمشی تیر

ج- تعیین نیروی برشی و لنگر خمشی حداکثر تیر.



حل:

الف) محاسبه عکس العمل های تکیه گاهی

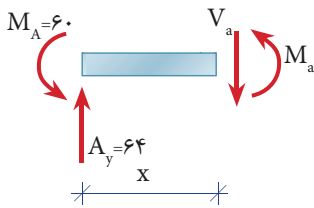
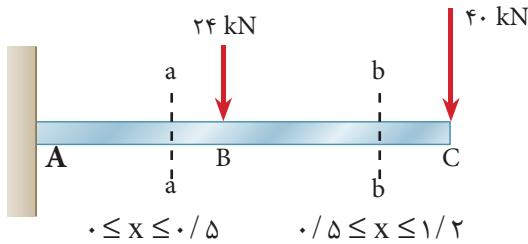


$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 24 - 40 = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 64 \text{ kN}}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \Rightarrow -M_A + 24 \times 0.5 + 40 \times 1.2 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = 60 \text{ kN.m}}$$

معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در ناحیه AB ($0 \leq x \leq 0.5$):

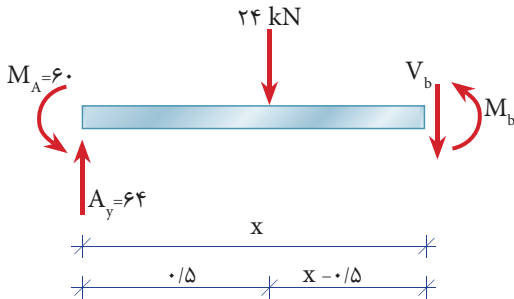


مقطع a-a

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 64 - V_a = 0 \Rightarrow \boxed{V_a = 64 \text{ kN}} \quad 0 \leq x \leq 0.5$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_a = 0 \Rightarrow -M_a + 64x - M_A = 0 \Rightarrow \boxed{M_a = 64x - 60}$$

معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی در ناحیه BC ($0.5 \leq x \leq 1$):



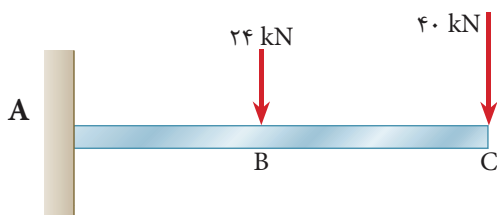
مقطع b-b

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 64 - 24 - V_b = 0 \Rightarrow \boxed{V_b = 40 \text{ kN}} \quad 0.5 \leq x \leq 1/2$$

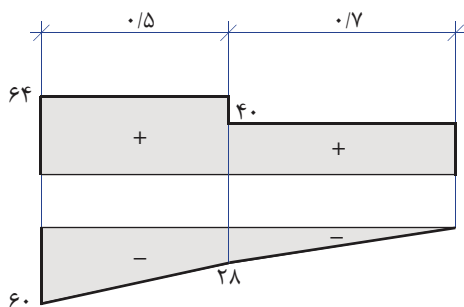
$$+\circlearrowleft \Sigma M_b = 0 \Rightarrow -M_b - M_A + 64 \times x - 24(x - 0.5) = 0$$

$$\Rightarrow M_b = 64x - 24(x - 0.5) - 60$$

$$\boxed{M_b = 40x - 48} \quad 0.5 \leq x \leq 1/2$$



ترسیم معادلات برش و خمشی:



نمودار نیروی برشی

نمودار لنگر خمشی

ج) با توجه به نمودار، حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در تکیه‌گاه قرار دارد و مقدار آن برابر است با:

$$\begin{aligned} V_{\max} &= 64 \text{ kN} \\ M_{\max} &= 60 \text{ kN.m} \end{aligned}$$

نتیجه: در تیرهای کنسولی حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی در تکیه‌گاه به وجود می‌آید.

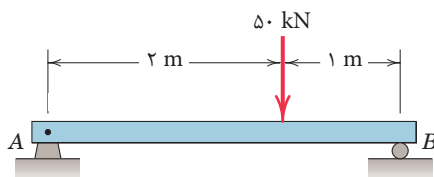
- خرپاها به دو گروه کلی صفحه‌ای و فضایی تقسیم می‌شوند.
- خرپاها تشکیل شبکه‌ی مثلثی می‌دهند.
- نیروهای خارجی وارد بر خرپاها در صفحه خرپا و در محل گره‌ها به آن‌ها اعمال می‌شود.
- اعضای خرپاها به صورت مفصلی به یکدیگر متصل می‌شوند.
- منظور از تحلیل خرپا، تعیین نیروی داخلی هر عضو خرپا و محاسبه‌ی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن می‌باشد.
- برای تحلیل خرپاها از روش مفصل (گره) استفاده می‌شود.
- در گره‌های دارای دو عضو غیر هم‌راستا در صورتی که نیروی خارجی وجود نداشته باشد هر دو عضو صفر نیرویی خواهند بود.
- در گره‌های دارای سه عضو که دو عضو آن‌ها هم‌راستا باشند، در صورت عدم وجود نیروی خارجی در آن گره، عضو سوم، صفر نیرویی خواهد بود.
- هدف از تحلیل تیر، تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی در هر مقطع از تیر می‌باشد.
- تیرها در اثر اعمال بارهای خارجی دارای رفتارهای خمشی و برشی می‌باشند.
- نیروهای داخلی در هر مقطع از تیر عبارتند از: نیروی برشی و لنگر خمشی.
- مقدار برآیند بارهای گسترده یکنواخت برابر است با مساحت بار گسترده.
- محل اثر برآیند بارهای گسترده یکنواخت در محل تلاقی دو قطر مستطیل بار وارده می‌باشد.

۱- در تیرهای زیر مطلوب است:

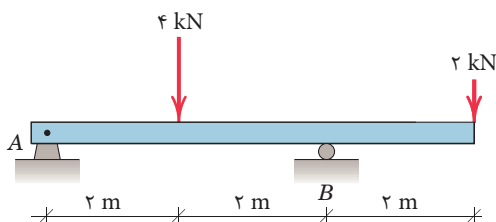
الف) ترسیم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی

ب) تعیین محل لنگر خمشی حداکثر

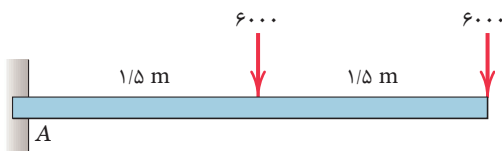
ج) تعیین مقادیر حداکثر نیروی برشی و لنگر خمشی تیر



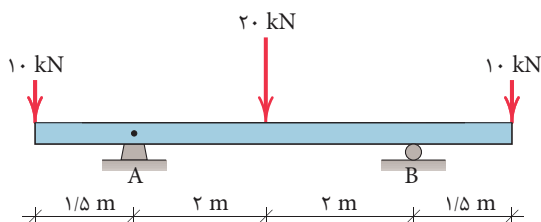
(الف)



(ب)



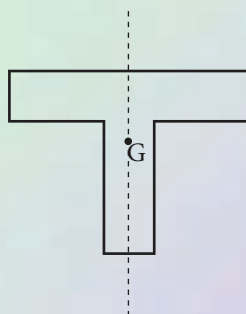
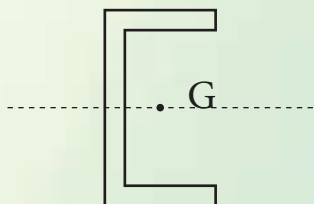
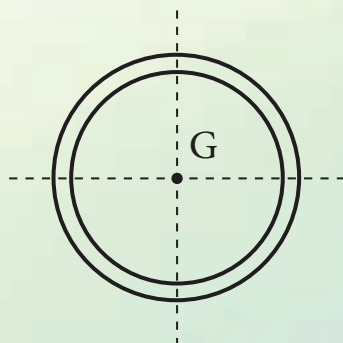
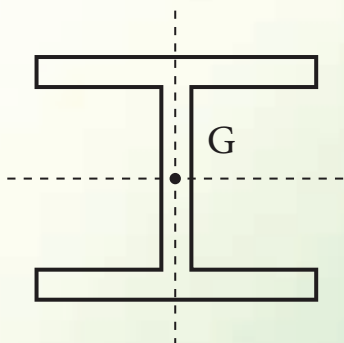
(ج)



(د)

فصل ششم

خواص هندسی سطوح



پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- خواص هندسی سطوح را بشناسد و نام ببرد.
- ۲- گشتاور اول سطح را تعریف نماید.
- ۳- مرکز سطح سطوح مختلف هندسی را به دست آورد.
- ۴- مختصات مرکز سطح سطوح متقارن را تعیین نماید.
- ۵- روابط مربوط به گشتاور دوم سطح را بشناسد و به کار گیرد.
- ۶- ممان اینرسی سطوح مرکب را محاسبه نماید.
- ۷- اساس مقطع سطوح مختلف را به دست آورد.
- ۸- مشخصات هندسی مقاطع نورد شده را از جدول استاندارد آن‌ها استخراج نماید.

مقدمه:

طول، سطح و حجم سه خصوصیت اصلی هندسی اجسام به شمار می‌روند. اجسام یک‌بعدی مانند طناب با طولشان، اجسام دو بعدی مانند یک قطعه زمین با مساحتشان و اجسام سه‌بعدی مثل یک ساختمان با حجمی که دارند مشخص می‌شوند. این خصوصیات تمام ویژگی‌های اجسام را بیان نمی‌کنند؛ مثلاً دو قطعه زمین هم‌مساحت ممکن است دارای شکل‌های هندسی متفاوت باشند. بنابراین اجسام دارای خصوصیات دیگری نیز می‌باشند که در این فصل به بررسی بعضی از خصوصیات سطوح شامل گشتاور اول سطح، مرکز سطح، گشتاور دوم سطح و مدول مقطع یا اساس مقطع آن‌ها می‌پردازیم.

۶-۱ گشتاور اول سطح (ممان استاتیک)

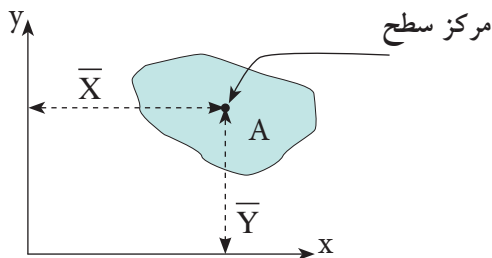
در فصل دوم با گشتاور نیرو آشنا شدیم که عبارت بود از حاصل ضرب نیرو در فاصله آن نیرو تا یک محور. گشتاور اول سطح نیز تعریفی مشابه گشتاور نیرو داشته و عبارت است از:

حاصل ضرب مساحت در فاصله مرکز آن تا محور مورد نظر.

گشتاور اول سطح با نماد Q نمایش داده می‌شود و واحد آن طول به توان ۳ می‌باشد

یعنی m^3 و یا cm^3 و ...

در شکل زیر با توجه به تعریف داریم:



شکل ۱-۶

$$Q_x = A \cdot \bar{Y} \quad \text{گشتاور اول سطح } A \text{ نسبت به محور } x$$

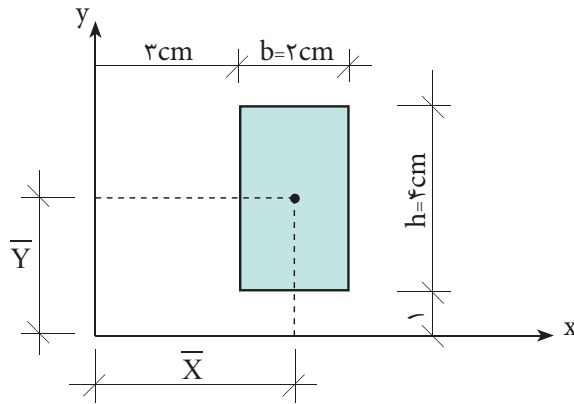
$$Q_y = A \cdot \bar{X} \quad \text{گشتاور اول سطح } A \text{ نسبت به محور } y$$

در روابط فوق \bar{X} و \bar{Y} مختصات مرکز سطح A می‌باشند.

در جدول (۱-۶) مختصات مرکز سطح بعضی از سطوح هندسی نسبت به محوره‌های x و y آمده است.

جدول (۱-۶)				
نام سطح	شکل هندسی	\bar{X}	\bar{Y}	توضیحات
مستطیل (مربع)		$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	مرکز سطح مستطیل محل تلاقی دو قطر آن می‌باشد
مثلث قائم الزاویه		$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	مرکز سطح مثلث قائم الزاویه در فاصله $\frac{1}{3}$ از قاعده آن می‌باشد
دایره		r	r	مرکز سطح دایره مرکز دایره می‌باشد

گشتاور اول سطح (ممان استاتیک) مستطیل را نسبت به محورهای x و y محاسبه کنید.



با توجه به شکل فاصله مرکز سطح از محورهای x و y عبارتند از:

$$\bar{X} = \frac{b}{2} + 3 \Rightarrow \bar{X} = \frac{2}{2} + 3 = 4 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{h}{2} + 1 \Rightarrow \bar{Y} = \frac{4}{2} + 1 = 3 \text{ cm}$$

$$A = b \cdot h = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}^2$$

مساحت مستطیل برابر است با

$$Q_x = A \cdot \bar{Y} \Rightarrow Q_x = 8 \times 3 = 24 \text{ cm}^3$$

ممان استاتیک نسبت به محور x

$$Q_y = A \cdot \bar{X} \Rightarrow Q_y = 8 \times 4 = 32 \text{ cm}^3$$

ممان استاتیک نسبت به محور y

۲-۶ گشتاور اول (مان استاتیک) سطوح مرکب

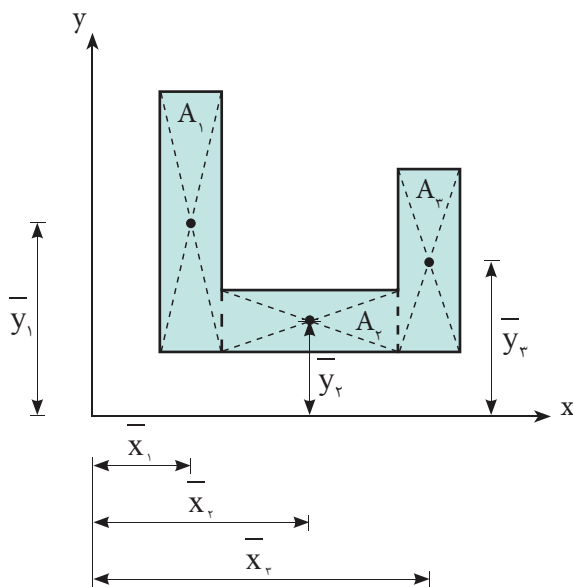
به منظور محاسبه گشتاور اول سطوح مرکب، آن‌ها را به سطوح هندسی ساده تجزیه نموده و ممان استاتیک هر یک از آن‌ها را نسبت به محورهای مورد نظر محاسبه و با یکدیگر جمع جبری می‌نمائیم. یعنی:

$$Q_x = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i$$

(۲-۶)

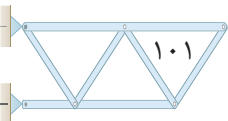
به عنوان نمونه در شکل (۲-۶) خواهیم داشت:



شکل ۲-۶

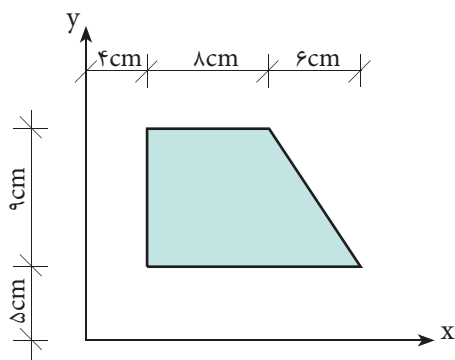
$$Q_x = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i \Rightarrow Q_x = A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 + A_3 \bar{y}_3$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i \Rightarrow Q_y = A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + A_3 \bar{x}_3$$



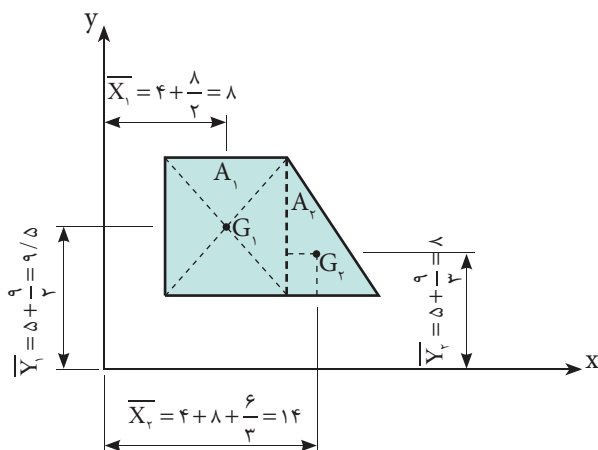
مثال ۲

گشتاور اول سطح داده شده را نسبت به محورهای X و Y محاسبه کنید.



حل:

سطح مرکب داده شده را مطابق شکل زیر به دو سطح ساده مستطیلی و مثلثی تجزیه می کنیم.



به کمک جدول (۲-۶) حل مسئله را ادامه می دهیم

جدول (۲-۶)					
سطوح	مساحت (A_i) cm ^۲	\bar{x} cm	\bar{y} cm	$Q_x = A\bar{y}_i$ cm ^۳	$Q_y = A\bar{x}_i$ cm ^۳
A_1	$۸ \times ۹ = ۷۲$	۸	۹/۵	$۷۲ \times ۹/۵ = ۶۸۴$	$۷۲ \times ۸ = ۵۷۶$
$A_۲$	$\frac{۶ \times ۹}{۲} = ۲۷$	۱۴	۸	$۲۷ \times ۸ = ۲۱۶$	$۲۷ \times ۱۴ = ۳۷۶$
Σ				۱۴۰۰	۹۵۴

بنابراین:

$$Q_x = ۱۴۰۰ \text{ cm}^۳$$

$$Q_y = ۹۵۴ \text{ cm}^۳$$

۳-۶ مرکز سطح سطوح مرکب

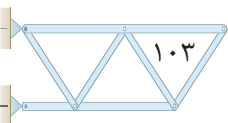
برای محاسبه مرکز سطح سطوح مرکب با توجه به این که گشتاور اول کل سطح با مجموع گشتاورهای اول اجزای سطح مرکب با هم برابرند می توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= A\bar{X} \\ Q_y &= \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow A\bar{X} = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i \Rightarrow \bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= A\bar{Y} \\ Q_x &= \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i \end{aligned} \right\} \Rightarrow A\bar{Y} = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i \Rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$$

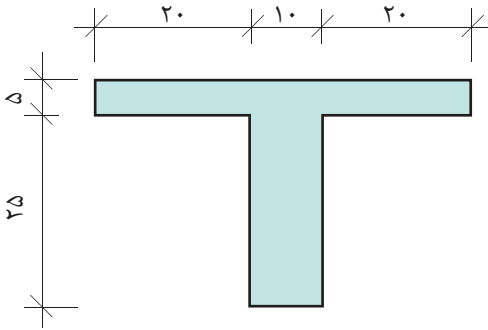
(۳-۶)

در روابط فوق \bar{X} و \bar{Y} مختصات مرکز سطح مرکب مورد نظر می باشند که نسبت به محورهای مختصات دلخواه تعیین می شوند.

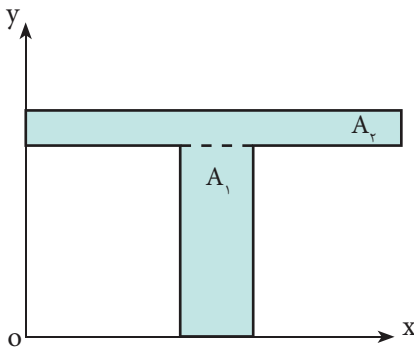


مثال ۳

مختصات مرکز سطح شکل زیر را محاسبه نمایید.
(ابعاد شکل بر حسب cm است)



به منظور سادگی حل مسئله محورهای مختصات x و y را طوری در نظر می‌گیریم که شکل در ربع اول دستگاه مختصات قرار گرفته و تمام طول‌ها مثبت باشند.



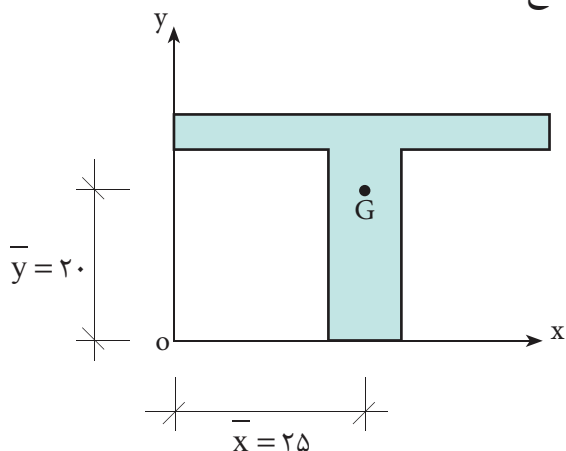
پس از تجزیه شکل مرکب به سطوح ساده جدول مشخصات آن‌ها را تشکیل داده و با استفاده از روابط (۳-۶) مختصات مرکز سطح را محاسبه می‌نمائیم. (جدول ۳-۶)

جدول (۳-۶)					
سطوح	مساحت (A_i) cm ^۲	\bar{x}_i cm	\bar{y}_i cm	$Q_x = A_i \bar{y}_i$ cm ^۳	$Q_y = A_i \bar{x}_i$ cm ^۳
A_1	$۱۰ \times ۲۵ = ۲۵۰$	$۲۰ + \frac{۱۰}{۲} = ۲۵$	$\frac{۲۵}{۲} = ۱۲/۵$	۳۱۲۵	۶۲۵۰
$A_۲$	$۵ \times ۵۰ = ۲۵۰$	$\frac{۵۰}{۲} = ۲۵$	$۲۵ + \frac{۵}{۲} = ۲۷/۵$	۶۸۷۵	۶۲۵۰
Σ	۵۰۰			۱۰۰۰۰	۱۲۵۰۰

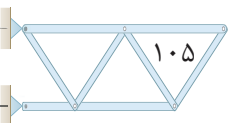
$$\bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} = \frac{۱۲۵۰۰}{۵۰۰} = ۲۵ \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{۱۰۰۰۰}{۵۰۰} = ۲۰ \text{ cm}$$

در شکل زیر مختصات مرکز سطح نشان داده شده است:



$$G \begin{cases} ۲۵ \text{ cm} \\ ۲۰ \text{ cm} \end{cases}$$



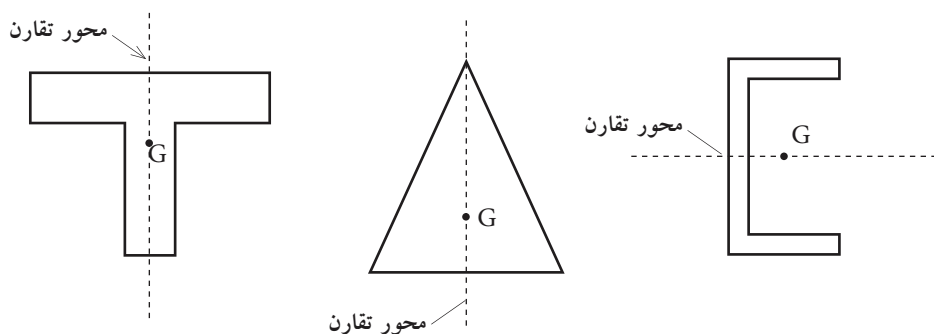
۴-۶ استفاده از تقارن در تعیین مرکز سطح سطوح متقارن

محور تقارن: خطی است که سطح را به دو قسمت مساوی و قرینه تقسیم می‌کند.

۴-۶-۱- سطوح با یک محور تقارن

اگر سطح دارای یک محور تقارن باشد، مرکز سطح روی آن محور خواهد بود.

شکل (۳-۶)

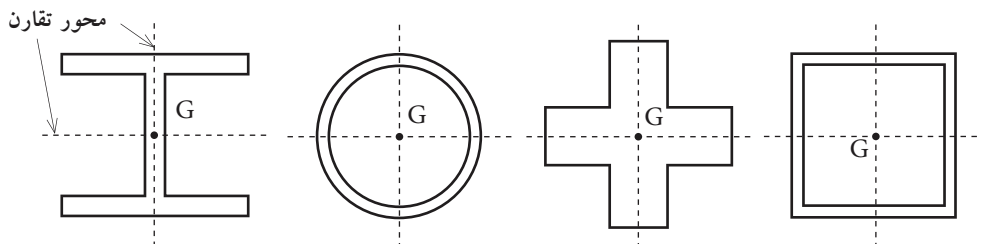


شکل ۳-۶

۴-۶-۲- سطوح با دو محور تقارن

هرگاه سطح دارای دو محور تقارن باشد مرکز سطح در محل تلاقی آن دو محور خواهد

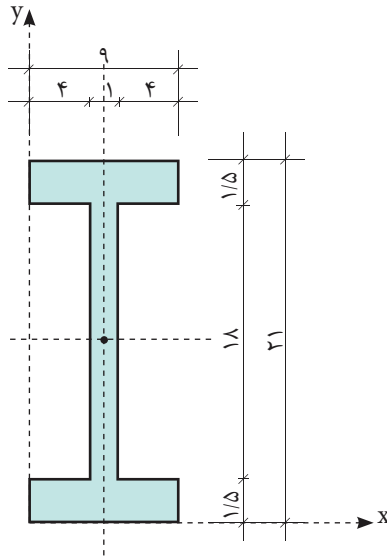
بود. شکل (۴-۶)



شکل ۴-۶

مثال ۴

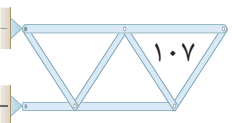
در شکل زیر با استفاده از تقارن مختصات مرکز سطح را به دست آورید.
(ابعاد بر حسب سانتی متر می باشد)



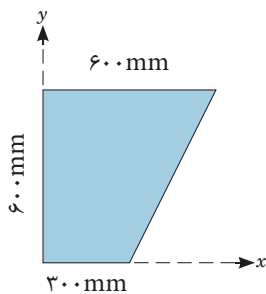
باتوجه به این که شکل دارای دومحور تقارن می باشد لذا مرکز سطح محل تلاقی آنها خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\bar{x} = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ cm}$$

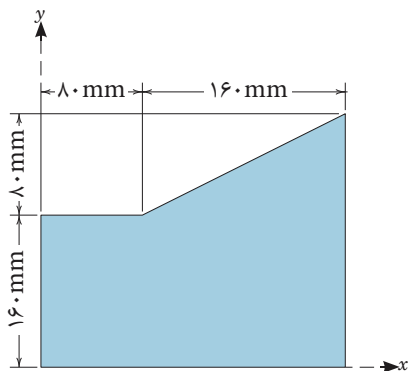
$$\bar{y} = \frac{21}{2} = 10.5 \text{ cm}$$



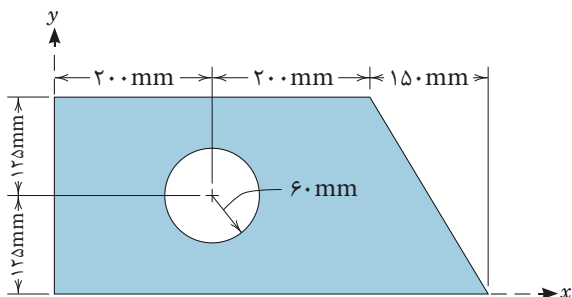
۱- در شکل‌های زیر مختصات مرکز سطح را محاسبه کنید.



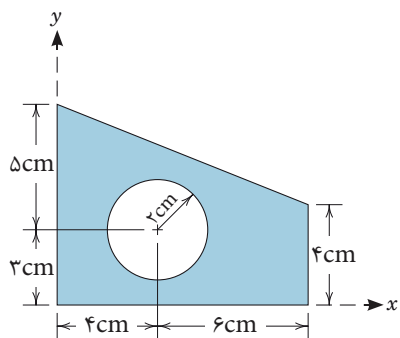
(الف)



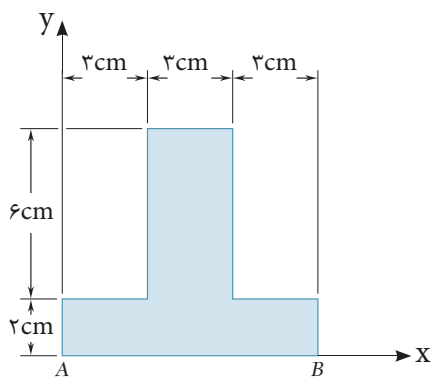
(ب)



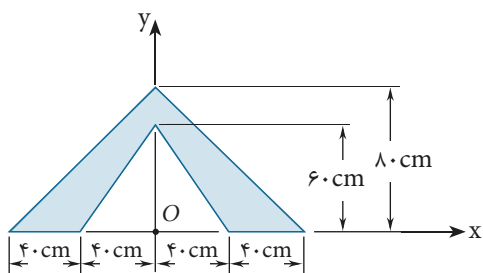
(ج)



(د)

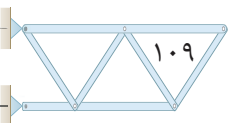
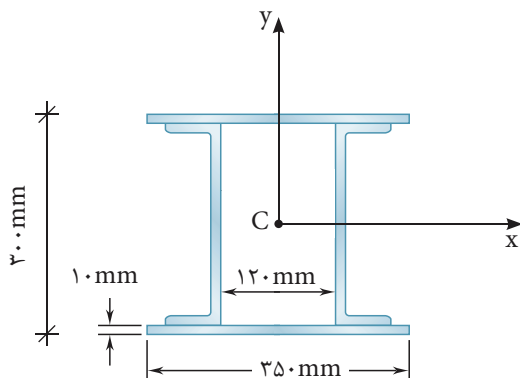


(ه)



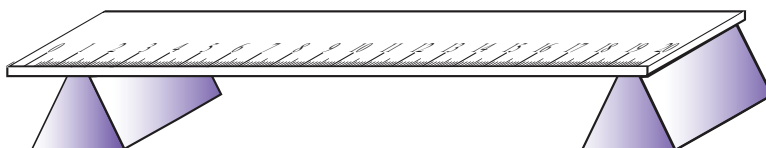
(و)

۲- با استفاده از تقارن، مختصات مرکز سطح را به دست آورید.

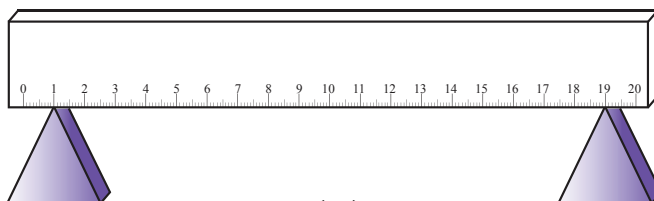


۵-۶ گشتاور دوم سطح (ممان اینرسی) (Moment of Inertia)

خط کشی را مطابق شکل (۵-۶) در نظر می گیریم اگر بخواهیم آن را در دو حالت نشان داده شده خم کنیم به نظر شما در کدام حالت راحت تر خم می شود؟ چرا؟



(الف)



(ب)

شکل ۵-۶

باتوجه به مثال فوق درمی یابیم علی رغم آن که سطح مقطع خط کش در هر دو حالت یکسان است در حالت (الف) خط کش راحت تر خم می شود. یعنی مقاومت آن در مقابل خم شدن (خمش) کمتر از حالت (ب) می باشد. علت آن ممان اینرسی سطح مقطع خط کش است که در حالت (الف) کمتر از حالت (ب) می باشد.

به عنوان یک تعریف ساده از ممان اینرسی، می توان گفت:

گشتاور دوم سطح یا ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش می باشد و به توزیع ذرات تشکیل دهنده جسم حول محور خمش بستگی دارد.

ممان اینرسی را با نماد I نشان داده و نسبت به محورهای مختلف با اندیس آن محور

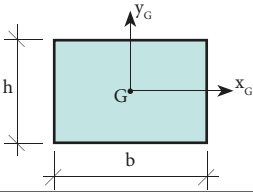
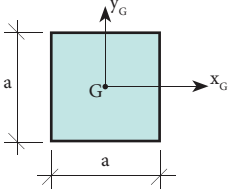
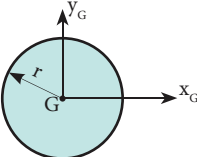
نام گذاری می شود. به عنوان مثال، I_x یعنی ممان اینرسی نسبت به محور x .

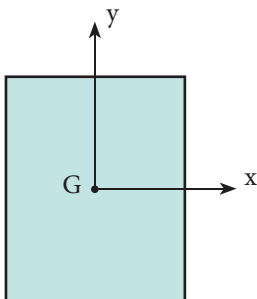
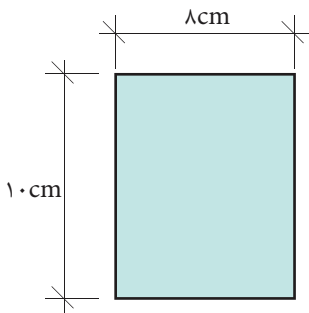
واحد ممان اینرسی، طول به توان ۴ یعنی cm^4 یا mm^4 و ... می باشد.

در جدول (۴-۶) روابط ممان اینرسی بعضی از سطوح هندسی ساده نسبت به محورهای

مرکزی آنها آمده است.

جدول (۴-۶)

نام سطح	شکل هندسی	I_{x_G}	I_{y_G}
مستطیل		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$
مربع		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$
دایره		$\frac{\pi r^4}{4}$	$\frac{\pi r^4}{4}$



مثال ۵

ممان اینرسی سطح مقطع مقابل را نسبت به محورهای مرکزی آن محاسبه نمایید.

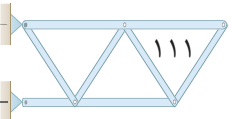
حل:

مرکز سطح مستطیل محل تلاقی دو قطر آن می باشد بنابراین:

ابتدا موقعیت محورهای مرکزی سطح مقطع را مشخص نموده سپس با استفاده از روابط جدول (۴-۶) I_{y_G} و I_{x_G} را تعیین می نمایم.

$$I_{x_G} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \times 10^3}{12} = 666.67 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_G} = \frac{hb^3}{12} = \frac{10 \times 8^3}{12} = 426.67 \text{ cm}^4$$

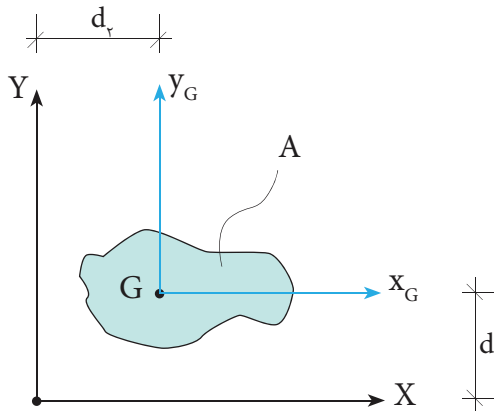


۶-۶ قضیه محوره‌های موازی

در قسمت قبل روش تعیین ممان اینرسی یک سطح نسبت به محور هایی که از مرکز آن سطح می گذرد ، را دیدیم.

حال می خواهیم ممان اینرسی یک سطح را نسبت به محورهایی که موازی محوره‌های مرکزی آن می باشند، به دست آوریم.

به عنوان مثال در شکل (۶-۶) با فرض اینکه ممان اینرسی آن نسبت به محوره‌های مرکزی (y_G و x_G) معلوم باشد، می خواهیم ممان اینرسی مقطع را نسبت به محوره‌های X و Y که با فاصله d_y و d_x از محوره‌های مرکزی قرار دارند، محاسبه کنیم.



شکل ۶-۶

این موضوع با قضیه محوره‌های موازی که به صورت زیر بیان می شود قابل محاسبه خواهد بود.

ممان اینرسی یک سطح نسبت به محورهایی که موازی با محوره‌های مرکزی آن سطح می باشند، برابر است با ممان اینرسی آن سطح نسبت به محوره‌های مرکزی به اضافه ضرب مساحت در مجذور فاصله محور مورد نظر تا مرکز سطح.

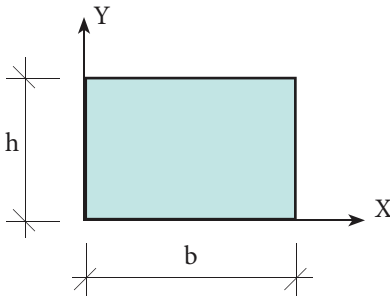
یعنی:

$$\begin{aligned} I_X &= I_{x_G} + Ad_y^2 \\ I_Y &= I_{y_G} + Ad_x^2 \end{aligned} \quad (۴-۶)$$

مثال ۶

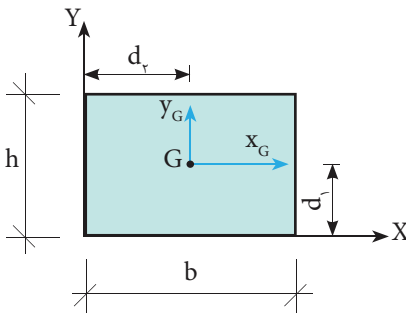
در شکل روبه‌رو مطلوب است:

محاسبه I_x و I_y



حل:

الف) ابتدا ممان اینرسی را نسبت به محوره‌های مرکزی آن یعنی x_G و y_G تعیین می‌کنیم.



$$I_{xG} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yG} = \frac{hb^3}{12}$$

ب) با توجه به این که محور X بر طول مستطیل مماس می‌باشد، فاصله آن از محور x_G یعنی d_x برابر است با:

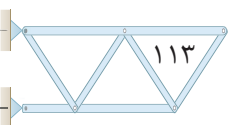
$$d_x = \frac{h}{2}$$

$$A = b.h$$

$$I_X = I_{xG} + Ad_x^2 \Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{12} + (b.h)\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} \Rightarrow I_X = \frac{bh^3 + 3bh^3}{12}$$

$$I_X = \frac{4bh^3}{12} \Rightarrow I_X = \frac{bh^3}{3}$$



ج) برای محور Y نیز خواهیم داشت:

$$d_y = \frac{b}{2}$$

$$A = b.h$$

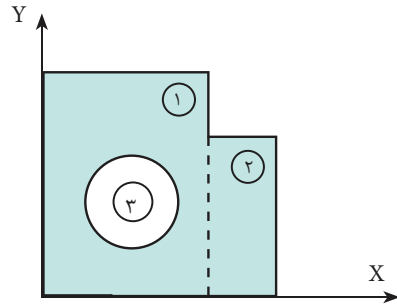
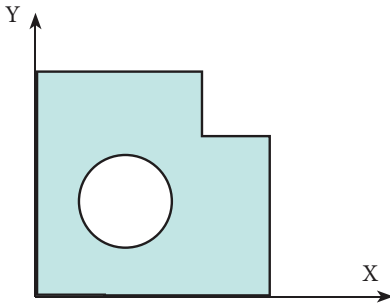
$$I_Y = I_{Y_G} + Ad_y^2 \Rightarrow I_Y = \frac{hb^3}{12} + (b.h)\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_Y = \frac{hb^3}{12} + \frac{hb^3}{4} \Rightarrow I_Y = \frac{hb^3 + 3hb^3}{12}$$

$$I_Y = \frac{4hb^3}{12} \Rightarrow I_Y = \frac{hb^3}{3}$$

۶-۷ محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب

برای محاسبه ممان اینرسی سطوح مرکب، آن‌ها را به اشکال هندسی ساده تجزیه نموده و ممان اینرسی هر یک را نسبت به محور مورد نظر محاسبه و با یکدیگر جمع جبری می‌نماییم.
شکل (۶-۷)



شکل ۶-۷

$$I_X = I_{X1} + I_{X2} - I_{X3}$$

$$I_Y = I_{Y1} + I_{Y2} - I_{Y3}$$

و به‌طور کلی خواهیم داشت:

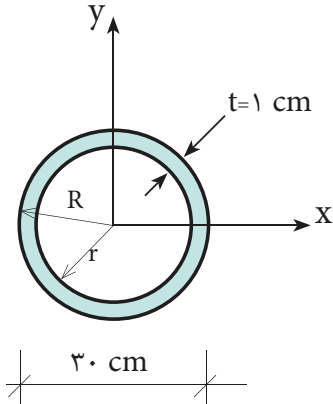
$$I_X = \sum_{i=1}^n I_{Xi} = \sum_{i=1}^n (I_{X_{Gi}} + A_i d_i^2)$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^n I_{Yi} = \sum_{i=1}^n (I_{Y_{Gi}} + A_i d_i^2)$$

(۶-۵)



در شکل زیر مطلوب است محاسبهٔ ممان اینرسی نسبت به محورهای x و y .



$$R = \frac{30}{2} = 15$$

$$r = R - t \Rightarrow r = 15 - 1 \Rightarrow r = 14 \text{ cm}$$

$$I_x = I_y = I_{\text{داخلی}} - I_{\text{خارجی}}$$

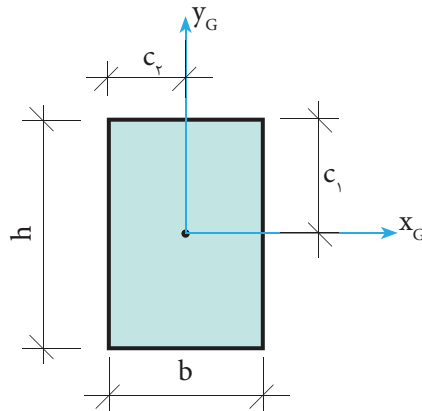
$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{4} (15^4 - 14^4)$$

$$I_x = I_y = 9588 / 93 \text{ cm}^4$$

۸-۶ مدول مقطع (اساس مقطع) (Section Modulus)

اساس مقطع یا مدول مقطع نیز خاصیتی از سطح است که همانند ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش می‌باشد که در فصل نهم با کاربرد آن آشنا خواهید شد. مدول مقطع یک سطح مطابق شکل (۸-۶) با رابطه زیر تعریف می‌شود.



شکل ۸-۶

$$S_{x_G} = \frac{I_{x_G}}{c_1}$$

(۶-۶)

در این رابطه داریم:

S_{x_G} : مدول مقطع یا اساس مقطع نسبت به محور x_G

I_{x_G} : ممان اینرسی سطح نسبت به محور x_G

C_1 : فاصله دورترین تار تحتانی یا فوقانی سطح نسبت به محور مرکزی (x_G) می باشد

که در مقاطع متقارن برابر نصف کل ارتفاع مقطع می باشد. یعنی:

$$c_1 = \frac{h}{2}$$

و برای محور y نیز رابطه‌ای مشابه رابطه (۶-۶) خواهیم داشت بنابراین:

$$S_{y_G} = \frac{I_{y_G}}{c_2} \quad (7-6)$$

S_{y_G} : مدول مقطع یا اساس مقطع نسبت به محور y_G

I_{y_G} : ممان اینرسی سطح نسبت به محور y_G

C_2 : فاصله دورترین تار سمت چپ یا راست مقطع نسبت به محور مرکزی (y_G)

می باشد که در مقاطع متقارن برابر نصف پهنای مقطع است. یعنی:

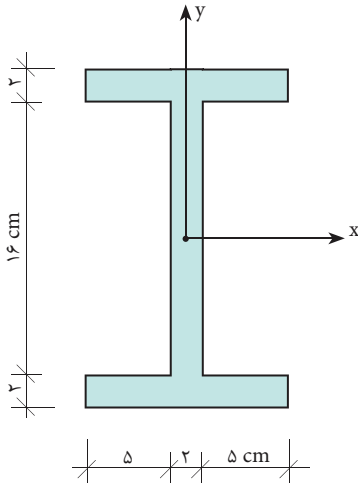
$$c_2 = \frac{b}{2}$$

مثال ۸

در شکل روبه رو مطلوب است:

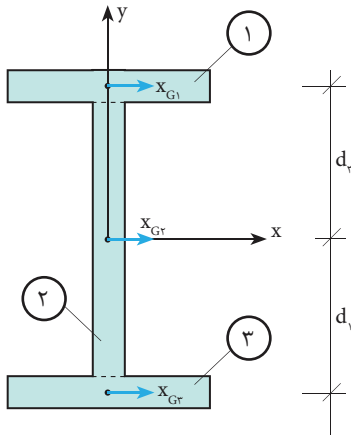
الف) محاسبه I_x

ب) محاسبه S_x



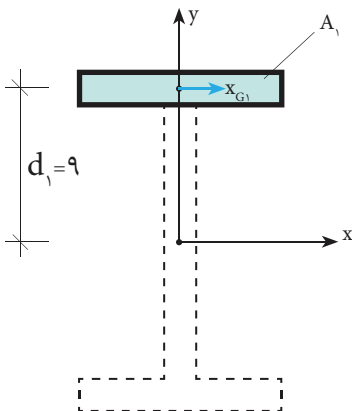
الف)

- ابتدا سطح مقطع را به سه سطح ۱، ۲ و ۳ تجزیه می کنیم.



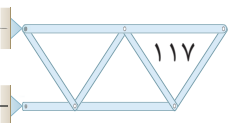
- به کمک قضیه محاورهای موازی ممان اینرسی هریک از سطوح را نسبت به محور x محاسبه می کنیم.

محاسبه I_{x_1} :

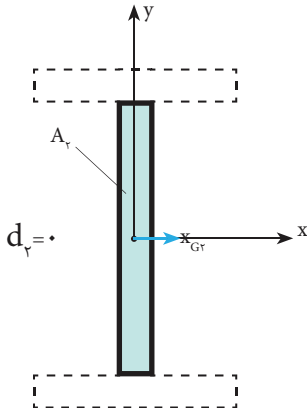


$$I_{x_1} = I_{x_{G_1}} + A_1 d_1^2$$

$$I_{x_1} = \frac{12 \times 2^3}{12} + (2 \times 12)(9)^2 = 1952 \text{ cm}^4$$



محاسبه I_{x_2} :

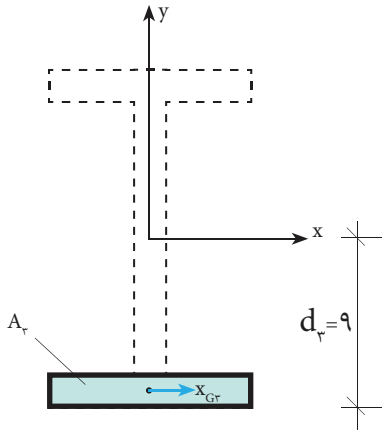


$$I_{x_r} = I_{x_{Gr}} + A_r d_r^2$$

$$I_{x_r} = \frac{2 \times 16^3}{12} + (2 \times 16)(0)^2$$

$$I_{x_r} = 682.67 \text{ cm}^4$$

محاسبه I_{x_3} :



به دلیل تقارن A_1 و A_r نسبت به محور x داریم:

$$I_{x_r} = I_{x_1} = 1952 \text{ cm}^4$$

ممان اینرسی کل مقطع برابر است با:

$$I_x = \sum_{i=1}^r I_{x_i} = I_{x_1} + I_{x_r} + I_{x_r}$$

$$I_x = 1952 + 682.67 + 1952$$

$$I_x = 4586.67 \text{ cm}^4$$

ب) از رابطه (۶-۶) مدول مقطع نسبت به محور x را به دست می آوریم.

به دلیل تقارن، مقطع C_1 برابر است با نصف کل ارتفاع مقطع یعنی:

$$c_1 = \frac{h}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$S_x = \frac{I_x}{c_1} \Rightarrow S_x = \frac{4586.67}{10}$$

$$S_x = 458.67 \text{ cm}^3$$

۶-۹ مشخصات هندسی مقاطع نوردشده

با توجه به این که مقاطع نوردشده با استانداردهای کارخانه سازنده تولید می‌شوند، لذا برای هر یک از مقاطع تولیدی شامل تیر آهن‌ها، ناودانی‌ها، نبشی‌ها و ... جداول مشخصات هندسی هر مقطع نیز ارائه می‌شود که با استفاده از این جداول مشخصات هندسی مقاطع نظیر ابعاد، سطح مقطع، ممان اینرسی و ... استخراج می‌شوند، به عنوان مثال شکل (۶-۷) قسمتی از جدول مشخصات مقاطع نیم پهن (IPE) را نشان می‌دهد که برای نمونه مشخصات هندسی IPE ۲۰۰ را از آن استخراج نموده‌ایم.

نیمرخ نیم پهن IPE

(C) IRANCIIVL.CENTR.COM

A = سطح مقطع

G = وزن واحد طول

I = ممان اینرسی

S = اساس مقطع

i = شعاع ژیراسیون

IPE	h	b	s	t	r	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	a_1	r_T
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	mm	mm
80	80	46	3.8	5.2	5	10.2	59	7.64	6	80.1	20	3.24	8.49	3.69	1.05	63	12.2
100	100	55	4.1	5.7	7	12.7	74	10.3	8.1	171	34.2	4.07	15.9	5.79	1.24	79	14.6
120	120	64	4.4	6.3	7	13.3	93	13.2	10.4	318	53	4.9	27.7	8.65	1.45	96	16.9
140	140	73	4.7	6.9	7	13.9	112	16.4	12.9	541	77.3	5.74	44.9	12.3	1.65	112	19.3
160	160	82	5	7.4	9	16.4	127	20.1	15.8	869	109	6.58	68.3	16.7	1.84	129	21.7
180	180	91	5.3	8	9	17	146	23.9	18.8	1320	146	7.42	101	22.2	2.06	145	24
200	200	100	5.6	8.5	12	20.5	159	28.5	22.4	1940	194	8.26	142	28.5	2.24	162	26.4
220	220	110	5.9	9.2	12	21.2	177	33.4	26.2	2770	252	9.11	205	37.3	2.48	179	29.1
240	240	120	6.2	9.8	15	24.8	190	39.1	30.7	3890	324	9.97	284	47.3	2.6	196	31.8
270	270	135	6.6	10.2	15	25.2	219	45.9	36.1	5790	429	11.2	420	62.2	3.02	220	35.6
300	300	150	7.1	10.7	15	25.7	248	53.8	42.2	8360	557	12.5	604	80.5	3.35	245	39.5
330	330	160	7.5	11.5	18	29.5	271	62.6	49.1	11770	713	13.7	788	98.5	3.55	270	42.1

مشخصات IPE ۲۰۰:

مساحت مقطع	$A = 28.5 \text{ cm}^2$	$h = 200 \text{ mm} = 20 \text{ cm}$ ارتفاع مقطع
ممان اینرسی حول محور x	$I_x = 1940 \text{ cm}^4$	$b = 100 \text{ mm} = 10 \text{ cm}$ عرض بال
اساس مقطع حول محور x	$S_x = 194 \text{ cm}^3$	$S = 5.6 \text{ mm} = 0.56 \text{ cm}$ ضخامت جان
ممان اینرسی حول محور y	$I_y = 142 \text{ cm}^4$	$t = 8.5 \text{ mm} = 0.85 \text{ cm}$ ضخامت بال
اساس مقطع حول محور y	$S_y = 28.5 \text{ cm}^3$	

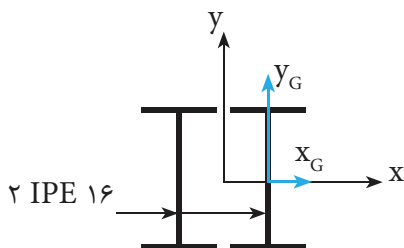
در صورتی که مقطع مورد نظر ترکیبی از دو یا چند مقطع نورد شده باشد می توان ابتدا مشخصات هندسی مقطع نورد شده ساده (تکی) را از جدول استخراج نموده و سپس با استفاده از قضیه محورهای موازی مشخصات هندسی مقطع مرکب را به دست آورد.

مثال ۹

در شکل زیر دو تیر آهن IPE ۱۶ به صورت به هم چسبیده به عنوان یک مقطع مرکب ساخته شده است مطلوب است محاسبه:

الف) ممان اینرسی مقطع مرکب حول X و Y .

ب) مدول مقطع حول دو محور X و Y .



ابتدا مشخصات هندسی مورد نیاز تیر آهن IPE ۱۶ را از جدول استخراج می نماییم.

$$\text{IPE ۱۶: } (h=160\text{ mm}=16\text{ cm}, b=82\text{ mm}=8/2\text{ cm}, A=20/1\text{ cm}^2, I_x=869\text{ cm}^4, I_y=68/3\text{ cm}^4)$$

الف) محاسبه I_x و I_y مقطع مرکب:

باتوجه به اینکه مقطع مرکب ساخته شده نسبت به محورهای X و Y متقارن می باشد کافی است که ممان اینرسی یک پروفیل نسبت به محورهای مورد نظر را محاسبه نموده و دو برابر نماییم. بنابراین با استفاده از قضیه محورهای موازی خواهیم داشت:

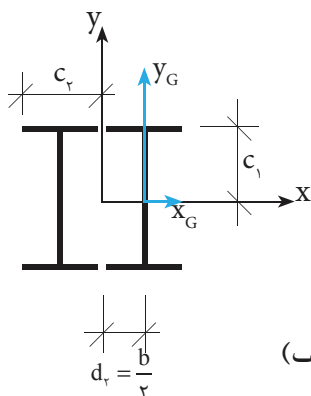
$$I_x = 2(I_{x_G} + Ad_{\perp}^2)$$

$$I_y = 2(I_{y_G} + Ad_{\parallel}^2)$$

باتوجه به شکل الف) مقدار d_{\perp} نسبت به محور X به دلیل انطباق محورهای X_G در پروفیل تک و X در پروفیل مرکب برابر صفر است لذا:

$$I_x = 2I_{x_G} \Rightarrow I_x = 2 \times 869 \Rightarrow \boxed{I_x = 1738\text{ cm}^4}$$

و مقدار d_r نسبت به محور Y برابر نصف عرض بال ۱۶ IPE می باشد یعنی:



(شکل الف)

$$d_r = \frac{b}{2} = \frac{8/2}{2} = 4/1 \text{ cm}$$

$$I_y = 2(I_y + Ad_r^2) = 2(68/3 + 20/1 \times 4/1^2) \Rightarrow$$

$$I_y = 812/36 \text{ cm}^4$$

$$c_y = \frac{h}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}$$

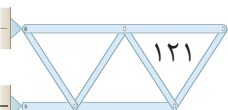
$$c_r = b = 8/2 \text{ cm}$$

$$S_x = \frac{I_x}{c_y} \Rightarrow S_x = \frac{1738}{8} = 217/25 \text{ cm}^3$$

$$S_y = \frac{I_y}{c_r} \Rightarrow S_y = \frac{812/36}{8/2} = 99/0.7 \text{ cm}^3$$

نکته:

با توجه به نتایج مثال ۹ و مقایسه آن با مشخصات هندسی ۱۶ IPE مشاهده می شود که: ممان اینرسی مقطع مرکب حول محور X دو برابر ممان اینرسی مقطع ساده (تکی) می باشد، به همین ترتیب اگر تعداد مقاطع n برابر شود و مرکز سطح آن ها بر محور X منطبق باشد، ممان اینرسی مقطع مرکب حول محور X نیز n برابر خواهد شد.



- گشتاور اول سطح نسبت به یک محور عبارت است از: حاصل ضرب مساحت، در فاصله مرکز آن تا آن محور مورد نظر و نسبت به محورهای X و Y به صورت زیر تعریف می شود:

$$Q_x = A \cdot \bar{Y}$$

$$Q_y = A \cdot \bar{X}$$

- گشتاور اول سطوح مرکب با تجزیه آن ها به سطوح ساده هندسی و محاسبه گشتاور اول سطح هر کدام نسبت به محورهای مورد نظر و جمع جبری آن ها محاسبه می شود. یعنی:

$$Q_x = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{y}_i$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \bar{x}_i$$

- مختصات مرکز سطح یک سطح هندسی با استفاده از گشتاور اول سطح و رابطه زیر تعیین می شود:

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$$

- اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد، مرکز سطح روی آن محور خواهد بود.
- اگر سطحی دارای دو محور تقارن باشد، مرکز سطح، محل تلاقی آن دو محور خواهد بود.
- ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش است.
- اگر تعداد مقاطع روی یک محور n برابر شود در صورتی که مرکز سطح آن ها روی آن محور قرار گیرد در این حالت ممان اینرسی کل نیز n برابر خواهد شد.
- ممان اینرسی یک سطح نسبت به محورهای موازی محور مرکزی آن با رابطه زیر تعیین می شود:

$$I_x = I_{x_G} + A d_y^2 \quad d_y: \text{فاصله دو محور } X \text{ و } x_G \text{ می باشد.}$$

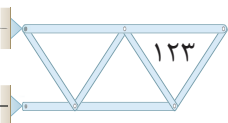
$$I_y = I_{y_G} + A d_x^2 \quad d_x: \text{فاصله دو محور } Y \text{ و } y_G \text{ می باشد.}$$

- اساس مقطع نیز همانند ممان اینرسی عامل مقاوم در مقابل خمش است و از رابطه زیر به دست می آید:

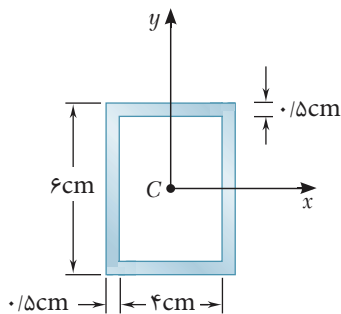
$$S_x = \frac{I_x}{c_x} \quad C_x: \text{فاصله دورترین تار مقطع تا محور } x$$

$$S_y = \frac{I_y}{c_y} \quad C_y: \text{فاصله دورترین تار مقطع تا محور } y$$

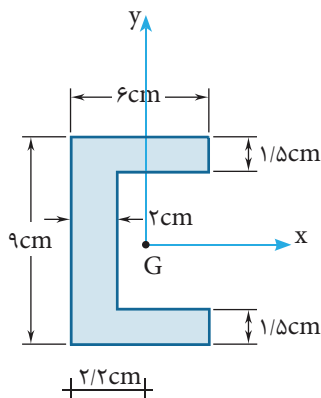
- مشخصات هندسی مقاطع نوردشده از جداول استاندارد آن‌ها استخراج می شود.
- ممان اینرسی مقاطع مرکب با استفاده از قضیه محوره‌های موازی محاسبه می شود.



۱- در هر مقطع مطلوب است محاسبه I_x و I_y و S_x و S_y .



(الف)



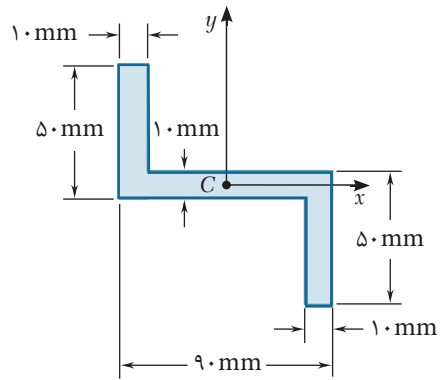
(ب)

۲- در هر کدام از مقاطع زیر مطلوب است محاسبه:

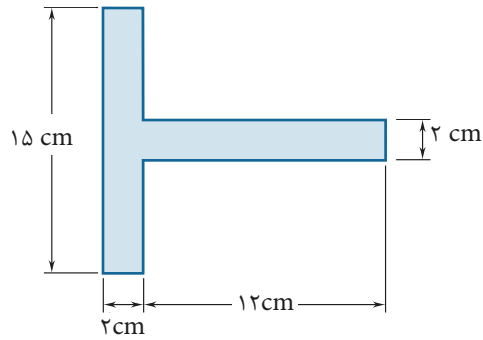
(الف) مختصات مرکز سطح

(ب) ممان اینرسی حول محورهای گذرنده از مرکز سطح

(ج) اساس مقطع نسبت به محورهای گذرنده از مرکز سطح.

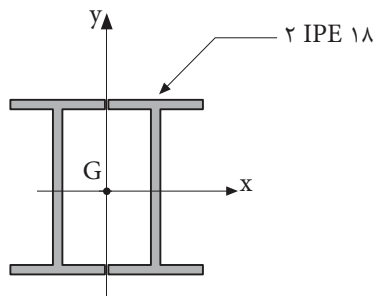


(الف)

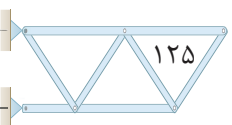


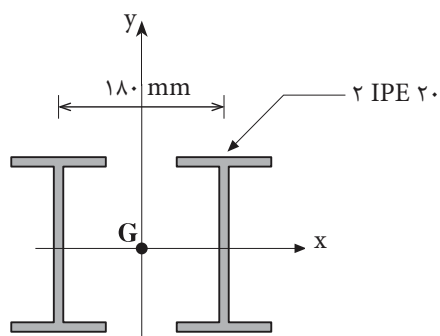
(ب)

۳- مطلوب است محاسبه I_x و I_y و S_x و S_y در مقاطع مرکب زیر.

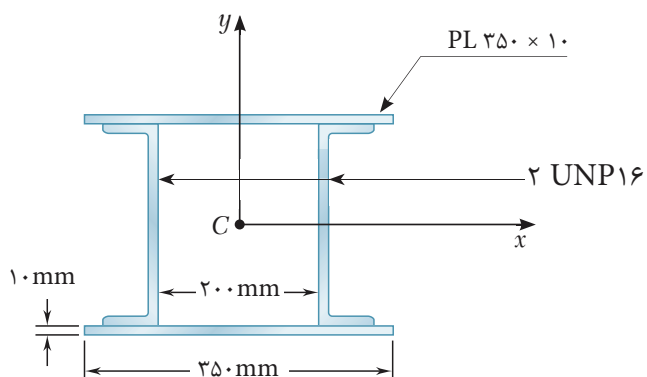


(الف)

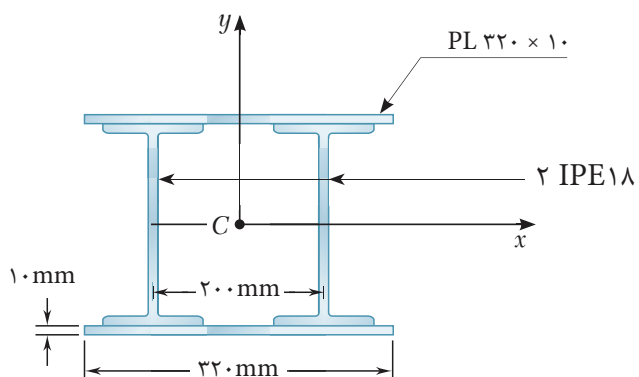




(ب)



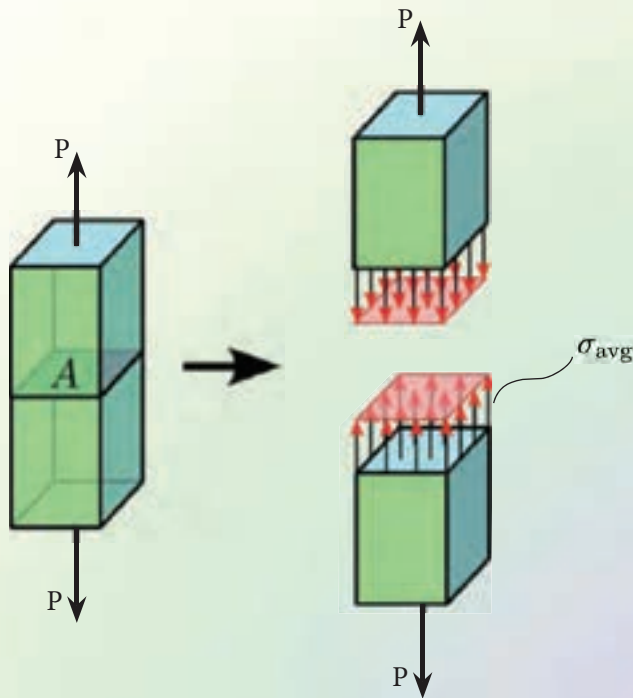
(ج)



(د)

فصل هفتم

نیرو و تنش محوری



- پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:
- ۱- انواع رفتار اجسام را تحت تأثیر بارهای مختلف نام ببرد.
 - ۲- نیروهای محوری را شرح دهد.
 - ۳- اثر نیروهای محوری را بر اجسام توضیح دهد.
 - ۴- تنش را تعریف نماید.
 - ۵- تنش محوری را تعریف نماید.
 - ۶- رابطه تنش محوری را به کار گیرد.
 - ۷- تغییر طول اجسام تحت تأثیر بارهای محوری را محاسبه نماید.

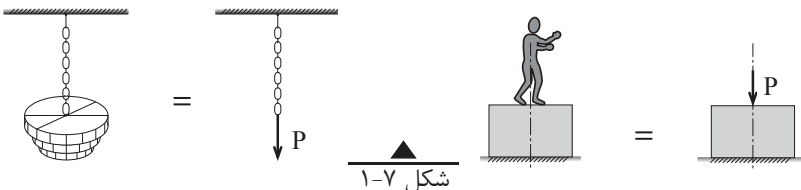
مقدمه:

در بخش اول کتاب به بررسی نیروهای وارد بر اجسام پرداختیم و اجسام را صلب در نظر گرفتیم بدین مفهوم که جسم در اثر اعمال نیرو تغییر شکل نمی‌دهد که موضوع بحث استاتیک بود.

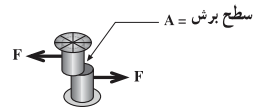
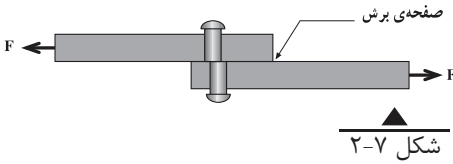
در این بخش می‌خواهیم اثر نیروها را بر اجسام، بیشتر مورد بررسی قرار داده و رفتار آن‌ها را تحت تأثیر نیروهای مختلف تجزیه و تحلیل نماییم، که با این فرض که جسم صلب نباشد، یعنی تغییر شکل اجسام نیز مد نظر می‌باشد، که موضوع بحث مقاومت مصالح است. بنابراین مقاومت مصالح شاخه‌ای از علم مکانیک است که رفتار اجسام جامد را تحت بارگذاری‌های مختلف بررسی می‌نماید.

رفتار اجسام تحت بارهای مختلف عبارتند از :

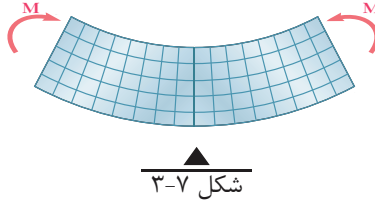
۱- رفتار کششی و فشاری



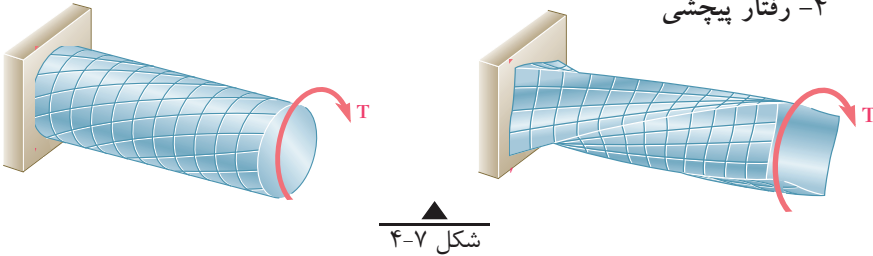
۲- رفتار برشی



۳- رفتار خمشی



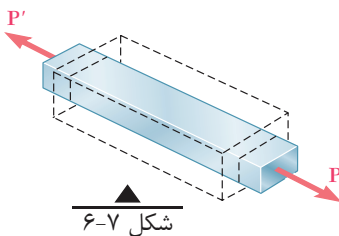
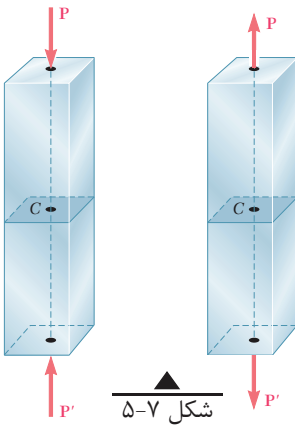
۴- رفتار پیچشی



۱-۷ نیروهای محوری (Axial Load)

نیروهای محوری، نیروهایی هستند که در امتداد محور طولی اجسام و عمود بر سطح مقطع آنها وارد می‌شوند. شکل (۵-۷) نیروهای محوری می‌توانند به صورت کششی یا فشاری به اجسام وارد شوند و در آن‌ها افزایش یا کاهش طول ایجاد نمایند.

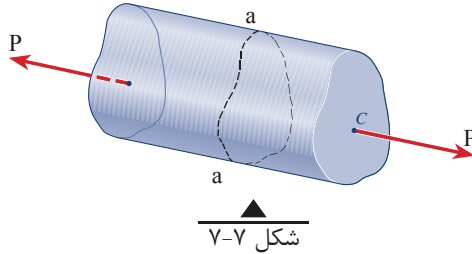
همان‌طور که در شکل (۶-۷) دیده می‌شود، بارهای محوری ضمن افزایش یا کاهش طول، سبب کاهش یا افزایش ابعاد دیگر جسم نیز می‌شوند که در این فصل تنها به بررسی رفتار طولی آنها می‌پردازیم.



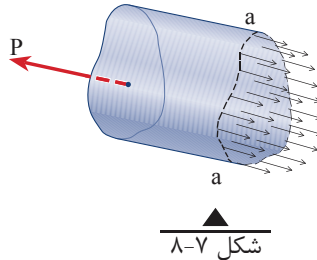
۲-۷ تنش محوری (Axial Stress)

میله منشوری مطابق شکل (۷-۷) را در نظر بگیرید که تحت تاثیر نیروی کششی P واقع شده است.

به نظر شما اثر نیروی P در یک مقطع دلخواه مانند (a-a) به چه صورت خواهد بود؟



در پاسخ به این سوال باید این طور تصور نمود که هر ذره جسم در مقطع (a-a) مقداری از نیروی P را تحمل می نماید و اثر این نیرو در مقطع (a-a)، مطابق شکل (۷-۸)، به صورت نیروهای گسترده دیده می شود.



به این نیروهای گسترده موجود در سطح مقطع (a-a) تنش گفته می شود. بنابراین می توان گفت:

«نیروی وارد به واحد سطح، تنش نامیده می شود»

چنانچه نیروی وارده نیروی محوری باشد، تنش ایجاد شده را تنش محوری نامیده و با رابطه زیر تعریف می شود.

$$\sigma = \frac{\pm P}{A} \quad (۷-۱)$$

σ : تنش محوری (فشاری یا کششی)

P : نیروی محوری (کششی با علامت + و فشاری با علامت -)

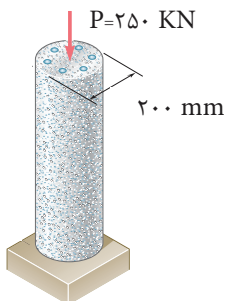
A : سطح مقطع

واحد تنش در سیستم SI با توجه به رابطه آن، $\frac{N}{m^2}$ (پاسکال Pa) می باشد و بهتر است به منظور هماهنگی با آئین نامه ها در محاسبات از واحد $\frac{N}{mm^2}$ (مگاپاسکال MPa) استفاده شود.

نکته:

اگر نیروی محوری (P) کششی باشد تنش ایجاد شده تنش کششی خواهد بود و σ مثبت می باشد.
اگر نیروی محوری (P) فشاری باشد تنش ایجاد شده تنش فشاری خواهد بود و σ منفی می باشد.

مثال ۱



ستونی کوتاه مطابق شکل روبه رو تحت تاثیر نیروی محوری $P = 250 \text{ kN}$ قرار دارد.
مطلوب است محاسبه تنش در پای ستون (از وزن ستون صرف نظر شود).

حل:

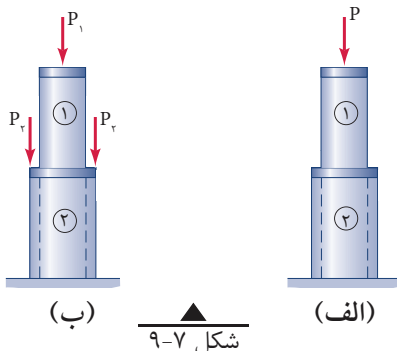
نیروی P فشاری است: $P = -250 \text{ kN} = -250 \times 1000 = -250000 \text{ N}$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 200^2}{4} = 31400 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{-250000}{31400} \Rightarrow \sigma = -7.96 \frac{N}{mm^2} \text{ یا } \text{MPa}$$

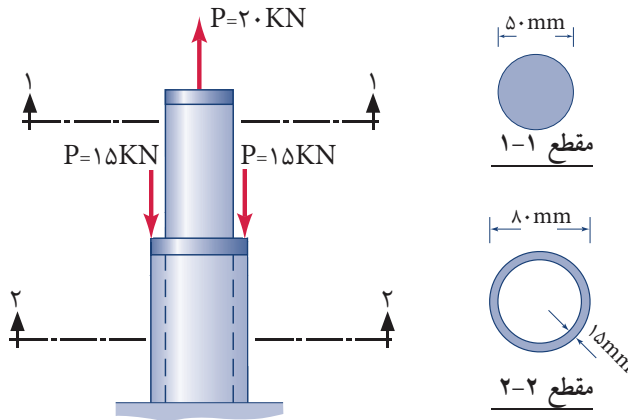
علامت منفی نشانگر آن است که تنش محوری ایجاد شده فشاری می باشد.

در صورتی که جسم دارای مقطع متفاوت باشد (شکل ۷-۹-الف) و یا بارگذاری در نقاط مختلف آن انجام شود (شکل ۷-۹-ب) تنش در هر قسمت از جسم متفاوت بوده و باید نیرو و مساحت هر قسمت را جداگانه تعیین و از رابطه (۷-۱) تنش را در هر قسمت محاسبه نمود.



مثال ۲

جسمی مطابق شکل تحت تأثیر نیروهای نشان داده شده قرار دارد. مطلوب است محاسبهٔ تنش در هر قسمت از جسم.



حل:

الف) تنش در مقطع ۱-۱

$$\begin{cases} P = 20 \text{ kN} = 20000 \text{ N} \\ A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3/14 \times 50^2}{4} = 1962/5 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{20000}{1962/5} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = 10/19 \text{ MPa} \text{ کششی}}$$

ب) تنش در مقطع ۲-۲

با توجه به شکل برآیند نیروهای وارد به مقطع (۲-۲) برابر است با:

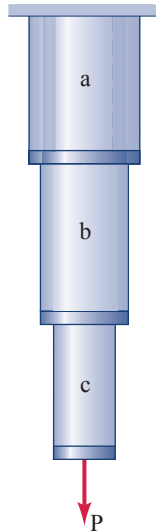
$$\begin{cases} P = -15 - 15 + 20 = -10 \text{ kN} = -10000 \text{ N} \\ A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3/14 \times 80^2}{4} - \frac{3/14 \times 15^2}{4} = 3061/5 \text{ mm}^2 \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{A} = \frac{-10000}{3061/5} \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = -3/27 \text{ MPa} \text{ فشاری}}$$



مثال ۳

قطعه پیوسته ای مطابق شکل تحت تاثیر نیروی کششی P قرار گرفته است، هرگاه نیروی P را به آرامی افزایش دهیم، احتمال گسیختگی در کدام یک از نواحی a و b و c بیشتر است؟ چرا؟

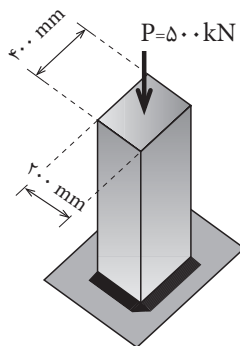


جواب:

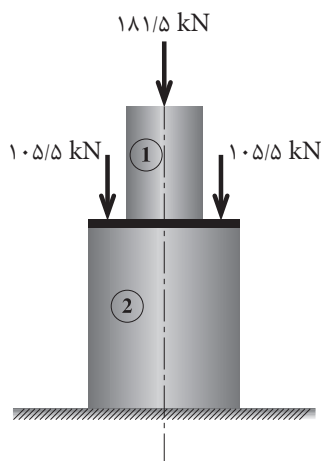
با توجه به این که مقدار P در هر سه ناحیه ثابت است، با افزایش تدریجی نیروی P مطابق رابطه $\sigma = \frac{\pm P}{A}$ مقدار تنش در ناحیه c به دلیل سطح مقطع کوچک تر آن نسبت به نواحی a و b زودتر به تنشی می رسد که جسم دیگر قادر به تحمل آن نمی باشد.

۱- لوستری به وزن 50 kN از کابلی به قطر 30 میلی متر آویزان است. مطلوب است محاسبه تنش محوری کابل.

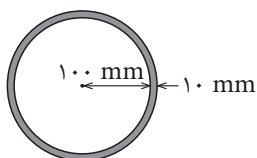
۲- ستونی مطابق شکل زیر تحت تأثیر بار محوری 500 کیلو نیوتن قرار دارد. مطلوب است محاسبه تنش در پای ستون (از وزن ستون صرف نظر شود).



۳- ستونی از جنس بتن با مقطع دایره مطابق شکل تحت تأثیر سه نیرو قرار دارد. مطلوب است محاسبه قطر هر یک از دو عضو فوقانی و تحتانی، در صورتی که خواسته باشیم تنش در هر عضو از 8 MPa تجاوز نکند (از وزن اعضا صرف نظر شود).



۴- باری محوری برابر 600 kN بر ستونی فلزی از لوله با ضخامت جداره 10 mm و قطر داخلی 200 mm اثر می کند. مطلوب است محاسبه تنش فشاری در ستون.



۵- نیرویی برابر 1000 kN بر یک صفحه کف ستون (Base Plate) وارد می شود. اگر تنش زیر صفحه 5 MPa باشد، مطلوب است محاسبه ابعاد کف ستون در صورتی که، صفحه کف ستون:

الف) مربع باشد

ب) نسبت طول به عرض آن $1/5$ باشد

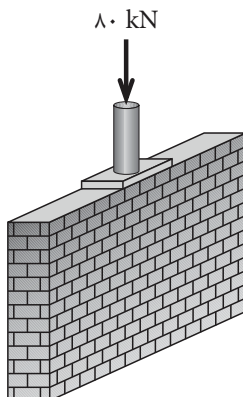
ج) دایره باشد.

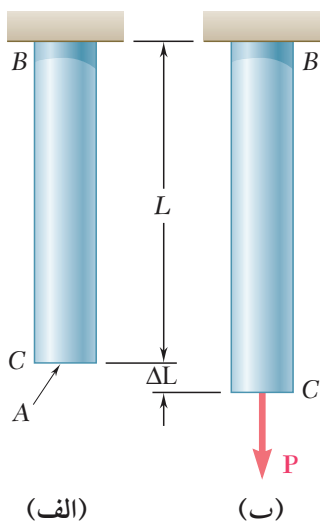
۶- یک ستونک فلزی به قطر 100 mm نیرویی برابر 80 kN را مطابق شکل به وسیله صفحه کف ستون بر روی دیواری به ضخامت 200 mm وارد می کند. در صورتی که در نظر باشد تنش در زیر صفحه، حداکثر به 1 MPa محدود شود، مطلوب است محاسبه:

الف) ابعاد صفحه کف ستون؛

ب) تنش در مقطع ستونک؛

ج) تنش در زیر دیوار در صورتی که طول دیوار 1 m باشد (از وزن دیوار صرف نظر شود).





شکل ۱۰-۷

میله BC به طول L و سطح مقطع A مطابق شکل (۱۰-۷-الف) مفروض است. اگر نیروی کششی P به آن وارد شود، سبب افزایش طول میله به اندازه (ΔL) خواهد شد که مقدار آن از رابطه زیر تعیین می شود. شکل (۱۰-۷-ب)

$$\Delta L = \frac{P L}{A E} \quad (۲-۷)$$

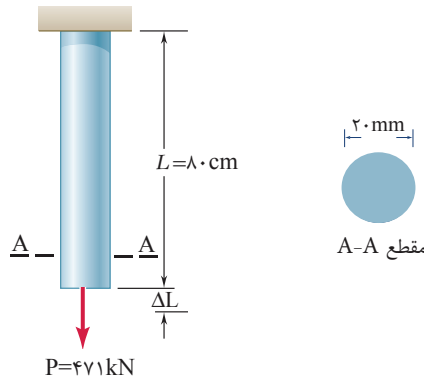
در این رابطه E ضریب ارتجاعی (مدول الاستیسیته) جسم می باشد که به جنس آن بستگی دارد و در آزمایشگاه مقاومت مصالح مقدار آن تعیین می شود و واحد آن نیز همان واحد تنش یعنی $\frac{N}{mm^2}$ و یا (MPa) است.

در جدول (۱-۷) ضریب ارتجاعی بعضی از مصالح آورده شده است.

جدول (۱-۷) ضریب ارتجاعی مصالح	
ضریب ارتجاعی $\frac{N}{mm^2}$ یا MPa	مصالح
2×10^5	فولاد
$1/2 \times 10^5$	چدن
0.7×10^5	آلومینیوم
1×10^5	مس

مثال ۴

مطلوب است تغییر طول میله فولادی مطابق شکل زیر؛ اگر ضریب ارتجاعی میله $E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ باشد (از وزن میله صرف نظر می شود).



$$P = 471 \text{ kN} = 471,000 \text{ N}$$

$$L = 80 \text{ cm} = 800 \text{ mm}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3.14 \times 20^2}{4} = 314 \text{ mm}^2$$

$$E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\Delta L = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} = \frac{471,000 \times 800}{314 \times 2 \times 10^5} \Rightarrow \boxed{\Delta L = 6 \text{ mm}}$$

نکته:

اگر در شکل (۲-۷) نیروی P فشاری باشد، این نیرو سبب کاهش طول میله می گردد که مقدار آن از همان رابطه (۲-۷) محاسبه می شود.

چنانچه جسم دارای مقطع و یا جنس یکنواخت نباشد و یا بارگذاری در نقاط مختلف انجام شود در این صورت آن را به بخش های مختلف تقسیم نموده و تغییر طول هر بخش را مطابق رابطه (۲-۷) محاسبه می کنیم و برای محاسبه تغییر طول نهایی جسم آن ها را با یکدیگر جمع جبری می نماییم یعنی:

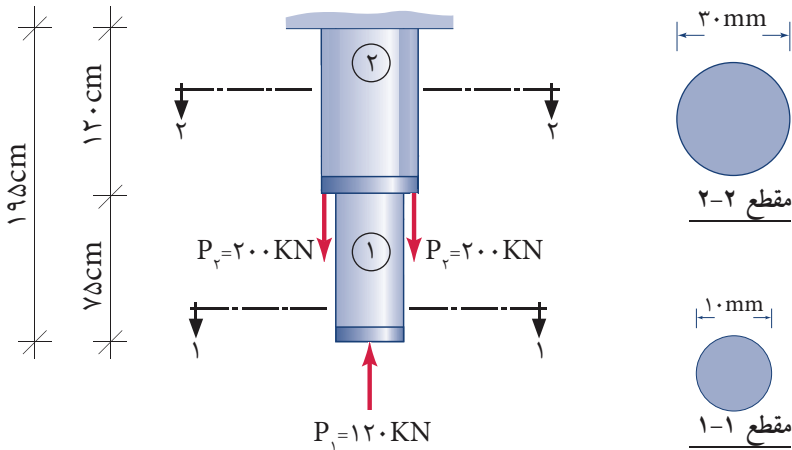


$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \quad (3-7)$$

مثال ۵

تغییر طول کلی جسم فولادی مطابق شکل زیر را محاسبه کنید.

$$(E = 2 \times 10^5 \frac{N}{mm^2})$$



حل:

تغییر طول کلی جسم برابر است با جمع جبری تغییر طول هر یک از قطعات ۱ و ۲

یعنی:

$$\Delta L_t = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

الف) تغییر طول قطعه شماره ۱:

$$P_1 = -120 \text{ KN} = -120000 \text{ N} \quad \text{نیروی } P \text{ فشاری می باشد.}$$

$$L_1 = 75 \text{ cm} = 750 \text{ mm}$$

$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{3/14 \times 10^2}{4} = 78.5 \text{ mm}^2$$

$$E = 2 \times 10^5 \frac{N}{mm^2}$$

$$\Delta L_1 = \frac{P_1 \cdot L_1}{A_1 \cdot E_1} = \frac{-120000 \times 750}{78.5 \times 2 \times 10^5}$$

$$\Delta L_1 = -5/73 \text{ mm}$$

با توجه به علامت منفی، طول قطعه ۱ کاهش می یابد.

ب) تغییر طول قطعه شماره ۲: $P_r = 200 + 200 - 120 = 280 \text{ KN} = 280,000 \text{ N}$

$$L_r = 120 \text{ cm} = 1200 \text{ mm}$$

$$A_r = \frac{\pi D_r^2}{4} = \frac{3/14 \times 30^2}{4} = 706/5 \text{ mm}^2$$

$$E = 2 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\Delta L_r = \frac{P_r L_r}{A_r E_r} = \frac{280,000 \times 1200}{706/5 \times 2 \times 10^5}$$

$$\Delta L_r = 2/38 \text{ mm}$$

افزایش طول قطعه ۲

تغییر طول کلی جسم برابر است با:

$$\Delta L_t = \Delta L_1 + \Delta L_r = -5/73 + 2/38 \Rightarrow \Delta L_t = -3/35 \text{ mm}$$

با توجه به علامت منفی، طول کل جسم کاهش می یابد.

خلاصه فصل

• اجسام تحت تأثیر نیروهای مختلف، رفتارهای متفاوتی مانند رفتار کششی، فشاری، برشی و ... از خود نشان می دهند.

• نیروی محوری نیرویی است که در امتداد محور طولی اجسام و عمود بر سطح مقطع آنها وارد می شود.

• نیروی وارد به واحد سطح را تنش می نامند.

• تنش محوری با رابطه $\sigma = \frac{\pm P}{A}$ تعریف می شود و بر سطح مقطع جسم عمود است.

• واحد تنش در سیستم SI عبارت است از $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$

• نیروهای محوری در اجسام، کاهش یا افزایش طول ایجاد می نمایند که از رابطه زیر به دست می آید:

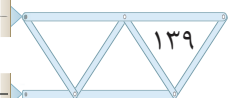
$$\Delta L = \frac{P L}{A E}$$

• تغییر طول کلی اجسام از رابطه زیر به دست می آید:

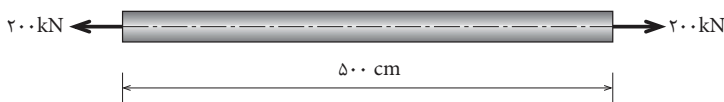
$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

• ضریب ارتجاعی یا مدول الاستیسیته اجسام به جنس آنها بستگی داشته و با نماد E

نمایش داده می شود و واحد آن، واحد تنش یعنی $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ یا MPa می باشد.

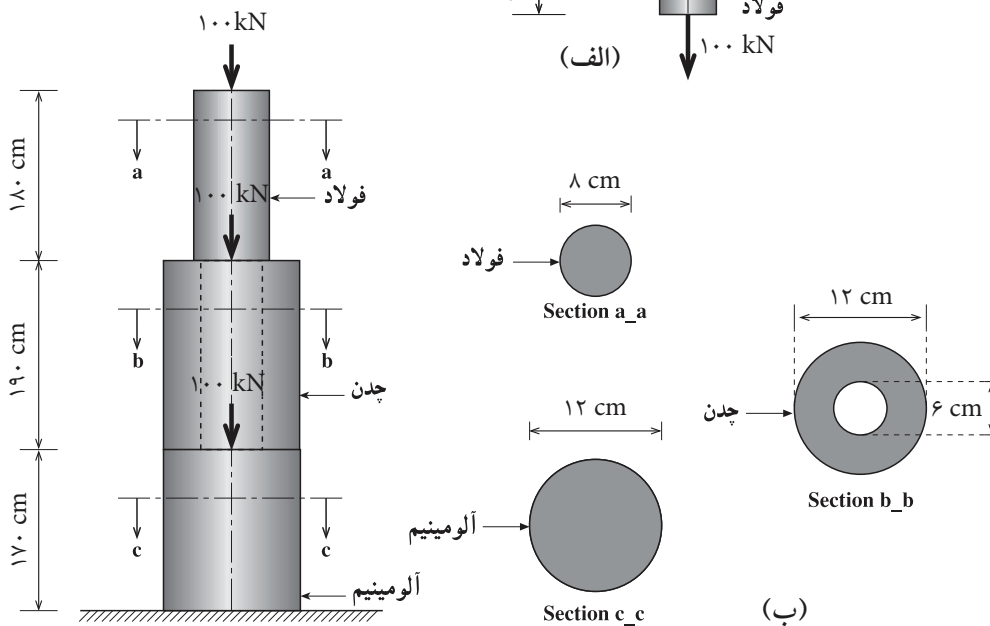
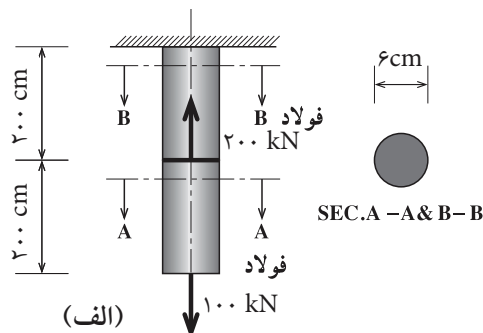


۱- در شکل زیر اگر مقطع میله دایره‌ای به قطر d و جنس آن از فولاد باشد و خواسته باشیم $\Delta L = 1/592 \text{ cm}$ باشد، مطلوب است محاسبه قطر میله (d) . $(E = 2 \times 10^5 \text{ MPa})$

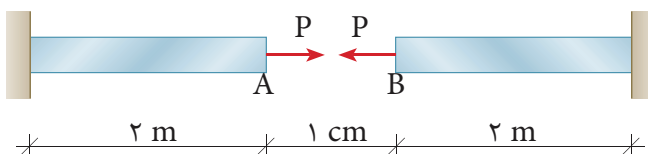


۲- در شکل‌های زیر تغییر طول نهایی هر کدام را محاسبه کنید.

مقادیر مدول الاستیسیته را از جدول (۱-۷) استخراج نمایید



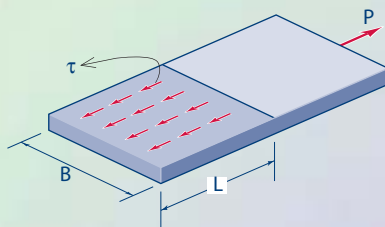
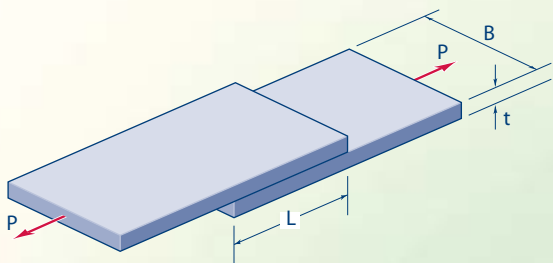
۳- در شکل زیر چه مقدار نیروی P به انتهای میله‌ها وارد شود تا نقاط A و B به هم برسند؟



قطر میله‌ها ۲۰ میلی‌متر و مدول الاستیسیته آن‌ها $2 \times 10^5 \text{ MPa}$ می‌باشد.

فصل هشتم

نیرو و تنش برشی



پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

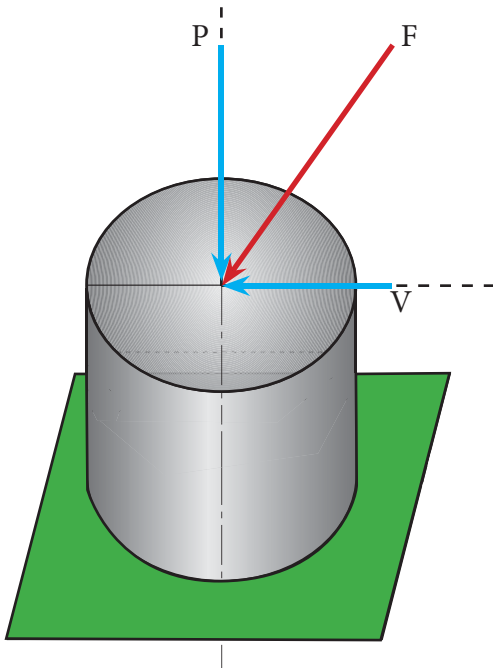
- ۱- نیروی برشی (مماسی) را تعریف کند.
- ۲- تنش برشی را تعریف نماید و رابطه آن را به کار گیرد.
- ۳- رفتار اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ را بررسی نماید.
- ۴- تنش کششی ماکزیمم در اتصالات برشی ساده را محاسبه نماید.
- ۵- تنش لهیدگی را در اتصالات برشی ساده محاسبه کند.
- ۶- تنش برشی در پیچ‌ها و یا پرچ‌ها را به دست آورد.
- ۷- گسیختگی برشی ورق‌ها را کنترل نماید.

۱-۸ نیروی برشی (مماسی)

نیروی مماس بر سطح مقطع اجسام را نیروی برشی (مماسی) می‌نامیم.

در شکل (۱-۸) نیروی F به سطح مقطع A وارد می‌شود.

اگر نیروی F را به دو مؤلفه متعامد تجزیه نماییم، مؤلفه افقی آن (V) بر سطح مقطع مماس می‌باشد. بنابراین نیروی برشی محسوب می‌شود و مؤلفه قائم (P) بر سطح مقطع عمود بوده و لذا نیروی محوری محسوب می‌گردد.



شکل ۱-۸

۲-۸ تنش های برشی (مماسی) (Shear Stress)

نیروی برشی سبب ایجاد تنش برشی در سطح مقطع اجسام می گردد. شکل (۲-۸-الف) دو صفحه را نشان می دهد که به وسیله چسب به یکدیگر متصل شده اند و نیروی P تنش برشی در محل اتصال دو صفحه مطابق شکل (۲-۸-ب) ایجاد می نماید.

تنش برشی (مماسی)

نیروی برشی (مماسی) وارد به واحد سطح را تنش برشی گویند

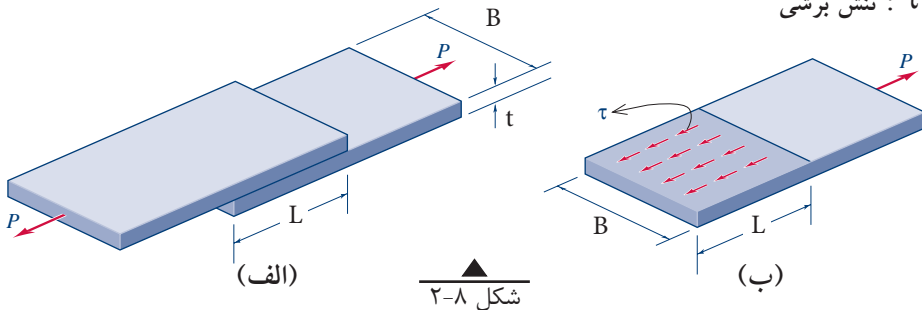
و با نماد (τ) نمایش داده می شود و رابطه آن به صورت زیر است:

$$\tau = \frac{V}{A} \quad (۱-۸)$$

V : نیروی برشی که در شکل (۲-۸) همان نیروی P می باشد.

A : سطح مقطع جسم (که در این جا سطح تماس بین دو صفحه می باشد $A=L.B$)

τ : تنش برشی



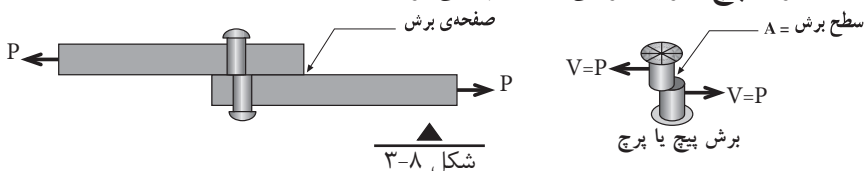
شکل ۲-۸

نیروی برشی در اکثر سازه های ساختمانی به صورت های مختلف وجود دارد و به دلیل گستردگی و پیچیدگی موضوع در اینجا تنها جهت آشنایی با رفتار برشی اعضای ساختمانی به بررسی اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ می پردازیم.



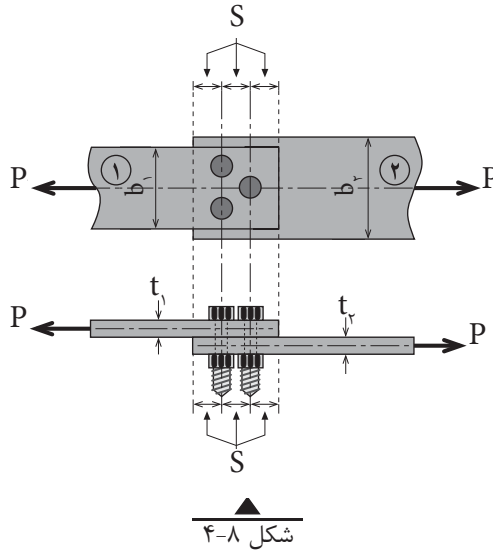
در شکل (۳-۸) دو ورق با مشخصات نشان داده شده توسط یک پیچ به قطر d به یکدیگر متصل شده اند و تحت تاثیر نیروی کششی P قرار دارند. باتوجه به شکل (۳-۸) ملاحظه می شود که نیروی P در ورق ها ایجاد کشش نموده و در پیچ ها ایجاد برش می نماید. لذا

نیروی P برای پیچ، نیروی برشی محسوب می گردد.



شکل ۳-۸

با توجه به شکل (۴-۸) به بررسی رفتارهای مختلف این نوع اتصالات می‌پردازیم:



شکل ۴-۸

۳-۸-۱- تنش کششی حداکثر ایجاد شده در ورق‌ها

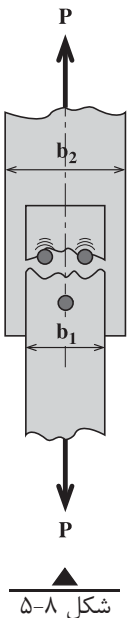
با توجه به رابطه $(\sigma = \frac{P}{A})$ تنش محوری یا قائم ورق‌ها وقتی به حداکثر می‌رسد که سطح مقطع کاهش یابد لذا در محل پیچ یا پرچ به دلیل وجود سوراخ‌ها، سطح مقطع ورق ضعیف شده و تنش حداکثر در آن مقطع ایجاد می‌شود و امکان گسیختگی در این مقطع وجود دارد و مطابق شکل خواهیم داشت: شکل (۵-۸)

$$A = (b - nd)t \quad (۲-۸)$$

بنابراین برای تعیین کمترین سطح مقطع ورق‌ها (A_{min}) لازم است مقاطع مختلفی در طول اتصال در نظر گرفته و سطح مقطع هرکدام را محاسبه نموده و کمترین آن‌ها را در رابطه $\sigma = \frac{P}{A}$ قرار دهیم تا مقدار

حداکثر تنش کششی تعیین شود. در رابطه (۲-۸) تعداد پیچ‌ها در مقطع مورد نظر و d قطر پیچ‌ها یا پرچ‌ها، b عرض و t ضخامت صفحه‌ها می‌باشد.

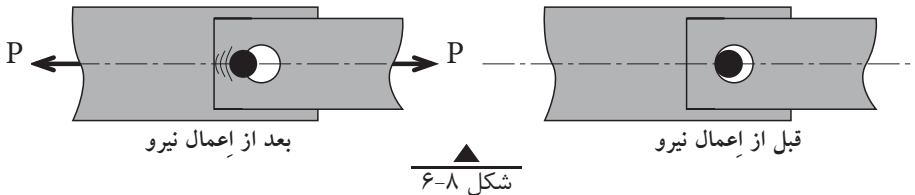
۱- باید توجه داشت که در این گونه اتصالات ممکن است مقاطع دیگری وجود داشته باشند که تنش کششی حداکثر در آن‌ها ایجاد می‌شود که در مقاطع بالاتر با آن‌ها آشنا خواهید شد.



شکل ۵-۸

۸-۳-۲- تنش لهیدگی

نیروی کششی اعمال شده در اتصال شکل (۸-۶) در محل سوراخ‌ها به جداری ورق‌ها توسط پیچ فشار وارد می‌آورد که باعث لهیدگی سطح تماس آن‌ها می‌شود و تنش حاصل، تنش لهیدگی نامیده می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید.



$$\sigma_b = \frac{P}{Ndt} \quad (۸-۳)$$

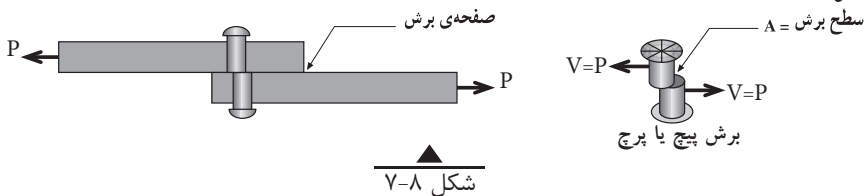
بدیهی است که تنش لهیدگی حداکثر ($\sigma = b_{\max}$) در صفحه‌ای ایجاد می‌شود که کمترین ضخامت (t_{\min}) را داشته باشد. یعنی:

$$\sigma_{b\max} = \frac{P}{Ndt_{\min}} \quad (۸-۴)$$

در روابط (۸-۳) و (۸-۴)، N تعداد کل پیچ‌ها یا پرچ‌های اتصال می‌باشد.

۸-۳-۳- تنش برشی در پیچ‌ها یا پرچ‌ها

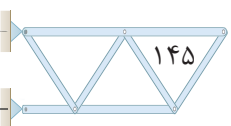
باتوجه به تعریف نیروی برشی (مماسی)، نیروی کششی P در اتصال شکل (۸-۷) بر سطح مقطع پیچ‌ها یا پرچ‌ها مماس بوده بنابراین نیروی برشی برای پیچ‌ها یا پرچ‌ها محسوب می‌شود:



لذا باتوجه به رابطه تنش برشی داریم:

$$\tau = \frac{P}{NA} \quad (۸-۵)$$

در این رابطه N تعداد کل پیچ‌ها یا پرچ‌ها و A سطح مقطع یکی از آن‌ها می‌باشد.



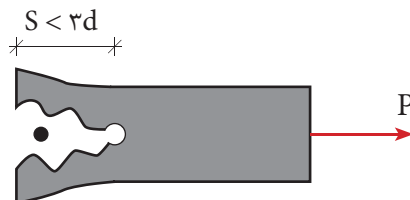
۸-۳-۴- گسیختگی برشی ورق

هرگاه فاصله مراکز سوراخ‌ها از یکدیگر و یا از لبه‌های ورق، از حد معینی کمتر باشد، امکان پارگی ورق مطابق شکل (۸-۸) وجود دارد.

لذا بر اساس آیین‌نامه باید فاصله مرکز تا مرکز سوراخ‌ها و همچنین مرکز سوراخ‌ها تا لبه‌های ورق از سه برابر قطر پیچ کمتر نباشد. یعنی:

$$S \geq 3d$$

(۸-۶)



شکل ۸-۸

مثال ۱

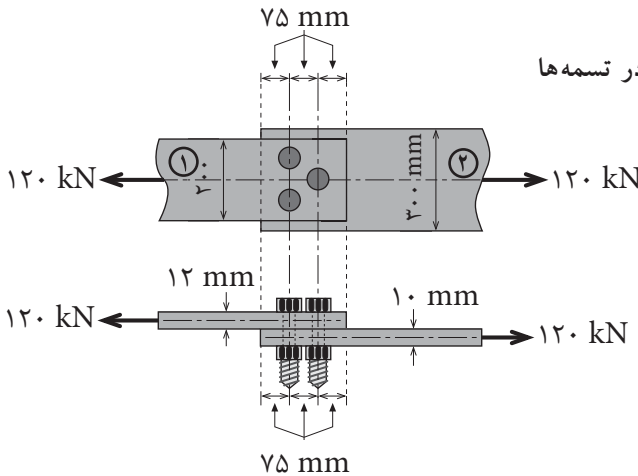
دو تسمه توسط سه پیچ هر یک به قطر ۲۰ میلی‌متر مطابق شکل به هم متصل شده‌اند. مطلوب است محاسبه:

الف) تنش کششی حداکثر در هر تسمه

ب) تنش برشی پیچ‌ها

ج) تنش لهیدگی ماکزیمم در تسمه‌ها

د) کنترل پارگی برشی



الف) سطح مقطع هر تسمه را در مقطعی که بیشترین پیچ‌ها در آن وجود دارند محاسبه سپس تنش را در هر تسمه به دست می‌آوریم:

تسمه ۱

$$A_{\min} = (b_1 - nd)t_1 \Rightarrow A_{\min} = (200 - 2 \times 20)12$$

$$A_{\min} = 1920 \text{ mm}^2$$

تنش

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_{\min}} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{120 \times 10^3}{1920}$$

$$\sigma_1 = 62/5 \text{ MPa}$$

تنش حداکثر در تسمه شماره (۱)

تسمه ۲

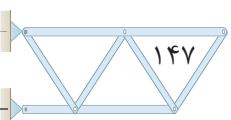
$$A_{\min} = (b - nd)t \Rightarrow A_{\min} = (300 - 2 \times 20)10$$

$$A_{\min} = 2600 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{A_{\min}} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{120 \times 10^3}{2600}$$

$$\sigma_2 = 46/15 \text{ MPa}$$

تنش حداکثر در تسمه شماره (۲)



ب) تنش برشی در پیچ‌ها:

$$\tau = \frac{P}{NA} \Rightarrow \tau = \frac{120 \times 10^3}{3 \times \left(\frac{\pi}{4} \times 20^2\right)} \Rightarrow \boxed{\tau = 127/39 \text{ MPa}}$$

ج) تنش لهیدگی ماکزیمم در تسمه ۲ به وجود می‌آید. چون دارای ضخامت کمتری نسبت به تسمه شماره ۱ می‌باشد.

$$\sigma_{b\max} = \frac{P}{Ndt_{\min}} \Rightarrow \sigma_b = \frac{120 \times 10^3}{3 \times (20 \times 10)} \Rightarrow \boxed{\sigma_b = 200 \text{ MPa}}$$

د) کنترل پارگی برشی:

برای جلوگیری از پارگی تسمه باید:

$$S \geq 3d \Rightarrow 75 \geq 3 \times 20 \Rightarrow 75 > 60 \quad \text{قابل قبول}$$

خلاصه فصل

- نیروی برشی یا مماسی به نیرویی گفته می‌شود که بر سطح مقطع جسم مماس باشد.
- تنش برشی از رابطه $\tau = \frac{V}{A}$ محاسبه می‌شود.
- اتصالات برشی ساده با پیچ یا پرچ، در حالات زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند:

(۱) تنش کششی ایجاد شده در تسمه‌ها در مقطع ضعیف‌شده برابر است با:

$$\sigma = \frac{P}{(b - nd)t}$$

(۲) تنش لهیدگی حداکثر در محل سوراخ‌ها و در تسمه نازک‌تر ایجاد می‌شود. یعنی:

$$\sigma_{b\max} = \frac{P}{Ndt_{\min}}$$

(۳) تنش برشی در پیچ‌ها یا پرچ‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tau = \frac{P}{NA} \quad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

(۴) به منظور جلوگیری از گسیختگی برشی تسمه‌ها باید فاصله سوراخ‌ها از یکدیگر و از لبه ورق‌ها از سه برابر قطر پیچ یا پرچ کمتر نباشد. یعنی:

$$S \geq 3d$$

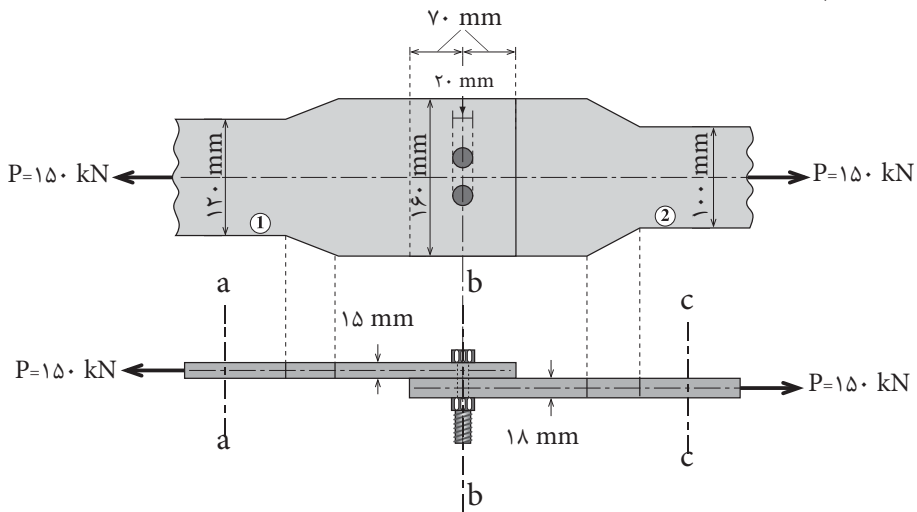
۱- در شکل زیر مطلوب است محاسبه

الف) تنش کششی در مقاطع a-a و b-b و c-c

ب) تنش برشی پیچ‌ها

ج) تنش لهیدگی ماکزیمم

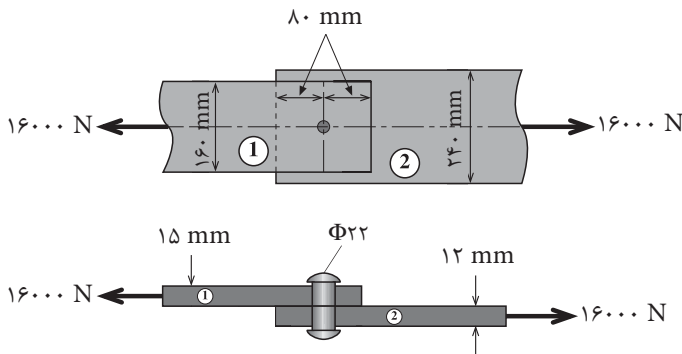
د) کنترل پارگی برشی

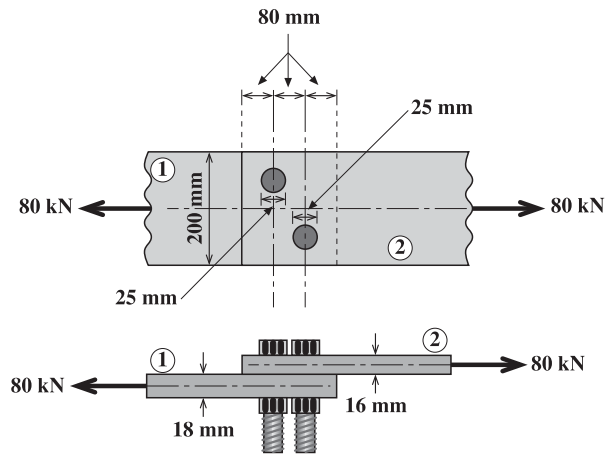


۲- در مسائل ۲ و ۳ مطلوب است محاسبه:

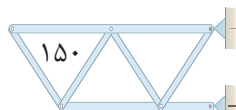
تنش ماکزیمم صفحه‌ها - تنش برشی پیچ‌ها - تنش لهیدگی ماکزیمم و کنترل پارگی

برشی



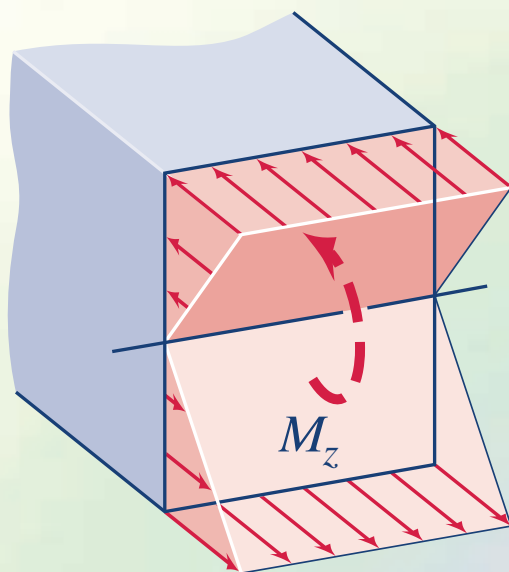


3



فصل نهم

تنش در تیرها



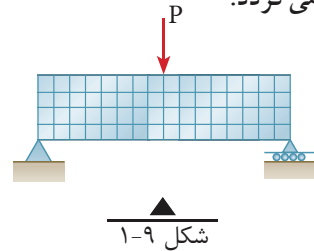
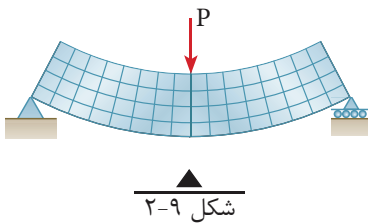
هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

- ۱- تنش خمشی را در تیرها بشناسد.
- ۲- تنش خمشی حداکثر در هر مقطع از تیر با مقاطع متقارن را با بار متمرکز محاسبه کند.
- ۳- حداکثر تنش خمشی تیرها با مقاطع متقارن را با بار متمرکز به دست آورد.
- ۴- شماره مقطع مورد نیاز تیرها تحت بار متمرکز را به کمک رابطهٔ خمش، با استفاده از پروفیل‌های استاندارد تک یا دوبل به دست آورد.

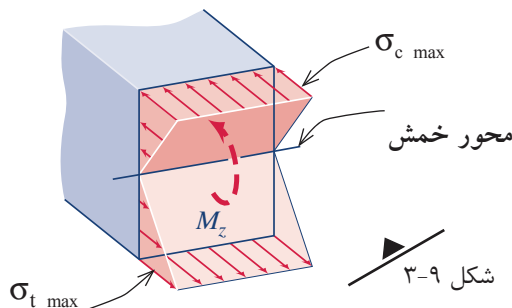
۱-۹ تنش خمشی در تیرها با مقطع متقارن

در شکل (۱-۹) تیر با بارگذاری نشان داده شده، به صورت شکل (۲-۹) خم می‌گردد.



ملاحظه می‌شود که تارهای تحتانی تیر کشیده شده و تارهای فوقانی آن فشرده می‌شود بنابراین در هر مقطع این تیر، ناحیه تحتانی دارای تنش کششی و ناحیه فوقانی دارای تنش فشاری می‌باشد که به تنش‌های مذکور تنش‌های خمشی گفته می‌شود.

حداکثر تنش‌های کششی (σ_t) و فشاری (σ_c) ایجادشده در مقطع تیر مطابق شکل (۳-۹) به ترتیب در تارهای تحتانی و فوقانی خواهد بود.



مقدار این تنش‌ها از رابطه (۱-۹) محاسبه می‌گردد که به رابطه خمش معروف است:

$$\sigma = \frac{MC}{I} \quad (۱-۹)$$

در این رابطه:

M: لنگر خمشی در مقطع مورد نظر

C: فاصله دورترین تارهای کششی یا فشاری مقطع از محور خمش

I: ممان اینرسی حول محور خمش تیر می‌باشد.

σ : تنش کششی (σ_t) و یا فشاری (σ_c) حداکثر، در مقطع مورد نظر می‌باشد که

در مقاطع متقارن با هم برابرند.

۹-۱-۱- تنش‌های خمشی حداکثر در تیر

رابطه (۱-۹) مقادیر حداکثر تنش کششی یا فشاری (σ_{max}) در هر مقطع دلخواه از تیر

را تعیین می‌کند.

برای محاسبه حداکثر تنش کششی یا فشاری در طول تیر لازم است در رابطه (۱-۹)

لنگر خمشی حداکثر تیر (M_{max}) را از نمودار لنگر خمشی تیر جایگزین نماییم. یعنی:

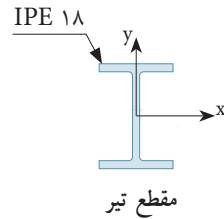
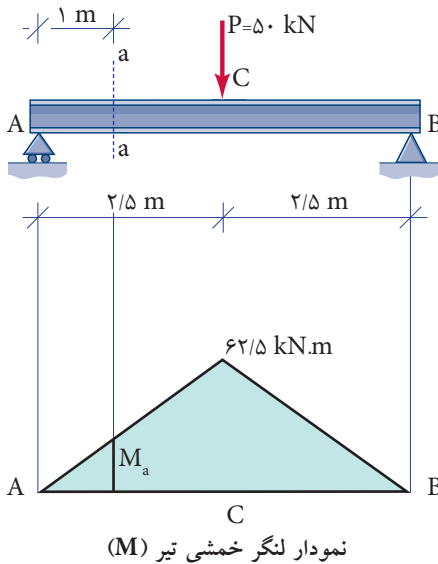
$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} C}{I} \quad (۲-۹)$$



مثال ۱

در تیر شکل زیر که متشکل از یک IPE ۱۸۰ می باشد، با توجه به نمودار لنگر خمشی تیر مطلوب است محاسبه:

(الف) تنش خمشی حداکثر در مقطع a-a به فاصله ۱ متر از تکیه گاه سمت چپ
(ب) تنش خمشی حداکثر تیر



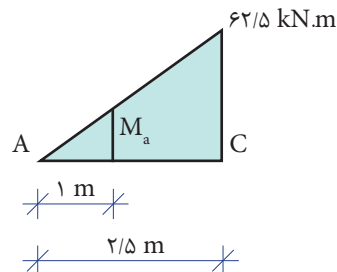
حل:

(الف) مقدار لنگر خمشی در مقطع a-a به فاصله ۱ متر از تکیه گاه سمت چپ با توجه به نمودار لنگر خمشی و استفاده از تناسب به صورت زیر به دست می آید.

$$\frac{M_a}{62.5} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_a = \frac{62.5}{2}$$

$$M_a = 31.25 \text{ kN.m}$$

$$M_a = 31.25 \times 10^6 \text{ N.mm}$$



تنش خمشی ماکزیمم در مقطع a-a از رابطه خمشی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\sigma = \frac{M_a C}{I_x}$$

با استخراج مشخصات ۱۸ IPE از جداول پیوست خواهیم داشت:

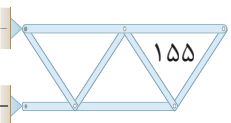
$$\text{IPE ۱۸} \begin{cases} I_x = 1320 \text{ cm}^4 = 132 \times 10^5 \text{ mm}^4 \\ C = \frac{h}{2} = \frac{180}{2} = 90 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\sigma = \frac{25 \times 10^6 \times 90}{132 \times 10^5} \Rightarrow \boxed{\sigma = 170/45 \text{ MPa}}$$

ب) تنش خمشی حداکثر تیر با توجه به مقدار لنگر ماکزیمم تیر از روی نمودار لنگر خمشی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$M_{\max} = 62/5 \text{ kN.m} = 62/5 \times 10^6 \text{ N.mm}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} C}{I_x} \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{62/5 \times 10^6 \times 90}{132 \times 10^5} \Rightarrow \boxed{\sigma_{\max} = 426/14 \text{ MPa}}$$



در فصل پنجم با نمودارهای نیروی برشی (V) و لنگر خمشی (M) تیرها آشنا شدیم. بر اساس این نمودارها، هر نقطه از تیر دارای مقدار معینی نیروی برشی و لنگر خمشی می‌باشد. تیرها باید مقادیر حداکثر نیروی برشی (V_{\max}) و لنگر خمشی (M_{\max}) ایجادشده را تحمل نمایند.

در تیرهای I شکل، جانِ تیر سهم بیشتری در تحمل نیروهای برشی دارد بنابراین برای محاسبهٔ تنش برشی در تیرها، در رابطهٔ ($\tau = \frac{V}{A}$) که در فصل هشتم آمده است، سطح جان تیر را قرار می‌دهیم.

لذا تنش برشی متوسط (τ_{ave}) در تیرها از رابطهٔ (۳-۹) به‌دست می‌آید.

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{V}{A_w} \quad (۳-۹)$$

که A_w مطابق شکل (۴-۹) برابر است با:

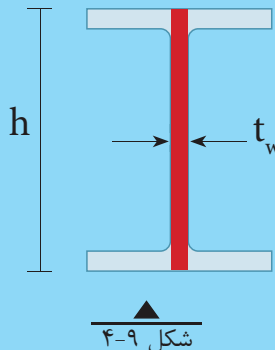
$$A_w = h.t_w \quad (۴-۹)$$

در این رابطه:

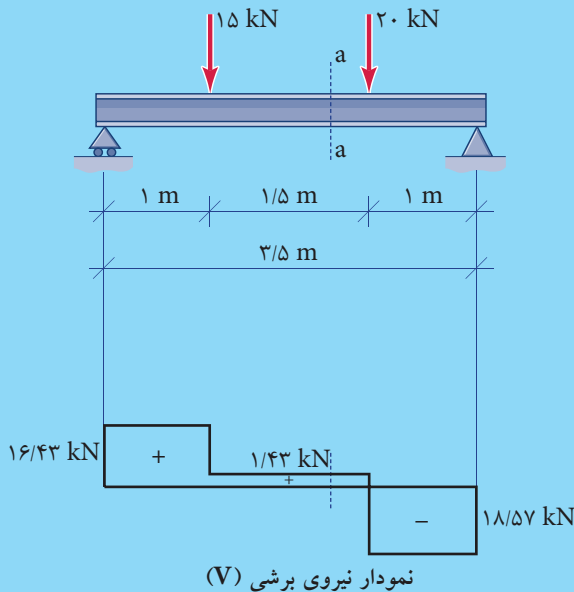
(h) ارتفاع مقطع تیر آهن و (t_w) ضخامت جانِ تیر می‌باشد که از جداول مربوطه استخراج می‌گردد.

برای محاسبهٔ تنش برشی حداکثر (τ_{\max}) در تیر باید به جای V در رابطهٔ (۳-۹) از V_{\max} استفاده شود.

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max}}{h.t_w} \quad (۵-۹)$$



مثال ۲ (مطالعه آزاد)



در تیر شکل مقابل که از یک تیرآهن IPE ۱۶ تشکیل شده است، با توجه به نمودار نیروی برشی تیر مطلوب است محاسبه:

الف) تنش برشی تیر در مقطع a-a به فاصله ۱/۵ متر از تکیه‌گاه سمت راست؛
ب) تنش برشی حداکثر تیر.

حل:

الف) با توجه به نمودار نیروی برشی، در مقطع a-a به فاصله ۱/۵ متر از تکیه‌گاه سمت راست، مقدار نیروی برشی برابر است با $V_a = 16.43 \text{ kN}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\tau_a = \frac{V}{A_w}$$

با استخراج سطح مقطع جان تیرآهن IPE ۱۶ از جداول پیوست، داریم:

$$\text{IPE } 16 \begin{cases} h = 16 \text{ cm} = 160 \text{ mm} \\ t_w = s = 5 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow A_w = h \cdot t_w \Rightarrow A_w = 160 \times 5 = 800 \text{ mm}^2$$

$$\tau_a = \frac{16.43 \times 10^3}{800} \Rightarrow \tau_a = 20.54 \text{ MPa}$$

تنش برشی در مقطع a-a

ب) تنش برشی حداکثر تیر:

با توجه به نمودار نیروی برشی داریم:

$$V_{\max} = 18.57 \text{ kN} = 18570 \text{ N}$$

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max}}{h \cdot t_w} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{18570}{160}$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = 116.06 \text{ MPa}$$

تنش برشی حداکثر تیر



تنش خمشی ماکزیمم تحت بار متمرکز

به طور کلی طراحی تیر یعنی تعیین مشخصات مقطع مورد نیاز با توجه به بارهای وارده و کنترل‌های لازم مانند کنترل تنش برشی حداکثر، کنترل تغییر شکل و . . . که با استفاده از آئین‌نامه‌های مربوطه انجام می‌گیرد.

در این قسمت با روش تعیین شماره مقطع مورد نیاز تیر فولادی با استفاده از رابطه (۲-۹) آشنا می‌شوید و کنترل‌های لازم را در مقاطع بالاتر فرا خواهید گرفت. تنش خمشی حداکثر تیر که عموماً تعیین‌کننده شماره مقطع مورد نیاز آن می‌باشد از رابطه (۲-۹) به دست می‌آید.

به طور کلی تنش ایجاد شده در هر مصالحی نباید از مقدار معینی تجاوز نماید که این مقدار تنش معین را تنش مجاز مصالح مورد نظر می‌نامند.

مقدار تنش مجاز توسط آئین‌نامه‌های مربوطه مشخص شده و با نماد σ_{all} نشان داده می‌شود. در این کتاب مقدار تنش مجاز مصالح فولادی در خمش معادل 144 MPa در نظر گرفته شده است.^۱

بنابراین تنش خمشی حداکثر در تیرهای فولادی نباید از 144 MPa تجاوز نماید در نتیجه رابطه (۲-۹) به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot C}{I_x} \leq 144 \text{ MPa}$$

نسبت $\frac{I_x}{C}$ ، مدول مقطع یا اساس مقطع تیر یعنی (S_x) می‌باشد.

بنابراین در رابطه (۳-۹) خواهیم داشت:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{\frac{I_x}{C}} \leq 144 \Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{S_x} \leq 144$$

$$\Rightarrow S_x \geq \frac{M_{\max}}{144} \quad (4-9)$$

۱- مقدار تنش مجاز به عوامل مختلفی بستگی دارد که به منظور سادگی و پرهیز از طولانی شدن بحث به طور خلاصه آن را معادل 144 MPa در نظر می‌گیریم.

«به مقدار S_x حاصل از رابطه (۴-۹) اساس مقطع لازم گویند.» بنابراین برای تعیین شماره مقطع تیر با استفاده از رابطه (۴-۹) اساس مقطع لازم تیر، محاسبه شده و از جداول پروفیل‌های ساختمانی می‌توان شماره مقطع مورد نیاز را که دارای اساس مقطعی معادل یا بزرگ‌تر از مقدار محاسبه شده از رابطه فوق می‌باشد، استخراج می‌شود.

مثال ۳

کنترل نمائید در مثال (۱) آیا با توجه به تنش مجاز خمشی تیر که معادل 144 MPa می‌باشد تیر آهن 18 IPE جوابگوی بار وارده می‌باشد یا خیر و در صورت لزوم مقطع مورد نیاز را تعیین نمائید.

حل:

تنش خمشی ماکزیمم در مثال (۱) برابر $\sigma_{\max} = 426/14 \text{ MPa}$ محاسبه شده که بزرگ‌تر از تنش مجاز خمشی یعنی $\sigma_{\text{all}} = 144 \text{ MPa}$ می‌باشد بنابراین 18 IPE جوابگوی بار وارده نمی‌باشد.

بنابراین باید اساس مقطع مورد نیاز را محاسبه نمائیم. با توجه به رابطه (۴-۹) خواهیم داشت:

$$S_x \text{ لازم} \geq \frac{M_{\max}}{144}$$

$$\Rightarrow S_x \text{ لازم} = \frac{62/5 \times 10^6}{144} = 434.027 \text{ mm}^3 = 434.027 \times 10^{-3} \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow S_x \text{ لازم} = 434/0.3 \text{ cm}^3 \Rightarrow \boxed{\text{IPE } 30} \text{ از جدول IPE}$$

$$S_x \text{ موجود} = 557 \text{ cm}^3 > 434/0.3$$

بنابراین برای این که تنش خمشی ماکزیمم تیر از حد مجاز تجاوز نکند باید مقطع آن حداقل 30 IPE باشد. چنانچه بخواهیم از تیر آهن دابل به عنوان تیر فوق استفاده نمائیم، کافی است اساس مقطع لازم را نصف نموده و بر اساس آن شماره مقطع مورد نیاز را از جدول استخراج و به صورت دابل مورد استفاده قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$S_x \text{ لازم} \geq \frac{434/0.3}{2} = 217/0.2 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{IPE } 22} \text{ از جدول IPE} \quad \text{با} \quad S_x \text{ موجود} = 252 \times 2 = 504 \text{ cm}^3 > 434/0.3 \text{ cm}^3$$

خلاصه فصل

- در اثر خمش در تیر، تنش‌های کششی و فشاری ایجاد می‌شود.
- مقادیر تنش خمشی حداکثر در هر مقطع از تیر در تارهای فوقانی و تحتانی از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma = \frac{MC}{I}$$

- تنش خمشی حداکثر تیر از رابطه زیر به دست می‌آید.

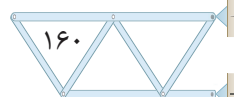
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} C}{I}$$

- تنش مجاز خمشی تیرهای فولادی برابر 144 MPa در نظر گرفته می‌شود.

$$\sigma_{\text{all}} = 144 \text{ MPa}$$

- برای تعیین اساس مقطع تیر آهن لازم از رابطه زیر استفاده می‌شود.

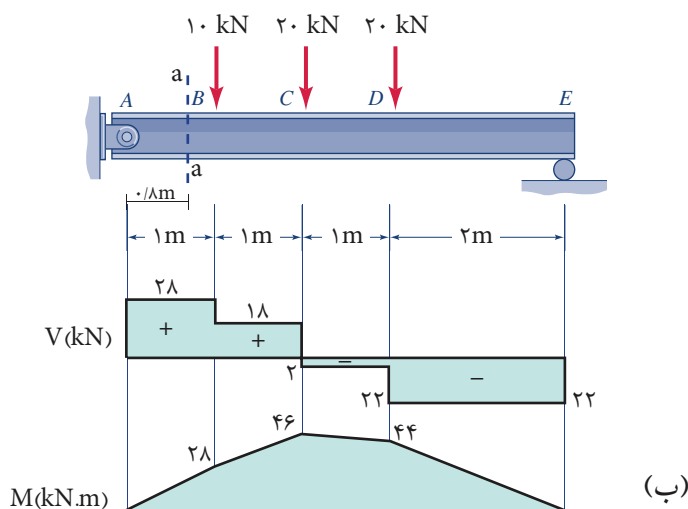
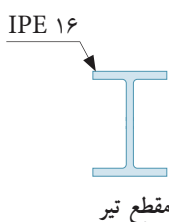
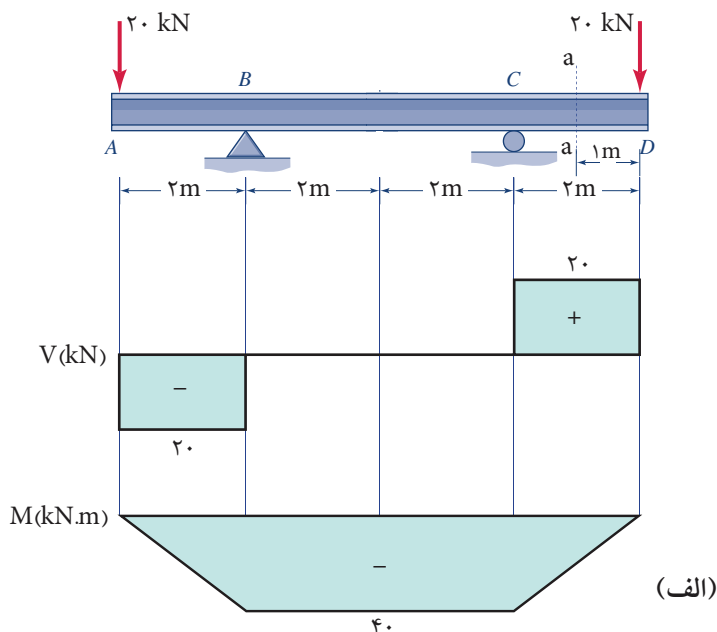
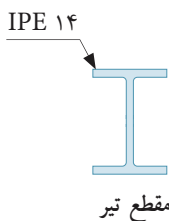
$$S_x \geq \frac{M_{\max}}{144}$$

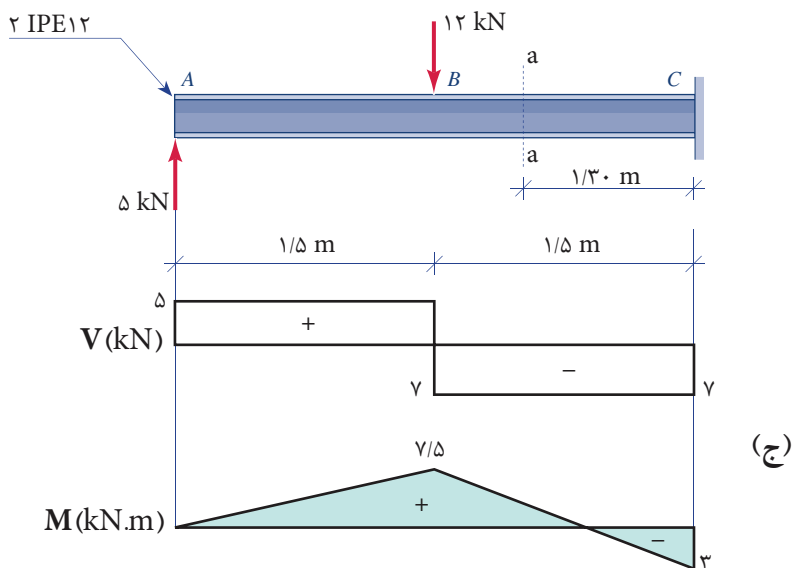


۱- در تیرهای داده شده مطلوب است:

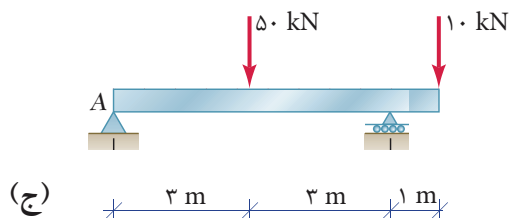
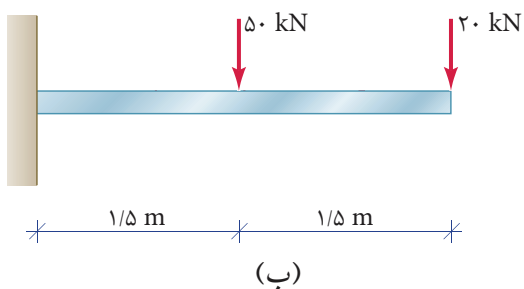
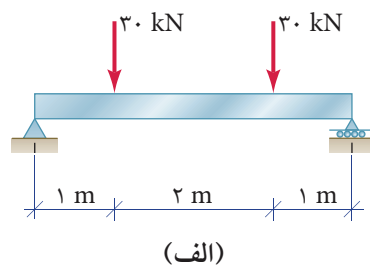
الف) محاسبه تنش خمشی در مقطع a-a

ب) محاسبه تنش خمشی ماکزیمم تیر





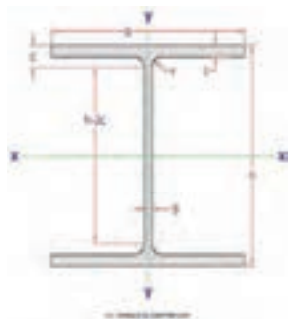
۲- شماره مقطع هر یک از تیرهای زیر را با استفاده از پروفیل IPE تک و دوبل تعیین کنید.
(تنش مجاز خمشی فولاد را 144 مگاپاسکال در نظر بگیرید.)



ضمیمه:

جداول مشخصات نیم رخ های فولادی

نیم رخ بال پهن IPB



A = سطح مقطع

G = وزن واحد طول

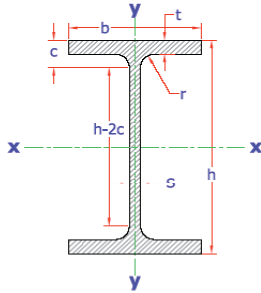
I = ممان اینرسی

S = اساس مقطع

i = شعاع ژیراسیون

IPB	h	b	s	t	r	c	h-2c	A	G	I_x	S_x	i_x	I_y	S_y	i_y	r_t
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	mm
100	100	100	6	10	12	22	56	26	20.4	450	89.9	4.16	167	33.5	2.53	27.8
120	120	120	6.5	11	12	23	74	34	26.7	864	144	5.04	318	52.9	3.06	33.4
140	140	140	7	12	12	24	92	43	33.7	1510	216	5.93	550	78.5	3.58	38.9
160	160	160	8	13	15	28	104	54.3	42.6	2490	311	6.78	889	111	4.05	44.4
180	180	180	8.5	14	15	29	122	65.3	51.2	3830	426	7.66	1360	151	4.57	49.9
200	200	200	9	15	18	33	134	78.1	61.3	5700	570	8.54	2000	200	5.07	55.5
220	220	220	9.5	16	18	34	152	91	71.5	8090	736	9.43	2840	258	5.59	61
240	240	240	10	17	21	38	164	106	83.2	11260	938	10.3	3920	327	6.08	66.6
260	260	260	10	17.5	24	41.5	177	118	93	14920	1150	11.2	5130	395	6.58	72.2
280	280	280	10.5	18	24	42	196	131	103	19270	1380	12.1	6590	471	7.09	77.6
300	300	300	11	19	27	46	208	149	117	25170	1680	13	8560	571	7.58	83.2
320	320	300	11.5	20.5	27	47.5	225	161	127	30820	1930	13.8	9240	616	7.57	83.1
340	340	300	12	21.5	27	48.5	243	171	134	36660	2160	14.6	9690	646	7.53	82.9
360	360	300	12.5	22.5	27	49.5	261	181	142	43190	2400	15.5	10140	676	7.49	82.7
400	400	300	13.5	24	27	51	298	198	155	57680	2880	17.1	10820	721	7.4	82.3
450	450	300	14	26	27	53	344	218	171	79890	3550	19.1	11720	781	7.33	81.9
500	500	300	14.5	28	27	55	390	239	187	107200	4290	21.2	12620	842	7.27	81.6
550	550	300	15	29	27	56	438	254	199	136700	4970	23.2	13080	872	7.17	81.1
600	600	300	15.5	30	27	57	486	270	212	171000	5700	25.2	13530	902	7.08	80.7
650	650	300	16	31	27	58	534	286	225	210600	6480	27.1	13980	932	6.99	80.2
700	700	300	17	32	27	59	582	306	241	256900	7340	29	14440	963	6.87	79.6
800	800	300	17.5	33	30	63	674	334	262	359100	8980	32.8	14900	994	6.68	78.7
900	900	300	18.5	35	30	65	770	371	291	494100	10980	36.5	15820	1050	6.53	77.9
1000	1000	300	19	36	30	66	868	400	314	644700	12890	40.1	16280	1090	6.38	77

نیمرخ نیم پهن IPE



(C) IRANCIIVILCENTER.COM

=A سطح مقطع

=G وزن واحد طول

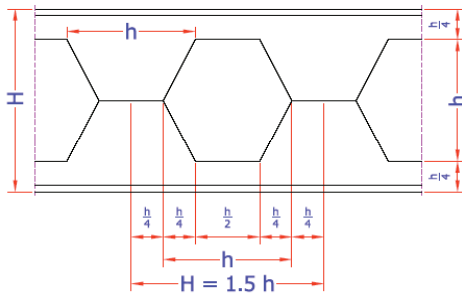
=I ممان اینرسی

=S اساس مقطع

=i شعاع ژیراسیون

IPE	h	b	s	t	r	c	h-2c	A	G	I _x	S _x	i _x	I _y	S _y	i _y	a ₁	r _T
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	mm	mm
80	80	46	3.8	5.2	5	10.2	59	7.64	6	80.1	20	3.24	8.49	3.69	1.05	63	12.2
100	100	55	4.1	5.7	7	12.7	74	10.3	8.1	171	34.2	4.07	15.9	5.79	1.24	79	14.6
120	120	64	4.4	6.3	7	13.3	93	13.2	10.4	318	53	4.9	27.7	8.65	1.45	96	16.9
140	140	73	4.7	6.9	7	13.9	112	16.4	12.9	541	77.3	5.74	44.9	12.3	1.65	112	19.3
160	160	82	5	7.4	9	16.4	127	20.1	15.8	869	109	6.58	68.3	16.7	1.84	129	21.7
180	180	91	5.3	8	9	17	146	23.9	18.8	1320	146	7.42	101	22.2	2.06	145	24
200	200	100	5.6	8.5	12	20.5	159	28.5	22.4	1940	194	8.26	142	28.5	2.24	162	26.4
220	220	110	5.9	9.2	12	21.2	177	33.4	26.2	2770	252	9.11	205	37.3	2.48	179	29.1
240	240	120	6.2	9.8	15	24.8	190	39.1	30.7	3890	324	9.97	284	47.3	2.6	196	31.8
270	270	135	6.6	10.2	15	25.2	219	45.9	36.1	5790	429	11.2	420	62.2	3.02	220	35.6
300	300	150	7.1	10.7	15	25.7	248	53.8	42.2	8360	557	12.5	604	80.5	3.35	245	39.5
330	330	160	7.5	11.5	18	29.5	271	62.6	49.1	11770	713	13.7	788	98.5	3.55	270	42.1
360	360	170	8	12.7	18	30.7	298	72.7	57.1	16270	904	15	1040	123	3.79	294	44.7
400	400	180	8.6	13.5	21	34.5	331	84.5	66.3	23130	1160	16.5	1320	146	3.95	326	47.1
450	450	190	9.4	14.6	21	35.6	378	98.8	77.6	33740	1500	18.5	1680	176	4.12	365	49.4
500	500	200	10.2	16	21	37	426	116	90.7	48200	1930	20.4	2140	214	4.31	404	51.8
550	550	210	11.1	17.2	24	41.2	467	134	106	67120	2440	22.3	2670	254	4.45	442	54
600	600	220	12	19	24	43	514	156	122	92080	3070	24.3	3390	308	4.66	481	56.5

نیمرخ نیم پهن لانه زنبوری شده Cast IPE



(C) IRANCIIVILCENTER.COM



=A سطح مقطع

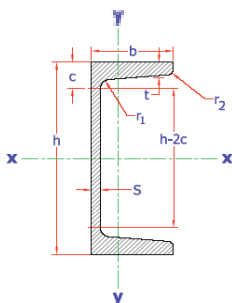
=G وزن واحد طول

=I ممان اینرسی

=S اساس مقطع

Cast IPE	h	H	s	t	A	G	I_{xa}	S_{xa}	F_b	I_{xb}	S_{xb}
	mm	mm	mm	mm	cm ²	kg/m (per 1.5h)	cm ⁴	cm ³	cm ²	cm ⁴	cm ³
120	80	120	3.8	5.2	9.16	0.718	206	34.3	6.12	189	31.6
150	100	150	4.1	5.7	12.4	1.21	437	58.2	8.25	403	53.7
180	120	180	4.4	6.3	15.8	1.86	809	89.9	10.6	746	82.8
210	140	210	4.7	6.9	19.7	2.7	1370	131	13.1	1270	121
240	160	240	5	7.4	24.1	3.78	2200	184	16.1	2030	169
270	180	270	5.3	8	28.7	5.06	3330	247	19.1	3070	228
300	200	300	5.6	8.5	34.1	6.7	4910	327	22.9	4540	302
330	220	330	5.9	9.2	39.9	8.63	6990	423	26.9	6460	392
360	240	360	6.2	9.8	46.5	11	9790	544	31.7	9070	504
405	270	405	6.6	10.2	54.8	14.6	14550	719	37	13470	665
450	300	450	7.1	10.7	64.5	19	21010	934	43.2	19410	863
495	330	495	7.5	11.5	75	24.3	29580	1200	50.2	27330	1100
540	360	540	8	12.7	87.1	30.8	40890	1510	58.3	37780	1400
600	400	600	8.6	13.5	102	39.7	58290	1940	67.3	53700	1790
675	450	675	9.4	14.6	120	52.2	85430	2530	77.7	78290	2320
750	500	750	10.2	16	142	68.2	122400	3260	90.5	111800	2980
825	550	825	11.1	17.2	165	86.6	171100	4150	103	155700	3770
900	600	900	12	19	192	110	235300	5230	120	213700	4750

نیمرخ ناودانی UNP



(C) IRANCVSLCENTER.COM

A = سطح مقطع

G = وزن واحد طول

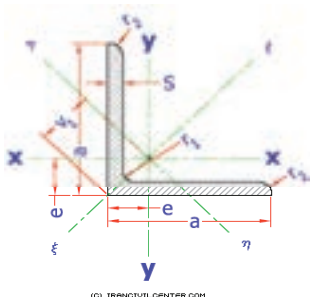
I = ممان اینرسی

S = اساس مقطع

i = شعاع ژیراسیون

UNP	h	b	s	t=r ₁	r ₂	c	h-2c	A	G	I _x	S _x	i _x	I _y	S _y	i _y	e _y	x _M	a ₁
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm	cm	mm
30x15	30	15	4	4.5	2	9	12	2.21	1.74	2.53	1.69	1.07	0.38	0.39	0.42	0.52	0.74	--
30	30	33	5	7	3.5	14.5	1	5.44	4.27	6.39	4.26	1.08	5.33	2.68	0.99	1.31	2.22	--
40x20	40	20	5	5.5	2.5	11	18	3.66	2.87	7.58	3.79	1.44	1.14	0.86	0.56	0.67	1.01	--
40	40	35	5	7	3.5	14.5	11	6.21	4.87	14.1	7.05	1.5	6.68	3.08	1.04	1.33	2.32	--
50x25	50	25	5	6	3	12.5	25	4.92	3.86	16.8	6.73	1.85	2.49	1.48	0.71	0.81	1.34	--
50	50	38	5	7	3.5	15	20	7.12	5.59	26.4	10.6	1.92	9.12	3.75	1.13	1.37	2.47	4
60	60	30	6	6	3	12.5	35	6.46	5.07	31.6	10.5	2.21	4.51	2.16	0.84	0.91	1.5	--
65	65	42	5.5	7.5	4	16	33	9.03	7.09	57.5	17.7	2.52	14.1	5.07	1.25	1.42	2.6	16
80	80	45	6	8	4	17	47	11	8.64	106	26.5	3.1	19.4	6.36	1.33	1.45	2.67	28
100	100	50	6	8.5	4.5	18	64	13.5	10.6	206	41.2	3.91	29.3	8.49	1.47	1.55	2.93	42
120	120	55	7	9	4.5	19	82	17	13.4	364	60.7	4.62	43.2	11.1	1.59	1.6	3.03	56
140	140	60	7	10	5	21	97	20.4	16	605	86.4	5.45	62.7	14.8	1.75	1.75	3.37	70
160	160	65	7.5	10.5	5.5	22.5	116	24	18.8	925	116	6.21	85.3	18.3	1.89	1.84	3.56	82
180	180	70	8	11	5.5	23.5	133	28	22	1350	150	6.95	114	22.4	2.02	1.92	3.75	96
200	200	75	8.5	11.5	6	24.5	151	32.2	25.3	1910	191	7.7	148	27	2.14	2.01	3.94	108
220	220	80	9	12.5	6.5	26.5	166	37.4	29.4	26900	245	8.48	197	33.6	2.3	2.14	4.2	122
240	240	85	9.5	13	6.5	28	185	42.3	33.2	3600	300	9.22	248	39.6	2.42	2.23	4.39	134
260	260	90	10	14	7	30	201	48.3	37.9	4820	371	9.99	317	47.7	2.56	2.36	4.66	146
280	280	95	10	15	7.5	32	216	53.3	41.8	6280	448	10.9	399	57.2	2.74	2.53	5.02	160
300	300	100	10	16	8	34	232	58.8	46.2	8030	535	11.7	495	67.8	2.9	2.7	5.41	174
320	320	100	14	17.5	8.75	37	247	75.8	59.5	10870	679	12.1	597	80.6	2.81	2.6	4.82	182
350	350	100	14	16	8	34	283	77.3	60.6	12840	734	12.9	570	75	2.72	2.4	4.45	204
380	380	102	13.5	16	8	33.5	313	80.4	63.1	15760	829	14	615	78.7	2.77	2.38	4.58	227
400	400	110	14	18	9	38	325	91.5	71.8	20350	1020	14.9	846	102	3.04	2.65	5.11	240

نیمرخ نبشی با بال مساوی Angle Equal Leg



(C) IRANCVULOCENTER.COM

A = سطح مقطع

G = وزن واحد طول

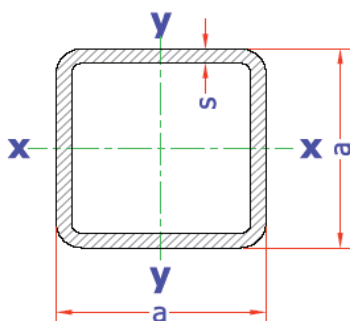
I = ممان اینرسی

S = اساس مقطع

i = شعاع ژیراسیون

a X s	r ₁	r ₂	A	G	e	w	v ₁	I _x =I _y	S _x =S _y	i _x =i _y	J _ξ	i _ξ	J _η	W _η	i _η
mm	mm	mm	cm ²	kg/m	cm	cm	cm	cm ⁴	cm ³	cm	cm ⁴	cm	cm	cm ³	cm
20 X 3	3.5	2	1.12	0.88	0.6	1.41	0.85	0.39	0.28	0.59	0.62	0.74	0.15	0.18	0.37
20 X 4	3.5	2	1.45	1.14	0.64	1.41	0.9	0.48	0.35	0.58	0.77	0.73	0.19	0.21	0.36
25 X 3	3.5	2	1.42	1.12	0.73	1.77	1.03	0.79	0.45	0.75	1.27	0.95	0.31	0.3	0.47
25 X 4	3.5	2	1.85	1.45	0.76	1.77	1.08	1.01	0.58	0.74	1.61	0.93	0.4	0.37	0.47
25 X 5	3.5	2	2.26	1.77	0.8	1.77	1.13	1.18	0.69	0.72	1.87	0.91	0.5	0.44	0.47
30 X 3	5	2.5	1.74	1.36	0.84	2.12	1.18	1.41	0.65	0.9	2.24	1.14	0.57	0.48	0.57
30 X 4	5	2.5	2.27	1.78	0.89	2.12	1.24	1.81	0.86	0.89	2.85	1.12	0.76	0.61	0.58
30 X 5	5	2.5	2.78	2.18	0.92	2.12	1.3	2.16	1.04	0.88	3.41	1.11	0.91	0.7	0.57
35 X 3	5	2.5	2.04	1.6	0.96	2.47	1.36	2.29	0.9	1.06	3.63	1.34	0.95	0.7	0.68
35 X 4	5	2.5	2.67	2.1	1	2.47	1.41	2.96	1.18	1.05	4.68	1.33	1.24	0.88	0.68
35 X 5	5	2.5	3.28	2.57	1.04	2.47	1.47	3.56	1.45	1.04	5.63	1.31	1.49	1.01	0.67
35 X 6	5	2.5	3.87	3.04	1.08	2.47	1.53	4.14	1.71	1.04	6.5	1.3	1.77	1.16	0.68
40 X 3	6	3	2.35	1.84	1.07	2.83	1.52	3.45	1.18	1.21	5.45	1.52	1.44	0.95	0.78
40 X 4	6	3	3.08	2.42	1.12	2.83	1.58	4.48	1.56	1.21	7.09	1.52	1.86	1.18	0.78
40 X 5	6	3	3.79	2.97	1.16	2.83	1.64	5.43	1.91	1.2	8.64	1.51	2.22	1.35	0.77
40 X 6	6	3	4.48	3.52	1.2	2.83	1.7	6.33	2.26	1.19	9.98	1.49	2.67	1.57	0.77
45 X 4	7	3.5	3.49	2.74	1.23	3.18	1.75	6.43	1.97	1.36	10.2	1.71	2.68	1.53	0.88
45 X 5	7	3.5	4.3	3.38	1.28	3.18	1.81	7.83	2.43	1.35	12.4	1.7	3.25	1.8	0.87
45 X 6	7	3.5	5.09	4	1.32	3.18	1.87	9.16	2.88	1.34	14.5	1.69	3.83	2.05	0.87
45 X 7	7	3.5	5.86	4.6	1.36	3.18	1.92	10.4	3.31	1.33	16.4	1.67	4.39	2.29	0.87
50 X 4	7	3.5	3.89	3.06	1.36	3.54	1.92	8.97	2.46	1.52	14.2	1.91	3.73	1.94	0.98
50 X 5	7	3.5	4.8	3.77	1.4	3.54	1.98	11	3.05	1.51	17.4	1.9	4.59	2.32	0.98
50 X 6	7	3.5	5.69	4.47	1.45	3.54	2.04	12.8	3.61	1.5	20.4	1.89	5.24	2.57	0.96
50 X 7	7	3.5	6.56	5.15	1.49	3.54	2.11	14.6	4.15	1.49	23.1	1.88	6.02	2.85	0.96
50 X 8	7	3.5	7.41	5.82	1.52	3.54	2.16	16.3	4.68	1.48	25.7	1.86	6.87	3.19	0.96
50 X 9	7	3.5	8.24	6.47	1.56	3.54	2.21	17.9	5.2	1.47	28.1	1.85	7.67	3.47	0.97
55 X 5	8	4	5.32	4.18	1.52	3.89	2.15	14.7	3.7	1.66	23.3	2.09	6.11	2.84	1.07
55 X 6	8	4	6.31	4.95	1.56	3.89	2.21	17.3	4.4	1.66	27.4	2.08	7.24	3.28	1.07
55 X 8	8	4	8.23	6.46	1.64	3.89	2.32	22.1	5.72	1.64	34.8	2.06	9.35	4.03	1.07
55 X 10	8	4	10.1	7.9	1.72	3.89	2.43	26.3	6.97	1.62	41.4	2.02	11.3	4.65	1.06
60 X 5	8	4	5.82	4.57	1.64	4.24	2.32	19.4	4.45	1.82	30.7	2.3	8.03	3.46	1.17
60 X 6	8	4	6.91	5.42	1.69	4.24	2.39	22.8	5.29	1.82	36.1	2.29	9.43	3.95	1.17
60 X 8	8	4	9.03	7.09	1.77	4.24	2.5	29.1	6.88	1.8	46.1	2.26	12.1	4.84	1.16

نیمرخ قوطی مربع Square Tube



(C) IRANCIIVILCENTER.COM

A = سطح مقطع

G = وزن واحد طول

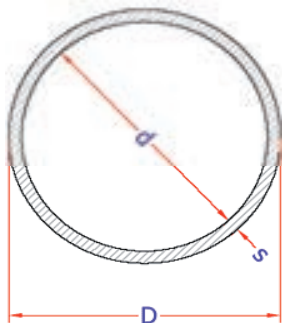
I = ممان اینرسی

S = اساس مقطع

i = شعاع ژیراسیون

$a \times s$	A	G	I	S	i
mm	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm
40 X 2.9	4.23	3.32	9.66	4.83	1.51
40 X 4	5.62	4.41	12.1	6.05	1.47
50 X 2.9	5.39	4.23	19.8	7.94	1.92
50 X 4	7.22	5.67	25.4	10.1	1.87
60 X 2.9	6.55	5.14	35.5	11.8	2.33
60 X 4	8.82	6.93	45.9	15.3	2.28
60 X 5	10.8	8.47	54.1	18	2.24
70 X 3.2	8.46	6.64	62.7	17.9	2.72
70 X 4	10.4	8.18	75.3	21.5	2.69
70 X 5	12.8	10	89.6	25.6	2.65
80 X 3.6	10.9	8.55	106	26.4	3.11
80 X 4.5	13.4	10.5	127	31.7	3.08
80 X 5.6	16.4	12.9	151	37.6	3.03
90 X 3.6	12.3	9.68	153	34	3.52
90 X 4.5	15.2	11.9	185	41	3.48
90 X 5.6	18.6	14.6	220	49	3.44
100 X 4	15.2	12	233	46.6	3.91
100 X 5	18.8	14.7	281	56.3	3.87
100 X 6.3	23.3	18.3	339	67.8	3.82
120 X 4.5	20.5	16.1	452	75.3	4.7
120 X 5.6	25.1	19.7	544	90.6	4.65
120 X 6.3	28	22	598	99.7	4.62
140 X 5.6	29.6	23.3	885	126	5.47
140 X 7.1	37	29	1080	154	5.4
140 X 8.8	45	35.3	1280	182	5.33
160 X 6.3	37.7	29.6	1460	183	6.23
160 X 8	47	36.9	1780	222	6.15
160 X 10	57.4	45.1	2100	263	6.05
180 X 6.3	42.8	33.6	2120	236	7.05
180 X 8	53.4	41.9	2590	288	6.97
180 X 10	65.4	51.4	3090	343	6.87
200 X 6.3	47.8	37.5	2960	296	7.86

نیمرخ لوله Round Tube



(C) IRANVILCENTER.COM

A = سطح مقطع

G = وزن واحد طول

I = ممان اینرسی

S = اساس مقطع

i_x = شعاع ژیراسیون

D X s	A	G	I	S	i_x
mm	cm ²	kg/m	cm ⁴	cm ³	cm
21.3 X 2	1.21	0.962	0.571	0.536	0.686
21.3 X 2.6	1.53	1.21	0.681	0.639	0.668
21.3 X 3.2	1.82	1.44	0.768	0.722	0.65
26.9 X 2	1.56	1.24	1.22	0.907	0.883
26.9 X 2.6	1.98	1.57	1.48	1.1	0.864
26.9 X 3.2	2.38	1.89	1.7	1.27	0.846
33.7 X 2.6	2.54	2.01	3.09	1.84	1.1
33.7 X 3.2	3.07	2.42	3.6	2.14	1.08
33.7 X 4	3.73	2.95	4.19	2.49	1.06
42.4 X 2.6	3.25	2.57	6.46	3.05	1.41
42.4 X 3.2	3.94	3.11	7.62	3.59	1.39
42.4 X 4	4.83	3.81	8.99	4.24	1.36
48.3 X 2.6	3.73	2.95	9.78	4.05	1.62
48.3 X 3.2	4.53	3.59	11.6	4.8	1.6
48.3 X 4	5.57	4.41	13.8	5.7	1.57
60.3 X 2.9	5.23	4.14	21.6	7.16	2.03
60.3 X 3.6	6.41	5.07	25.9	8.58	2.01
60.3 X 4	7.07	5.59	28.2	9.34	2
60.3 X 5	8.69	6.82	33.5	11.1	1.96
76.1 X 2.9	6.67	5.82	44.7	11.8	2.59
76.1 X 3.6	8.2	6.49	54	14.2	2.57
76.1 X 4	9.06	7.17	59.1	15.5	2.55
76.1 X 5	11.2	8.77	70.9	18.6	2.52
88.9 X 3.2	8.62	6.81	79.2	17.8	3.03
88.9 X 3.6	9.65	7.57	87.9	19.8	3.02
88.9 X 4	10.7	8.43	96.3	21.7	3
88.9 X 5	13.2	10.3	116	26.2	2.97
88.9 X 6.3	16.3	12.9	140	31.5	2.93
101.6 X 3.6	11.1	8.76	133	26.2	3.47
101.6 X 4.5	13.7	10.7	162	31.9	3.44
101.6 X 5.6	16.9	13.2	195	38.4	3.4
101.6 X 7.1	21.4	16.9	237	46.6	3.35

منابع و مأخذ:

۱- خاکی، علی، ایستایی ساختمان، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران

۲- فرشاد، مهدی، مکانیک مهندسی - جلد اول: استاتیک، انتشارات پژوهش

۳- مریام، ج - ال، استاتیک، ترجمه حمید لعل‌خو

۴- ENGINEERING MECHANICS STATICS,

J.L.MERIAM&L.G.KRAIGE, SEVENTH EDITION

۵- STATICS AND MECHANICS OF MATERIALS,

Ferdinand P.Beer&E.Russell Johnston, Jr.&John T.DeWolf&David

F.Mazurek

۶- MECHANICS OF MATERIALS, Third Edition

ROY R. CRAIG, JR.

۷- فرشاد، مهدی، تاریخ مهندسی در ایران، انتشارات میرماه

۸- و سایت‌های مختلف اینترنتی مرتبط با موضوع

