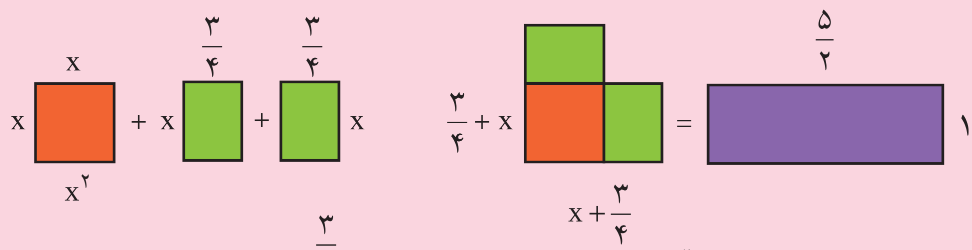
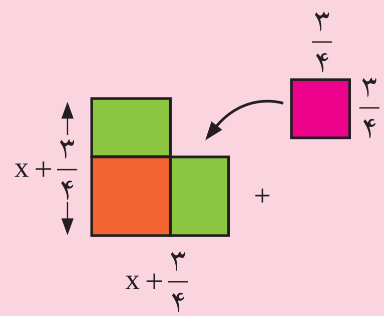
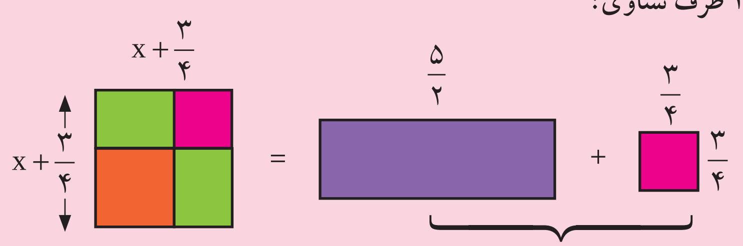
و قرار دادن ۲ مستطیل قبل در کنار مربع $x^۲$، تساوی صفحه قبل به صورت زیر در می‌آید:



– شـکل سـمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع .... دارد.



با اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:



$$(x+\frac{۳}{۴})^۲ = \frac{۵}{۲}+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۴۹}{۱۶}$$

که مطابق حل صفحهٔ قبل معادله دارای ۲ جواب $x=۱$ و $x=-\frac{۵}{۲}$ اسـت. البته در روش هندسی فوق چون x طول ضلع است، جواب $x=-\frac{۵}{۲}$ معنی پیدا نمی‌کند.

شـیوهٔ حل معادلهٔ درجهٔ دو به روش هندسـی ذکر شده اولین بار توسـط ریاضی‌دان، منجم، مورخ و جغرافی‌دان ایرانی و مسلمان «ابوعبدالله محمدبن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن $x^۲+px=q$ و با فرض $p,q>۰$ است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادلهٔ درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هرچند همهٔ معادله‌های درجه دوم را نمی‌توان با این شـش روش حل کرد؛ اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله‌های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعهٔ نظریه جبری معادله‌ها است. کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی قرن‌ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا قرن شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رابرت چستری» به زبان لاتین ترجمه شـده است. این ترجمه‌ها را می‌توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسـی ترجمه کرده است. گفتنی اسـت که یک نسخهٔ خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخهٔ خطی دیگر آن در قاهره موجود است.

کار درکلاس

با محاسبهٔ مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادلهٔ درجهٔ دو، در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجهٔ به‌دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

تمرین قبل از مسابقه

۱) $۲x^۲-۶x-۱=۰$

$۲x^۲-۶x=۱$

$x^۲-۳x=\frac{۱}{۲}$

$x^۲-۳x=\frac{۱}{۲}$

$x^۲-۲\times\frac{۳}{۲}x=\frac{۱}{۲}$

$\downarrow$

$(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}$

$x^۲-۲(\frac{۳}{۲}x)+\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{۲}+\frac{۹}{۴}$

$(x-\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱۱}{۴}$

$x-\frac{۳}{۲}=\pm\frac{\sqrt{۱۱}}{۲}$

$\begin{cases} x=\frac{۳}{۲}+\frac{\sqrt{۱۱}}{۲} \\ x=\frac{۳}{۲}-\frac{\sqrt{۱۱}}{۲} \end{cases}$

مسابقه

۲) $۳x^۲-۲=۶x$

$۳x^۲-۶x=\cdots$

$x^۲-\cdots=\cdots$

$\_\_\_\_=\_\_\_$

$\_\_\_\_=\_\_\_$

$(\ \ )^۲=\_\_\_$

$\_\_\_\_=\_\_\_$

$\begin{cases} x=\cdots\cdots\cdots \\ x=\cdots\cdots\cdots \end{cases}$

تمرین

معادله‌های درجهٔ دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف) $x^۲-۵x+۶=۰$ **ب)** $۹x^۲+۳x-۲=۰$

پ) $x^۲+\frac{۱}{۴}=-x$ **ت)** $x^۲+۶x+۹=۰$

روش سوم : روش کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم

با اســتفاده از روش مربع کامــل برای حل معادلهٔ درجــه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ روش کلی برای حل معادله به‌دست می‌آید. با مرور پله‌های گفته شده در بخش قبل :

۱ قرینهٔ عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$ax^۲+bx=-c \qquad (۱)$$

۲ دو طرف معادله را به ضریب $x^۲$ یعنی a تقسیم می‌کنیم:

$$x^۲+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \qquad (۲)$$

۳ ضریب $\frac{b}{a}$ را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم و مربع عدد به‌دست آمده؛ یعنی $\frac{b}{۲a}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می‌کنیم:

$$x^۲+۲(\frac{b}{۲a})x=-\frac{c}{a} \Rightarrow x^۲+۲(\frac{b}{۲a})x+(\frac{b}{۲a})^۲=(\frac{b}{۲a})^۲-\frac{c}{a} \qquad (۳)$$

۴ عبارت سمت چپ تساوی (۳) را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow (x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲}{۴a^۲}-\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad (x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}$$

۵ با شرط $b^۲-۴ac>۰$ و با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی:

$$x+\frac{b}{۲a}=\pm\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}\pm\frac{\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$

عبارت $b^۲-۴ac$ را مبین معادلهٔ درجه دوم می‌نامند و آن را با Δ[1] نشان می‌دهند.

براساس علامت Δ می‌توان در وجود و تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم اظهارنظر کرد:

الف) اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت‌اند از:

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \quad و \quad x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

ب) اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشهٔ مضاعف می‌نامند.)

$$x=-\frac{b}{۲a}$$

پ) اگر $\Delta < ۰$ باشد معادله جواب ندارد. (چرا؟)

فعالیت

۱. جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۳x+۲=۰$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

■ **حل**: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $c=۲$ و $b=-۳$ و $a=۱$ است.

بنابراین:

$$\Delta = b^۲ - \ldots \Rightarrow \Delta = (-۳)^۲ - ۴\times ۱ \times ۲ = ۹-۸=۱$$

$\Delta > ۰$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۱}}{۲} \Rightarrow x=۲ \text{ یا } x=۱$$

۲. جواب‌های معادلهٔ $۴x^۲+۷x-۲=۰$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

■ **حل**: با در نظر گرفتن $c=\ldots \quad b=\ldots \quad a=\ldots$:

$$\Delta = \ldots\ldots \Rightarrow \Delta = ۴۹-۴\times۴\times(-۲)=۸۱$$

$\Delta > ۰$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x=\frac{-۷\pm\sqrt{۸۱}}{۲\times۴}=\frac{\quad}{۸} \Rightarrow$$

---

۱. Δ چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را «دلتا» می‌خوانند. در الفبای یونانی، دلتای بزرگ را با علامت Δ و دلتای کوچک را با علامت δ نشان می‌دهند.

۳. جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲+x+۷=۰$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

■ **حل** : با در نظر گرفتن $c=۷$ $b=۱$ $a=۳$:

$$\Delta = b^۲-۴ac \Rightarrow \Delta = ...$$

$\Delta <۰$ بنابراین معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

کار درکلاس

معادله‌های زیر را حل کنید و با به‌دست آوردن ریشه‌های معادله، $x_۱$ و $x_۲$ حاصل $x_۱+x_۲$ را به‌دست آورید.
آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب a,b و c در معادلهٔ درجه دو گفته شده وجود دارد؟

الف) $۳x^۲+ ۵x -۲ = ۰$ **ب)** $۴x^۲+ ۳x -۷ = ۰$

طرح و حل چند مسئله کاربردی از معادلهٔ درجه دوم

مسئلهٔ اول :

مقدمه : در هر مسئلهٔ اقتصادی اگر x مقدار یا تعداد محصول باشد، سه تابع مهم زیر تعریف می‌شوند:

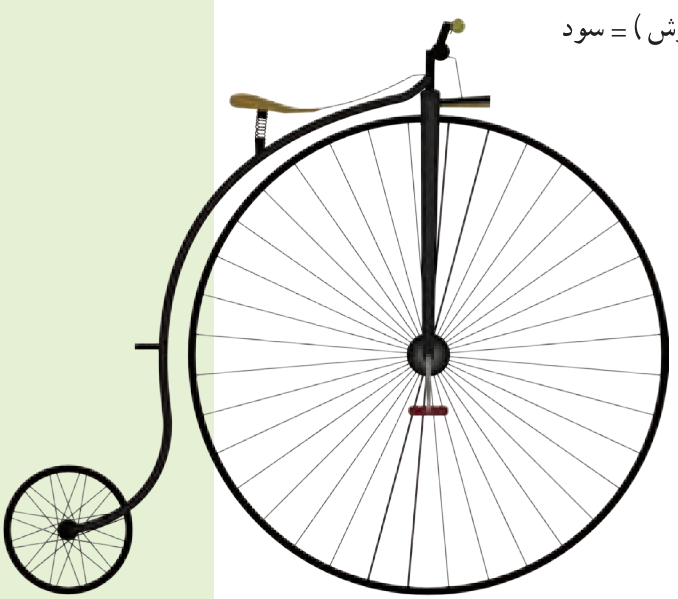
تابع هزینه (cost) یا C(x) : هزینه تولید x واحد کالا

تابع سود (profit) یا P(x) : سود حاصل از فروش x واحد کالا

تابع درآمد (Revenue) یا R(x) : درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

رابطهٔ میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

سود = درآمد (فروش) – هزینه $\Rightarrow P(x) = R(x) - C(x)$



فرض کنید، شما یک دوچرخهٔ جدید طراحی کرده‌اید و پس از آزمایش‌ها و تأییدهای اولیه می‌خواهید آن را به‌صورت انبوه تولید کنید. هزینه‌های شما شامل ۲ بخش‌اند:

۱. هزینهٔ اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه‌های کارخانه و تبلیغات.

۲. هزینهٔ تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.

اگر v قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطهٔ $۷۰/۰۰۰-۲۰۰v$ به‌دست آید :

الف) تابع سود کارخانه را به‌دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می‌شود؟

حل :

درآمد $R(x)$ = تعداد فروش دوچرخه × قیمت هر دوچرخه = ...

هزینه $C(x)$ = هزینه اولیه + ... = ... $+۱۱۰(۷۰,۰۰۰-۲۰۰v)$ = ...

سود $P(x)$ = ...

مسئلهٔ دوم :

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از رابطهٔ $p(x)=-۰/۰۰۴۰۵x^۲+۸/۱۵x-۱۰۰$ به‌دست می‌آید.

الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد، چقدر از دست می‌دهد؟

ب) نقطهٔ سر به سر (break–even) میزانی از تولید یک بنگاه اقتصادی را نشان می‌دهد که در آن میزان هزینه‌ها با میزان درآمدها برابر می‌شود و بنگاه در این سطح از تولید نه سود می‌کند و نه ضرر. اگر تولید بیشتر از نقطهٔ سر به سر باشد، بنگاه سود خواهد برد و اگر کمتر باشد، زیان خواهد دید.

در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطهٔ سر به سر خود می‌رسد؟ چندمین تولید چتر برای کارگاه سودآور است؟

تمرین

۱ . معادله‌های درجهٔ دوم زیر را حل کنید.

۱) $x^2-x+5=0$

۲) $2x^2+x-1=0$

۳) $4x^2-4x+1=0$

۴) $x^2+17x-18=0$

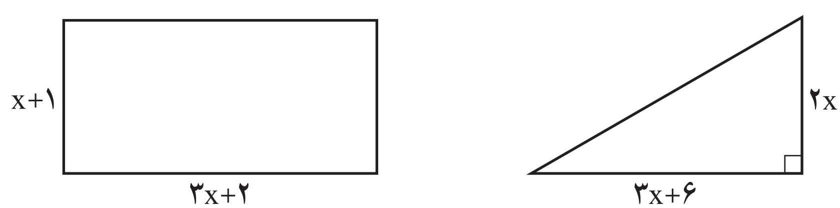
۵) $3x^2-x+4=0$

۶) $x^2+\sqrt{3}\,x-1=0$

۲ . معادلهٔ $2x^2-3x-5=0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبهٔ ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل‌ضرب آنها را به‌دست آورید.

۳ . اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $2x^2-ax+28=0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۴ . مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



۵ . کدام‌یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف) $x^2+ax-1=0$

ب) $x^2-x+a=0$

* ۶ . نشـان دهید در معادلـهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $a+c=b$ باشـد. یکی از ریشـه‌های معادله برابر $x=-1$ و دیگری $x=-\frac{c}{a}$ است.

* ۷ . با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ درجه دوم برابر $\frac{c}{a}$ است.

* ۸ . نشان دهید در هر معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد $(a+b+c=0)$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x=1$ و دیگری $x=\frac{c}{a}$ است.

* حل تمرین‌های ستاره‌دار اجباری نیست.

درس ۳

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

فعالیت

علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود. او از در منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژهٔ دوچرخه‌سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند.

می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد، محاسبه کنیم.

۱. دستور محاسبهٔ سرعت متوسط $v=\frac{x}{t}$ است که در آن x مسافت طی‌شده و t مدت زمان طی مسیر است. داده‌های مسئله را در این دستور جایگزین کنید.

۲. برابری $۱۵=\frac{۲/۵}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا $\frac{۲/۵}{t}$ است. از آنجا که $t \neq ۰$، پس معادله با معناست، برای حل این معادله، دو طرف را با ۱۵− جمع کنید.

۳. با مخرج مشترک‌گیری سمت چپ، معادله را به‌صورت یک کسر بنویسید.

۴. کسری که مخرج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین صورت کسر بالا را برابر با صفر قرار دهید.

۵. از اینجا به بعد یک معادلهٔ یک‌مجهولی درجه اول به‌دست می‌آید. آن را حل و مقدار t را محاسبه کنید.

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

برای حل معادله‌های شـامل عبارت‌هـای گویا، ابتدا با توجه بـه خاصیت‌های معادله و مخـرج مشـترک‌گیری، معادلـه‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)}=۰$ به‌دسـت می‌آید. به شـرط اینکه $Q(x)\neq ۰$، وقتی معادله جواب دارد که $P(x)=۰$ اسـت، سـپس ریشه‌های این معادله را به‌دست می‌آوریم. از بین ریشه‌های به‌دسـت‌آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟)

◆ **مثال** : معادلهٔ $۲=\frac{۵(x-۱)}{x-۳}-\frac{۱۰}{x-۳}$ را حل کنید.

■ **حل** : با اضافه‌کردن ۲− به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{۱۰}{x-۳}-\frac{۵(x-۱)}{x-۳}-۲=۰$$

اکنون با مخرج مشترک‌گیری از سمت چپ، تساوی آن را به‌صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{۱۰}{x-۳}-\frac{۵(x-۱)}{x-۳}-\frac{۲(\qquad)}{(\qquad)}=۰\Rightarrow\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{x-۳}=۰$$

مشاهده می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ رسیدیم. بنابراین با شرط $x-۳\neq ۰$ و با حل معادلهٔ $P(x)=۰$، ریشه‌های معادله را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$۲۱-۷x=۰\Rightarrow x=۳$$

چون $x=۳$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

◆ **مثال** : معادلهٔ $\frac{x^۲-۶x+۵}{x^۲-x-۲۰}=\frac{x-۱}{x+۴}+\frac{x-۲}{x-۵}$ را حل کنید.

$$\frac{x-۲}{x-۵}+\frac{x-۱}{x+۴}-\frac{x^۲-۶x+۵}{(x-۵)(x+۴)}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{(x-۲)(..........)}{(x-۵)(..........)}+\frac{(x-۱)(..........)}{(x+۴)(..........)}-\frac{x^۲-۶x+۵}{(x-۵)(x+۴)}=۰$$

$$\Rightarrow\frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{(x-۵)(x+۴)}=۰\Rightarrow ....=۰\Rightarrow ....$$

◆ **مثال** : به‌ازای چه مقدار a معادلهٔ $\frac{x+۱}{x+a}=\frac{a}{x}$، دارای جواب $x=۱$ است.

■ **حل:** $x=1$ را در معادله قرار می‌دهیم و سپس مقدار a را به‌دست می‌آوریم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1}-\frac{2}{a+1}=0 \Rightarrow \frac{a(a+1)}{(a+1)}-\frac{2}{a+1}=0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+a-2}{a+1}=0 \Rightarrow a^2+a-2=0 \Rightarrow (a+2)(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ \text{یا} \\ a=1 \end{cases}$$

چون $a=1$ یا $a=-2$ مخرج کسرهای معادلهٔ $\frac{a}{1}-\frac{2}{a+1}=0$ را صفر نمی‌کنند، پس هردو قابل قبول‌اند.

کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $1+\frac{8}{x^2}=\frac{4}{x}$

ب) $\frac{x-2}{x-4}=\frac{x+1}{x+3}$

پ) $\frac{24}{10+m}+1=\frac{24}{10-m}$

ت) $\frac{y+2}{y+3}-\frac{y^2}{y^2-9}=1-\frac{y-1}{3-y}$

ث) به‌ازای چه مقدار a، معادله $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{x}{a-x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

چند مسئلهٔ کاربردی از معادله‌هایی که عبارت‌های گویا دارند

۱. گلدانی نقره داریم که نسبت وزن نقرهٔ خالص به وزن مس خالص آن، برابر با ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می‌دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب‌شدن چه وزنی داشته است.

■ **حل:** $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن مس}}=8$، اگر وزن مس را برابر با x در نظر بگیریم، آنگاه وزن نقره $8x$ و وزن گلدان قبل از ذوب‌شدن برابر با $8x+x=9x$ است.

اکنون اگر بعد از ذوب‌شدن ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید $9x+100$ است.

از آنجا که $\frac{۴}{۵}$ وزن گلدان جدید نقره است؛ یعنی $\frac{۴}{۵} = \frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}}$ ، پس داریم :

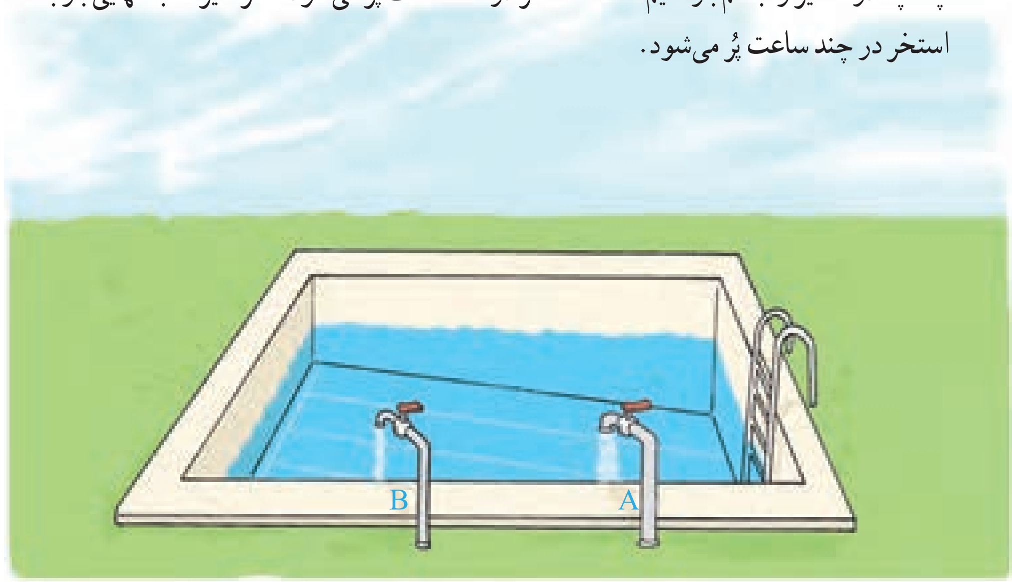
$$\frac{۸x}{۹x+۱۰۰} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۸x}{۹x+۱۰۰} - \frac{۴}{۵} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۸x \times ۵}{(۹x+۱۰۰)\times ۵} - \frac{۴(۹x+۱۰۰)}{۵(۹x+۱۰۰)} = ۰ \Rightarrow \frac{۴۰x - ۳۶x - ۴۰۰}{۵(۹x+۱۰۰)} = ۰$$ (با شرط $۹x+۱۰۰ \neq ۰$)

$$۴x - ۴۰۰ = ۰ \Rightarrow x = ۱۰۰$$

از آنجا که وزن گلدان قبل از ذوب‌شدن $۹x$ است، درنتیجه وزن گلدان قبل از ذوب‌شدن برابر با ۹۰۰ گرم است.

۲. دو شیر آب A و B به یک استخر متصل‌اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پُر می‌کند. چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در ۱۲ ساعت پُر می‌شود. اگر شیر B به‌تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پُر می‌شود.



حل: فرض کنیم شیر B استخر را در x ساعت پُر کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، پس از یک ساعت $\frac{V}{x}$ استخر پر می‌شود و به همین ترتیب اگر شیر A باز باشد، پس از یک ساعت $\frac{V}{x-۱۰}$ استخر پُر می‌شود. حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{V}{x} + \frac{V}{x-۱۰} = \frac{V}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x-۱۰} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x-۱۰} - \frac{۱}{۱۲} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} - \frac{x(x-۱۰)}{۱۲x(x-۱۰)} = ۰ \Rightarrow \frac{\quad}{۱۲x(x-۱۰)} = ۰ \Rightarrow \cdots$$

۳. یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هریک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هریک به اندازهٔ $\frac{۱}{۶}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده‌اند؟[۱]

■ **حل** : فرض کنید در ابتدا n نفر بوده‌اند؛ بنابراین به هریک $\frac{۱}{n}$ کیک رسید، در مرحلهٔ بعد به هریک $\frac{۱}{n+۱}$ کیک رسید. از آنجا که در این مرحله به هریک $\frac{۱}{۶}$ کمتر رسیده است،خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}=\frac{۱}{۶}$$

با حل این معادله n=۲ به‌دست می‌آید.

تمرین

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۳x-۵}{x+۳}=۱$

ب) $\frac{۳x-۲}{x}+\frac{۲x+۵}{x+۳}=۵$

پ) $\frac{۲}{x+۲}+\frac{x}{x+۲}=x+۳$

ت) $\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\frac{۱+x}{x}=\frac{x-۱}{x-۲}$

ث) $\frac{۳}{x-۱}-\frac{۲}{x+۳}=\frac{۴}{x-۲}$

ج) $\frac{۱۱}{x^۲-۴}+\frac{x+۳}{۲-x}=\frac{۲x-۳}{x+۲}$

۲. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{۵}{۱۲}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۳. هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به‌تنهایی برای این کار، ۳ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هرکدام از چاپگرها به‌تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟

۴. به ازای چه مقدار k، معادلهٔ $\frac{۳t^۲+k}{(t^۲+۱)^۲-۶۸}=\frac{۴-t}{۲-۲t}$ دارای جواب t=−۳ است.

۱. این مسئله اقتباس از کتاب جبر و مقابله خوارزمی است که در آن کتاب به‌جای (کیک)، کلمه درهم آمده است.

فصل سوم

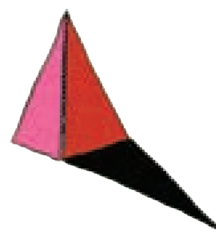
تابع

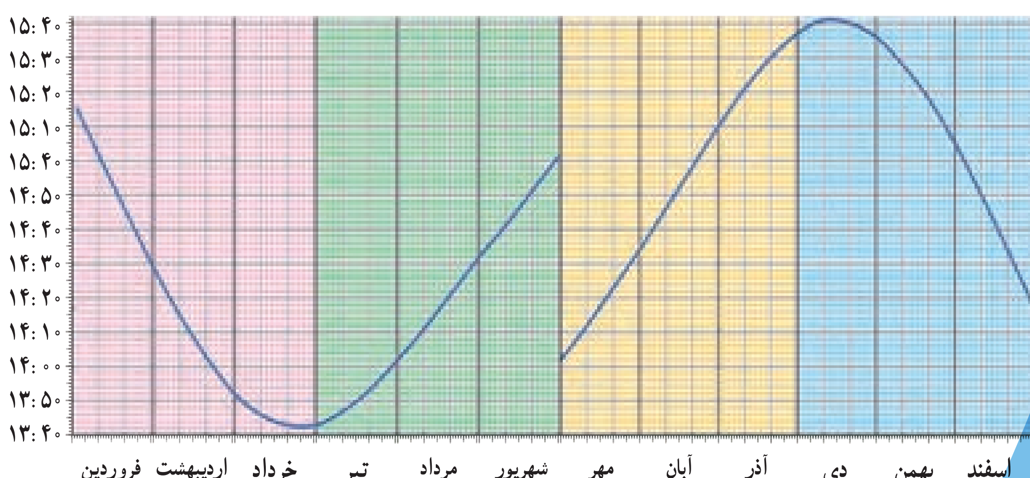
درس ۱ **مفهوم تابع**

درس ۲ **ضابطهٔ جبری تابع**

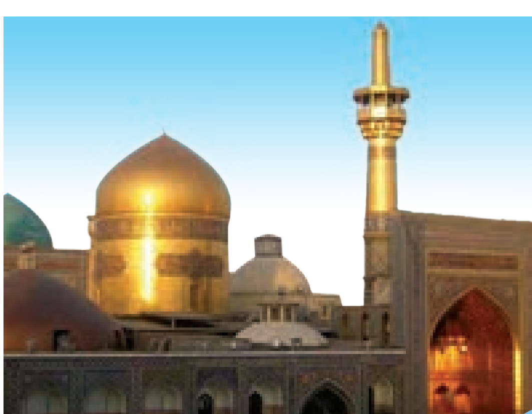
درس ۳ **نمودار تابع خطی**

درس ٤ **نمودار تابع درجه۲**





نمودار ساعتی که خورشید نسبت به مشهد در جهت قبله قرار می‌گیرد.



یکی از شیوه‌های جهت‌یابی قبله استفاده از سایهٔ شاخص، هنگام قرار گرفتن خورشید در راستای قبله است.
در هر منطقه با تعیین ساعت دقیقی که خورشید در جهت قبله قرار می‌گیرد می‌توان با دقت بسیار بالایی جهت قبله در آن منطقه را تعیین کرد.

درس ۱

مفهوم تابع

سال گذشته در فصل خط و معادله‌های خطی با مثال دوچرخه‌سوار، رابطه‌ای را بین زمان و مسافت طی شده تعریف کردیم.

در مثال مذکور، دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می‌کند. جدول زیر رابطهٔ بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می‌دهد: (جدول را کامل کنید)

زمان برحسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	۲/۵	...	۴/۵	۵
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲	...	۵	۸	۹	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این مثال متغیّر زمان (t) به صورت مستقل تغییر کرده و متغیّر مسافت (d) براساس تغییرات t تغییر می‌کند و در واقع تغییرات متغیّر d تابعی از تغییرات متغیّر t است. این رابطه که می‌توان آن را به‌صورت جبری و به شکل d=۲t نمایش داد، رابطه‌ای خطی نامیده شد. در حالت کلی رابطه‌هایی به‌صورت y=ax+b ، را رابطه‌های خطی نامیدیم.

این رابطه‌ها که نمودار آنها یک خط است، در واقع ارتباط مشخصی بین x و y نقاطی است که روی این خط قرار دارند. به عنوان مثال اگر فرض کنیم y=۲x+۱ معادله یا ضابطهٔ یک خط باشد، مختصات هر نقطه که در این معادله صدق کند به این معناست که آن نقطه روی این خط واقع است و بالعکس اگر نقطه‌ای روی این خط واقع باشد، باید مختصات آن نقطه در معادلهٔ y=۲x+۱ صدق کند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید عرض هر نقطهٔ روی این خط یعنی y، مساوی است با دو برابر طول همان نقطه به علاوهٔ ۱ یعنی (۲x+۱)؛ بنابراین رابطهٔ بین x و y کاملاً معین است در جدول‌های زیر مختصات چند نقطه و رابطهٔ بین x و y آنها براساس ضابطهٔ داده شده، آمده است: (جاهای خالی را پر کنید)

x	۱	۵	۳	...	$\frac{۱}{۲}$	۰	...
y	۱	−۷	...	۳	...	...	۰

y =−۲x+۳

او که مبنای جهان، «زوج» آفرید
خود به ما نزدیک‌تر شد از وَرید
«تابعی» را از زمین تا آسمان
کرده در دل‌های انسان‌ها، نهان
تابع منظورِ ما، «پیوسته» است
«حَد» ، به امیالِ دلِ ما بسته است
دل به بالا تا عنایت می‌کند
حدّ تابع، «بی‌نهایت» می‌کند
هر کسی تا بی‌نهایت را شناخت
چون «مُجانب» سوی آن بالا شتافت

x	۱	۲	...	۰	۱-
y	۲	...	$\frac{۵}{۴}$	...	...

$y = x^{۲}+۱$

در محیـط اطراف خودمان و در جهان طبیعت نیـز پدیده‌هایی می‌توان یافت که در آنها ارتباط خاصی بین دو متغیّر وجود دارد.

به‌عنوان مثالی از این رابطه‌ها می‌توان به رابطهٔ بین قد و وزن افراد اشاره کرد. یکی از روش‌های متداول برای اندازه‌گیری وزن مطلوب در افراد، استفاده از نمایهٔ توده‌بدنی یا نماتوب (BMI) است که طبق رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{نماتوب} = \frac{\text{وزن برحسب کیلوگرم}}{\text{مجذور طول قد برحسب متر}}$$

با اســتفاده از این رابطه، برای هر فرد نماتوب محاسبه می‌شــود که بر اساس این شاخص و به‌صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه‌گیری می‌شود.

الف) نماتوب > ۱۹ ⟸ شخص لاغر است و کمبود وزن دارد

ب) ۱۹ ≤ نماتوب < ۲۵ ⟸ شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است

پ) ۲۵ ≤ نماتوب < ۳۰ ⟸ شخص اضافه وزن دارد

ت) نماتوب ≥ ۳۰ ⟸ شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد

البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطهٔ مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا رفته و نماتوب افزایش می‌یابد. متخصصان علوم تغذیه با توجّه به سن افراد مطابق جدول روبه‌رو نماتوب مناسب افراد مختلف را تعیین می‌کنند.

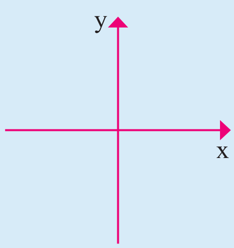
گروه سنی	نماتوب
۲۴ـ۱۹	۲۲
۳۴ـ۲۵	۲۳
۴۴ـ۳۵	۲۴
۵۴ـ۴۵	۲۵
۶۴ـ۵۵	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

پس از یافتن نماتوب متناســب با گروه سنی، هر فرد می‌تواند وزن مطلوب خود را از فرمول زیر به‌دست آورد:

توان دوم یا مربع قد برحسب متر × نماتوب = وزن مطلوب برحسب کیلوگرم

بــا دقت در رابطه یا تســاوی فوق تشــخیص می‌دهید که وزن مطلــوب، تابعی از طول قد هر فرد اســت (بســتگی به طــول قد دارد) و نیــز درمی‌یابید کــه وزن مطلوب به نماتــوب نیز بســتگی دارد. در فرمول فوق

نمودار خـط $y=۴x-۲$ را روی محورهای زیر رسـم کرده و جدول داده شـده را کامل کنید:



x	y
۰	...
...	۰
$\frac{۱}{۲}$	...
...	۲

طـول قد و نماتـوب متغیّرهایی هسـتند که وزنِ مطلوب، متغیّری اسـت که وابسـته به این دو متغیّر اسـت.
آیا می‌توانید با توجّه به جدول قبل اگر فردی در گروه سـنی ۵۴ – ۴۵ قرار داشـته باشد و طول قد این فرد ۱۸۹ سانتی‌متر باشد، وزن مطلوب برای این شخص را تعیین کنید؟

فعالیت

می‌دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi \times r^۲$ به‌دست می‌آید. در این رابطه π عددی است که تقریباً $\pi = ۳/۱۴$ در نظر گرفته می‌شود و r شعاع دایره است :

۱. آیا متغیّر S تابعی از شعاع دایره است؟
۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟
۳. کدام متغیّر، مستقل و کدام متغیّر، وابسته است؟
۴. جدول زیر را کامل کنید.

r بر حسب سانتی‌متر (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
S برحسب سانتی‌متر مربع (مساحت)	π	...	۴π	...	...
P برحسب سانتی‌متر (محیط)	...	...	...	۶π	...

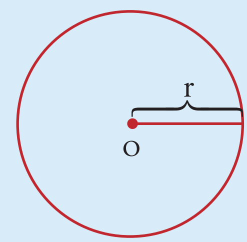
در رابطهٔ خطی y= ۳x +۱ نیز y، تابعی از تغییرات متغیّر مسـتقل x اسـت، یعنی وقتی x را به دلخواه و مسـتقل، تغییر می‌دهیم، y نیز تغییر می‌کند. حال اگر xها را روی محور افقی و yهای حاصل را روی محور عمـودی در نظـر بگیریم، به ازای هر x و y حاصل، یک نقطه در صفحه مشـخص می‌شـود که آن را با یک زوج به شـکل (x و y) نمایش می‌دهیم. ترتیب قرار گرفتن x و y در این زوج اهمیت دارد و به همین دلیل آن را یـک **زوج مرتب** می‌نامیم. در زوج مرتـب (x و y)، x را مؤلّفه یا مختص اول و y را مؤلّفهٔ دوم می‌نامیم.
(اگر (a,b) = (c , d) آنگاه b = d و a = c و برعکس اگر b = d و a = c آنگاه (a , b) = (c , d))

فعالیت

۱. جدول زیر را کامل کنید.

x	–۱	...	...	...	...	۲	y= ۳x + ۱
y	–۲	...	...	...	$۳\sqrt{۲}+۱$	...	
(x,y)	(–۱ ، –۲)	(... ، ۱)	($\frac{۲}{۳}$ ، ۳)	(۱ ، ...)	(... ، ...)	(... ، ...)	

$\frac{۲\pi r}{۲r} = \pi$



ریاضی‌دان و منجم ایرانی، جمشید غیاث‌الدین کاشانی در اوایل قرن هشـتم هـ.ق توانسـت عدد π را با دقتی که تا ۱۵۰ سـال بعد از وی بی‌نظیر ماند، محاسبه کند. او کتـاب رسـالهٔ محیطیـه خود را با این جمله شـروع می‌کند:
«به‌نام او که از اندازهٔ نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است».

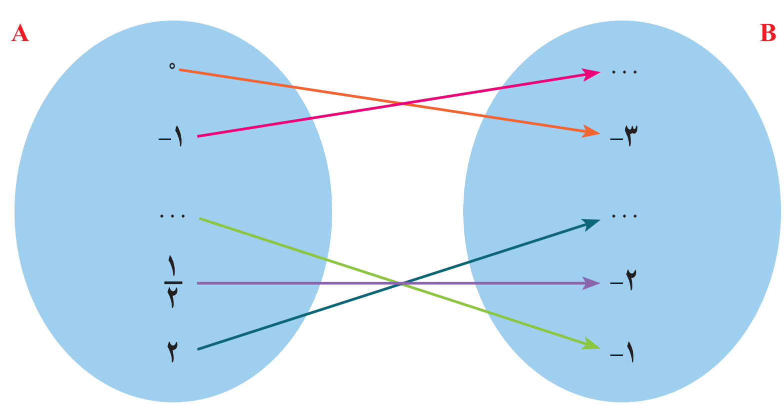
۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای $y = x^2$ تشکیل دهید.

استفاده از نمودار وِن و رسم پیکان‌هایی از طرف متغیّر مستقل به سمتِ متغیّر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیّر کمک می‌کند. به کار در کلاس زیر توجّه کنید:

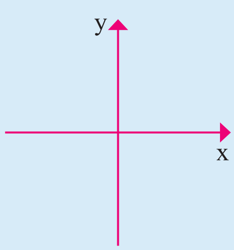
کار در کلاس

با توجّه به رابطهٔ خطی $y = 2x - 3$، اگر فرض کنیم، xها یا متغیّرهای مستقل اعضای مجموعهٔ $A = \left\{0, 1, -1, \frac{1}{2}\right\}$ باشند. ابتدا جدول مربوط به این رابطه را مشابه جدول قبل، تشکیل می‌دهیم و سپس نمودار پیکانی آن را رسم می‌کنیم. (جاهای خالی را پر کنید.)

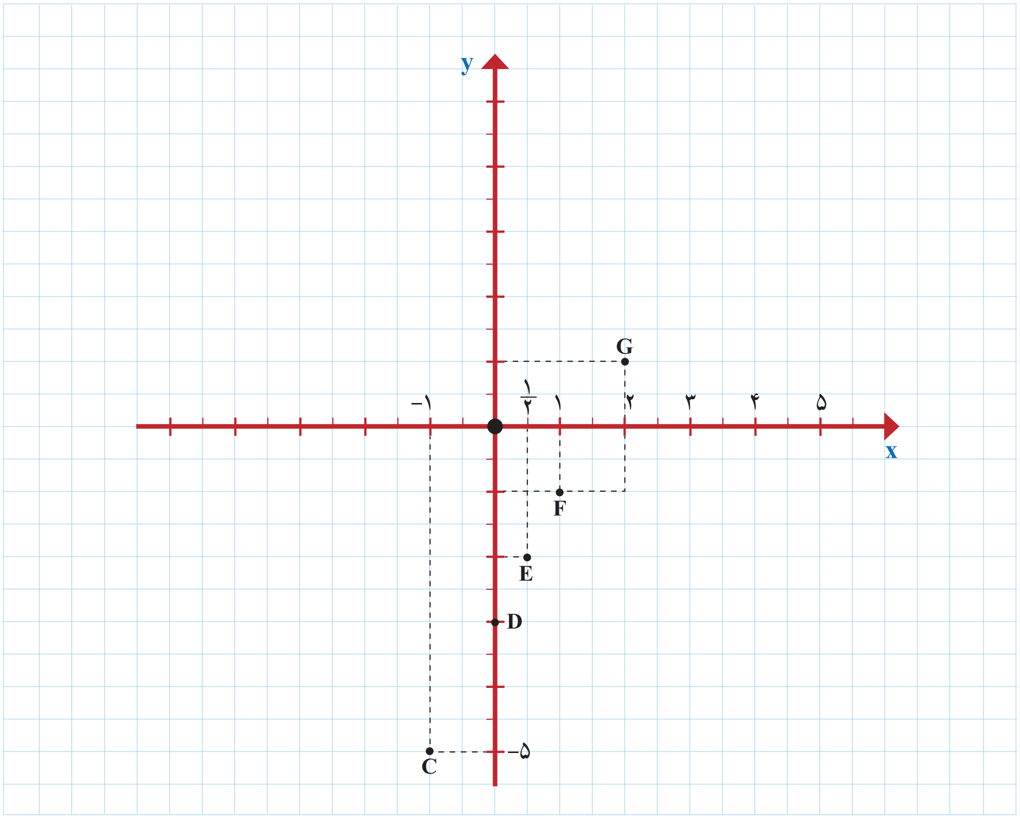
x	۱-	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲	$y = 2x - 3$
y	۵-	...	...	...	...	
(x,y)	(۱- ، ۵-) C	(۰ ، ...) D	... E	... F	... G	



نمودار خط $y=2x-3$ را روی دستگاه مختصات رسم کنید:



اگر هر یک از «زوج مرتب»های جدول قبل را یک نقطه در صفحه فرض کنیم، **نمودار مختصاتی** رابطهٔ خطیِ قبل به‌صورت زیر رسم می‌شود:



◆ **سؤال** : برای رابطهٔ $y = x^۲$ که $x \in A = \{-۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$ مشابه مثالِ قبل، جدول، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

مفهوم تابع

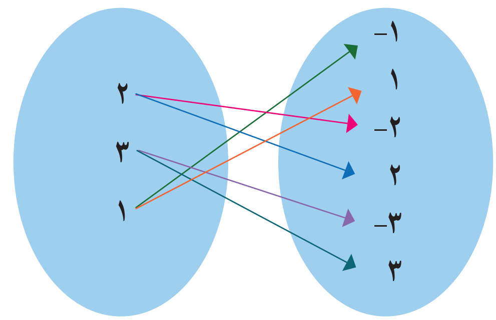
در تمام فعالیت‌ها، مثال‌ها و تمرین‌های قبل، رابطه‌ها طوری تعریف شده بودند که به ازای هر متغیّر مستقل مانند x، دقیقاً یک مقدار برای y به‌دست می‌آید؛ مثلاً در رابطهٔ $y = ۲x + ۳$ اگر x را مساوی ۲ فرض کنیم، $y = ۲ \times ۲ + ۳ = ۷$ به‌دست می‌آید.

اگر این ویژگی برای یک رابطه وجود داشته باشد، آن را تابع می‌نامند. به‌عبارت دقیق‌تر:

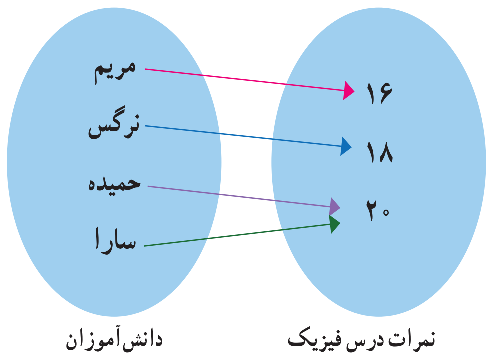
یک رابطه بیــن دو مجموعهٔ A و B (از مجموعهٔ A به مجموعهٔB) یک تابع نامیده می‌شــود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعهٔA دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.

فعالیت

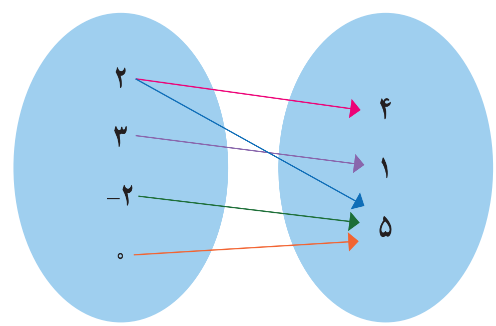
۱ . کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع‌اند؟ چرا؟



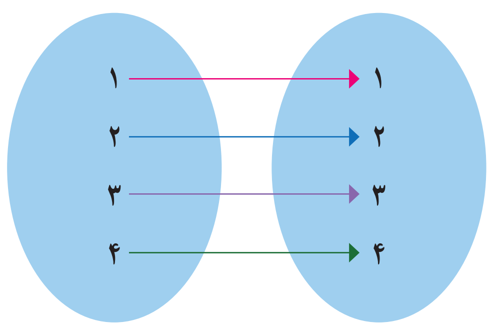
تابع .... زیرا



تابع .... زیرا



تابع .... زیرا



تابع .... زیرا

۲ . کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

الف) F = {(۲,۳) , (۳,۳) , (۴,۳) , (۵,۳)}

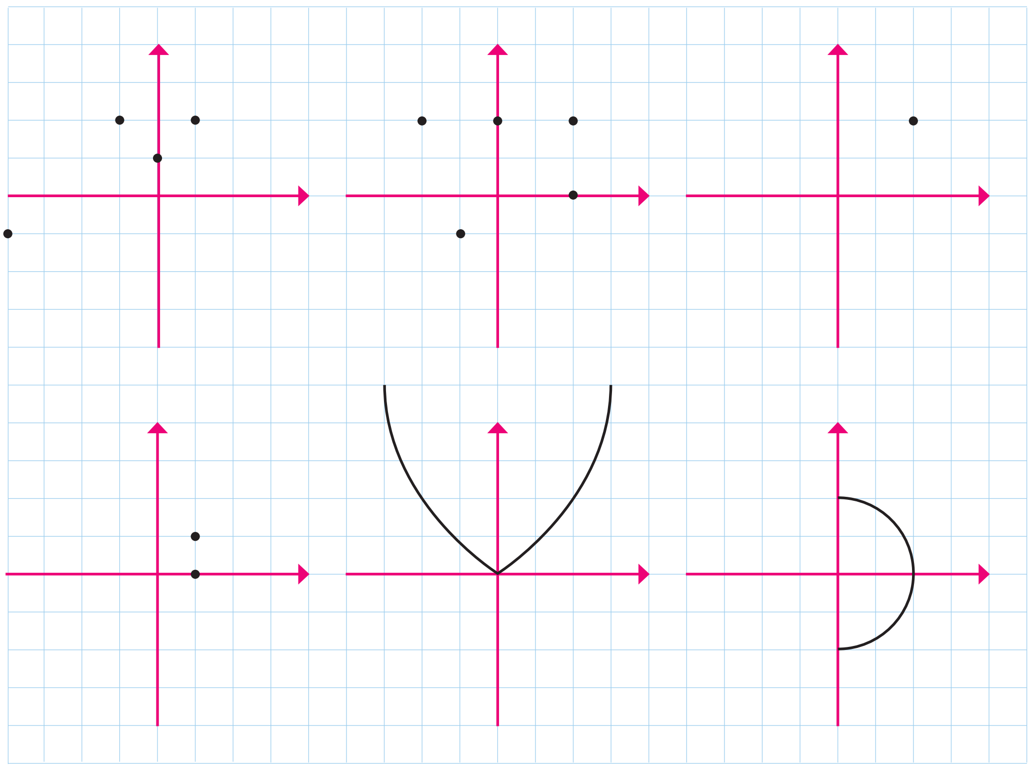
ب) G = {(۴,۱) , (۲,−۱) , (۱,−۱) , (۴,۲)}

پ) H = {(۲,۳)}

ت) I = {(۳,۳)}

ث) J = {(۱,۱) , (۲,۲) , (۳,۳) , (۲,۴)}

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع‌اند؟ چرا؟



۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شدهٔ زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوغاتیِ آن شهر را نسبت می‌دهد.

تابع است □ تابع نیست □

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.

تابع است □ تابع نیست □

پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نمایندهٔ آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

تابع است □ تابع نیست □

ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبلهٔ او را نسبت می‌دهد.

تابع است □ تابع نیست □

با توجّه به فعالیت قبل و تعریف تابع می‌توان گفت:

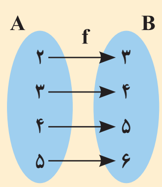
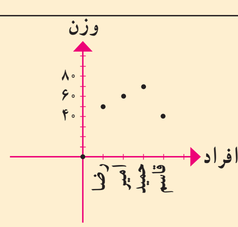
*اگر رابطهٔ بین x و y را (x متغیّر مستقل) به‌صورت جدولی و زوج مرتبی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که **هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.**

*اگر رابطه **از** مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را با نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که **از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.**

*اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که **هیچ دو نقطه‌ای روی خطی که موازی محور yها باشد، قرار نگیرند.**

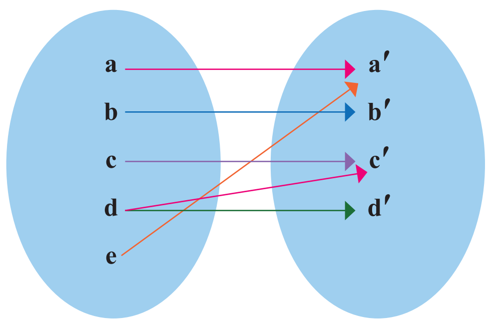
کار در کلاس

در جدول زیر در هر سطر یکی از نمایش‌های رابطه‌ای مشخص شده است. ابتدا برای هر رابطه جاهای خالی را پر کنید سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است.

جدولی	توصیفی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی	نمایش پیکانی
				
x | y ۱ | ۱ ۲ | ۴ ۳ | ۹ ۴ | ۱۶				
	f رابطه‌ای است که به هر عضو مجموعهٔ A={۰,۱,−۱,۲ ,−۲} توان چهارم آن را نسبت می‌دهد			
		f={(رضا , فوتبال) و (علی , شنا) و (آرش , والیبال) و (رضا , شنا) و (علی , تیراندازی) و (حمید , کشتی)}		
				

تمرین

۱. نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟



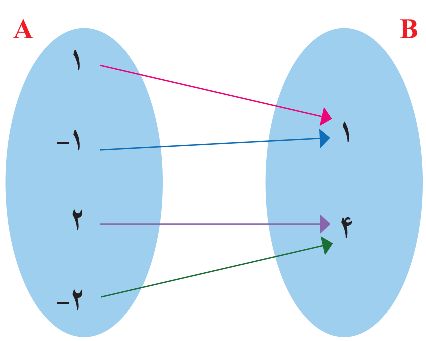
۲. اگر A مجموعه‌ای ۳ عضوی و B مجموعه‌ای ۲ عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را تعریف کنید.

۳. در رابطهٔ زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

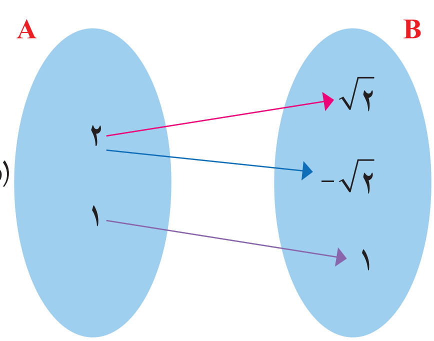
$$f = \{(۲,۳), (\cdots,۵), (۳,\cdots), (\cdots,\cdots)\}$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟

الف)



ب)



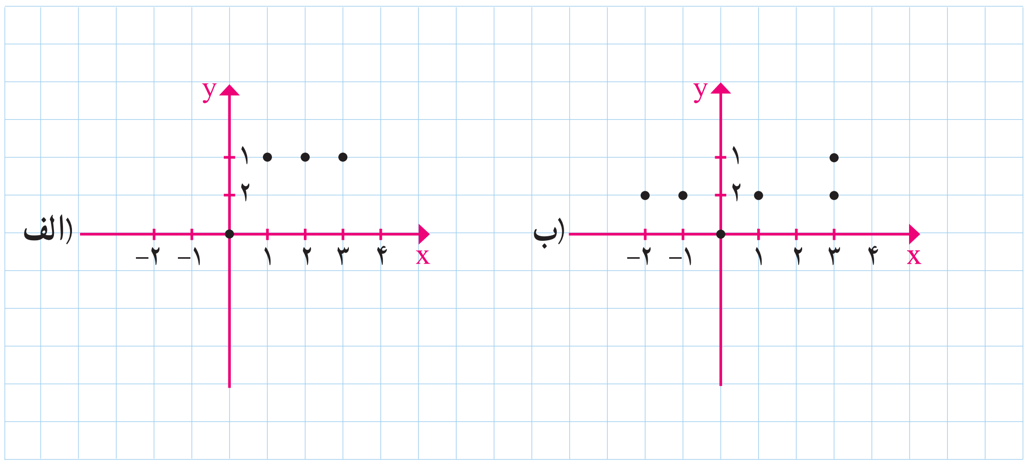
پ) $f = \{(۲,۱), (۳,۲), (۲,۲), (۳,۴), (۵,۱)\}$

ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شمارهٔ ملی او را نسبت می‌دهد.

۵. اگر رابطهٔ f تابع باشد، در این صورت حاصل $x^{۲}+y^{۲}$ را به‌دست آورید. (مجموعهٔ f را پس از محاسبهٔ x و y بنویسید.)

$$f=\{(۲,x+y),(۲,۴),(۵,۲),(۳,۴),(۵,x-y)\}$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می‌کند؟



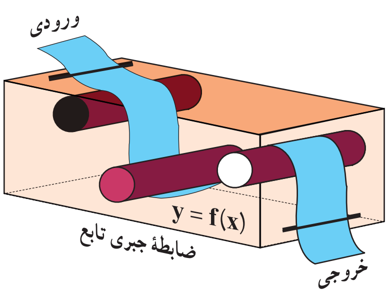
توابع در شاخه‌های مختلف علوم کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم‌گیری‌های اقتصادی استفاده می‌شود و یا در فیزیک، هنگامی که می‌خواهیم رابطهٔ بین چند متغیّر را بیان کنیم، مخصوصاً هنگامی که مقدار یک متغیّر کاملاً وابسته به متغیّرهای دیگر است، از توابع استفاده می‌شود.

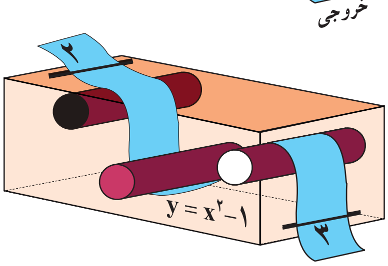
توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملکرد در نظر گرفته می‌شوند و کاری را بر روی ورودی‌های خود انجام می‌دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل‌سازی ساختمان داده‌ها و تأثیرات الگوریتم می‌بینیم.

درس ۲

ضابطهٔ جبری تابع

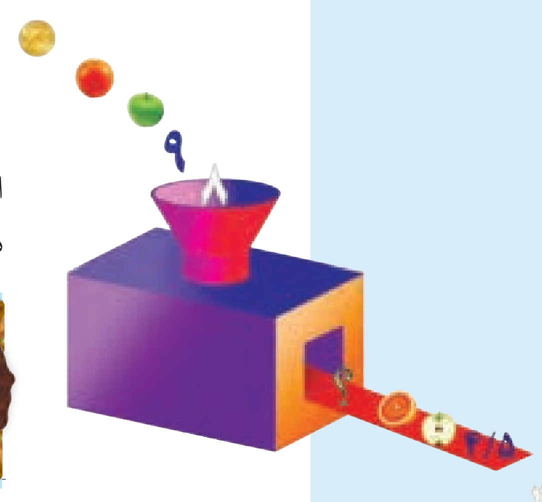
گاهی اوقات می‌توانیم رابطهٔ بین مؤلفهٔ اول و دومِ زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع را با یک ضابطه (قانون) بیان کنیم. به‌طور مثال تابعِ $f=\left\{(۱,۴),(۲,۵),(-۱,۲),\left(\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲}\right)\right\}$ را در نظر می‌گیریم در این تابع همواره با اضافه کردنِ ۳ واحد به مؤلفهٔ اول مؤلفهٔ دوم، به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر اگر $(x,y)\in f$، در این صورت $y=x+۳$. معادلهٔ $y=x+۳$ را ضابطهٔ تابع f می‌نامیم. اگر تابع f را به‌عنوان یک ماشین درنظر بگیریم و x متغیّر مستقل فرض شود، در این صورت تأثیر تابع f روی x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان y (متغیّر وابسته) است؛ یعنی، $y=f(x)$





دامنه و بُرد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای یک تابع، مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفه‌های اول را **دامنهٔ تابع** و مجموعهٔ شامل همهٔ مؤلفه‌های دوم را **بُرد تابع** می‌نامیم. دامنهٔ تابع f را با D_f[۱] و بُرد آن را با R_f[۲] نشان می‌دهیم.



یک تابع مانند f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، قانون یا ضابطه‌ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را نسبت دهد.

۱. Domain
۲. Range

برای نمایش تابعی چون f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B می‌نویسیم : $\begin{cases} f: A \to B \\ y = f(x) \end{cases}$ که $y = f(x)$ را ضابطهٔ تابع و A را دامنهٔ تابع f درنظر می‌گیریم.

فعالیت

با توجّه به ضابطهٔ هر تابع و مانند نمونه، مجموعهٔ مقادیر یا بُرد هر تابع را مشخص کنید.

$$\begin{array}{l} f: A \to \mathbb{R} \\ f(x) = ۲x^{۲} + ۱ \end{array} \quad , A = \left\{ -۱ , \sqrt{۲} , ۲ , ۱ , ۰ , \frac{۱}{۲} \right\}$$

x	$f(x) = ۲x^{۲} + ۱$
-۱	$f(-۱) = ۲ \times (-۱)^{۲} + ۱ = ۳$
$\sqrt{۲}$	$f(\sqrt{۲}) = ۲ \times (\sqrt{۲})^{۲} + ۱ = ۵$
۲	$f(۲) = ۲ \times (۲)^{۲} + ۱ = ۹$
۱	$f(۱) = ۲ \times (۱)^{۲} + ۱ = ۳$
۰	$f(۰) = ۲ \times (۰)^{۲} + ۱ = ۱$
$\frac{۱}{۲}$	$f(\frac{۱}{۲}) = ۲ \times (\frac{۱}{۲})^{۲} + ۱ = \frac{۳}{۲}$

$$\to R_f = \left\{ ۳ , ۵ , ۹ , ۱ , \frac{۳}{۲} \right\}$$

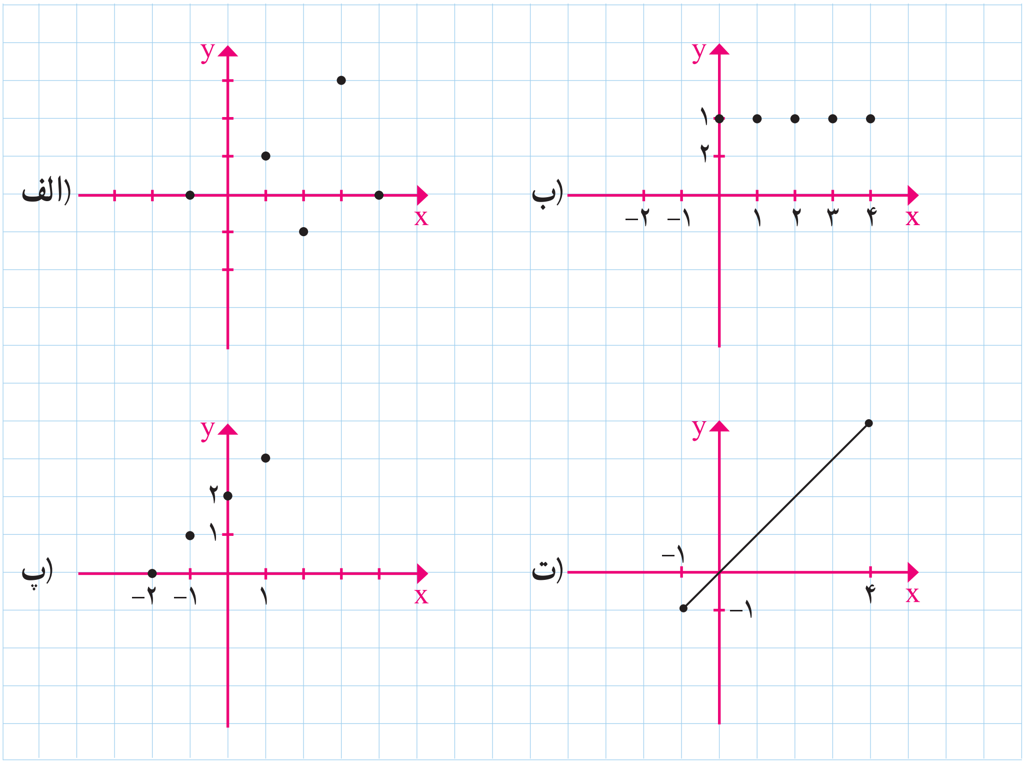
الف) $\begin{array}{l} f: A \to B \\ f(x) = x^{۳} - ۱ \end{array} \quad , A = \left\{ ۱ , -۱ , ۰ , ۴ , \sqrt[۳]{۳} , \frac{۱}{۳} , ۲ \right\}$

ب) $\begin{array}{l} f: A \to B \\ f(x) = \sqrt{x + ۱} - ۱ \end{array} \quad , A = \{ ۰ , -۱ , ۸ , ۳ , ۲ \}$

پ) $\begin{array}{l} f: A \to B \\ f(x) = \dfrac{x + ۱}{x - ۲} \end{array} \quad , A = \left\{ -۲ , ۰ , ۱ , \sqrt{۲} , \frac{۱}{۲} \right\}$

کار در کلاس

۱. برای هریک از توابع زیر، دامنه و بُرد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطهٔ هر تابع را بنویسید.



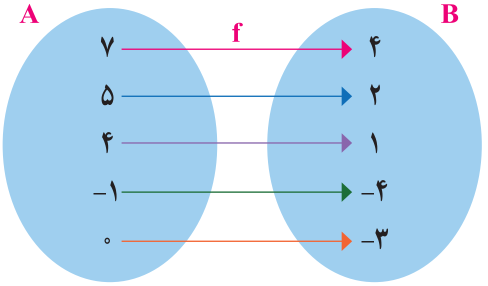
۲. دامنه و برد هریک از تابع‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $f: A \to B \qquad R=\{۲,۳,۴,۵,...\}$

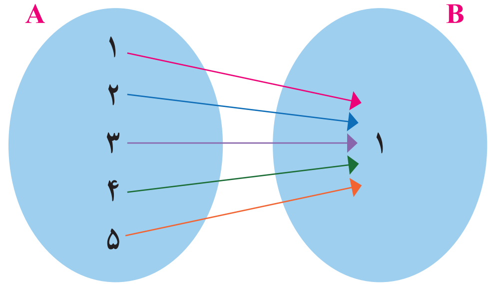
$f(x)=x+۴ \qquad A=\{۲, ... , ... , ... , ...\}$

ب) $f=\{(۱,-۱),(۲,-۲),(۳,-۳),(۴,-۴),(\sqrt{۲},-\sqrt{۲})\}$

پ)



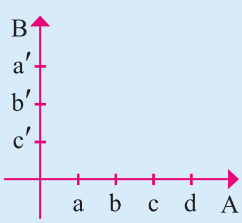
ت)



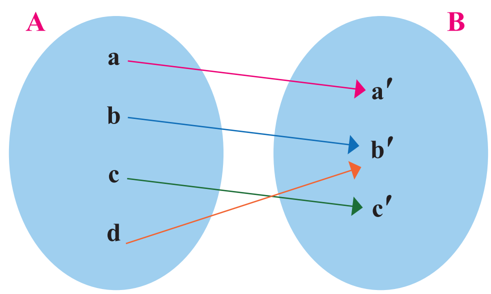
ث) $f=\left\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}),(\sqrt{۲},\sqrt{۲}),(۰,۰)\right\}$

تمرین

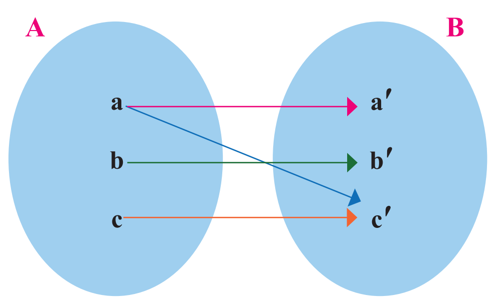
۱. کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



الف)



ب)



پ) $f=\{(۲,-۱),(۳,-۱),(۱,-۱),(۴,۱),(۲,۴)\}$

ت) $g=\{(۱,۱)\}$

ث) $f: \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$

$f(x)=۲x+۱$

ج) $f: IR \to IR$
$f(x) = x$

ح) $f: IR \to IR$
$f(x) = ۲$

۲. بُرد هریک از توابع زیر را با توجّه به ضابطه و دامنهٔ داده شده، به‌دست آورید.

الف) $f: A \to B$
$f(x) = x^{۲} + x + ۱$, $A = \{۰, -۱, ۱, ۲, -۲\}$

ب) $f: A \to B$
$f(x) = \frac{x+۱}{x}$, $A = \left\{\frac{۱}{۲}, ۱, -۱, ۲, -۲\right\}$

پ) $f: A \to B$
$f(x) = \sqrt{x+۱}$, $A = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۸\}$

ت) $f: A \to B$
$f(x) = x$, $A = w = \{۰, ۱, ۲, \cdots\}$

ث) $f: A \to B$
$f(x) = ۰$, $A = \mathbb{R}$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می‌دهد. f کدام تابع است؟ حاصل $f(۳)$ را بیابید.

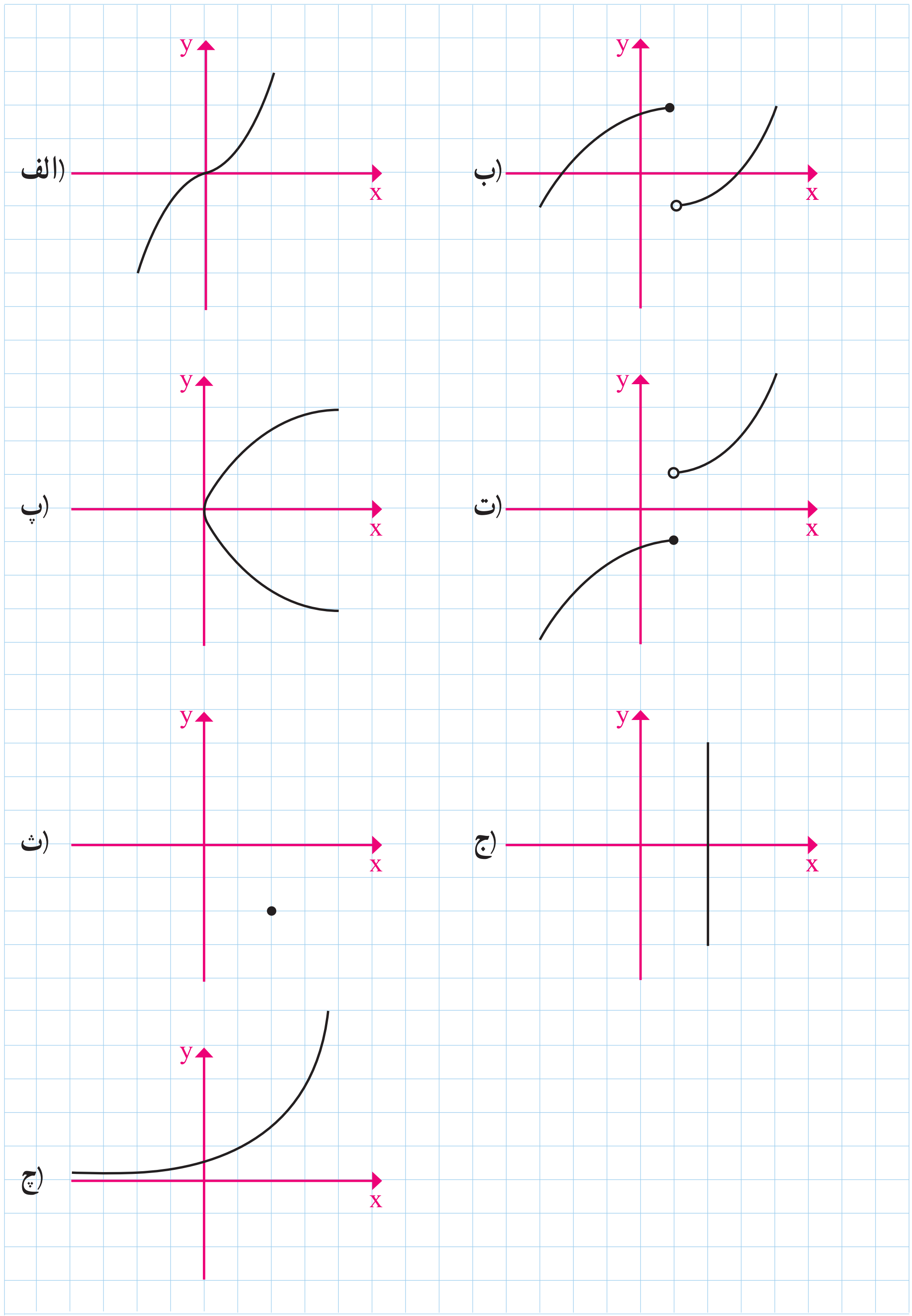
الف) $f: IR \to IR$
$f(x) = ۲(x-۴)^{۳}$

ب) $f: IR \to IR$
$f(x) = ۲\sqrt[۳]{x-۴}$

پ) $f: IR \to IR$
$f(x) = ۲x^{۳} - ۴$

ت) $f: IR \to IR$
$f(x) = ۲\sqrt[۳]{x-۴}$

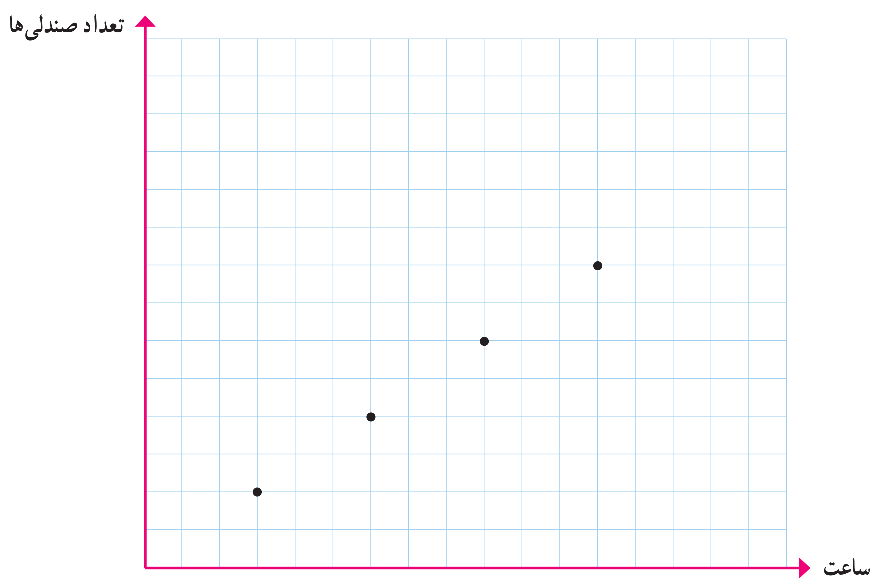
۴. کدام نمودار، نمایش یک تابع می‌باشد؟ چرا؟



درس ۳

نمودار تابع خطی

سؤال: نمودار زیر تعداد صندلی‌هایی را که در پایان هر سه ساعت کار در یک کارگاه تولید می‌شوند، نشان می‌دهد. آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش‌بینی کنید؟



– آیا تعداد صندلی‌های تولید شده در پایان هشتمین ساعت کاری بیشتر از پنج عدد است؟

– آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولیدشده در این کارگاه در پایان هر ساعت خاص را پیش‌بینی کنید؟

فعالیت

الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده است ۵ سانتی‌متر است و به‌ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود.

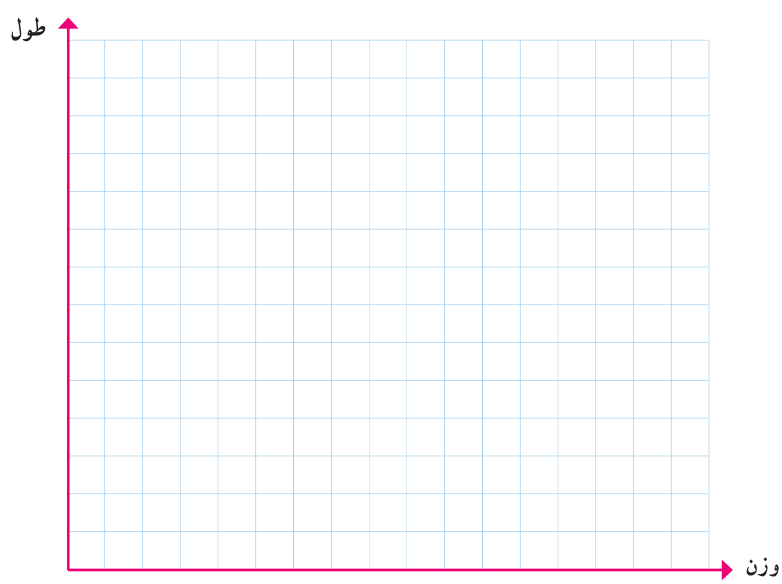
طول فنر را در شکل‌های زیر مشخص کنید.

ب) جدول زیر را تکمیل نمایید.

اندازه وزنه (بر حسب کیلو گرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (برحسب سانتیمتر)						

پ) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر f(۱) , f(۴) , f(۸) و f(۱۰) (بر حسب سانتی‌متر) را محاسبه کنید.

ت) نقاط به‌دست آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم، مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



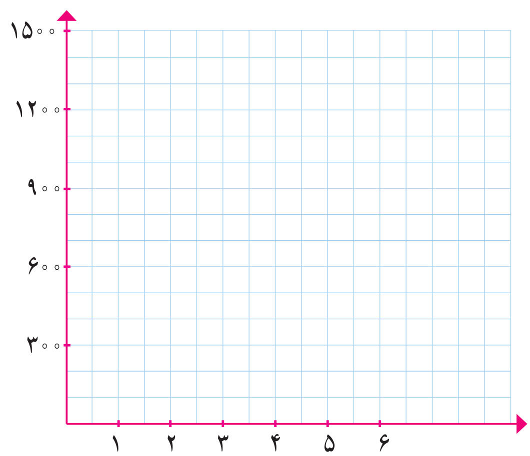
فعالیت

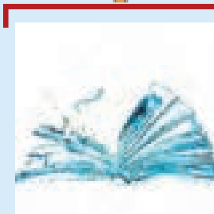
یک کارخانهٔ تولید **لوله‌های آبیاری کشاورزی**[1] در هر ساعت ۰/۳ کیلومتر لوله تولید می‌کند.

اگر متراژ لوله‌ای را که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند، برحسب متر با f(x) نشان دهیم. جدول روبه‌رو را برای f(x) به ازای مقادیر مختلف x کامل نمایید.

x بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
f(x) برحسب متر					

نقاط به‌دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.





کتاب و آب
هر دو در بحران‌اند؛
یکی از کم‌مصرفی،
دیگری از پرمصرفی!

هر تابع به‌صورت $y=f(x)$ که در آن $y=mx+h$، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

توابع به‌دست آمده در فعالیت ۱ و ۲ هر دو توابع خطّی‌اند.

---

۱. کشاورزی یکی از مهم‌ترین بخش‌های جامعه است که ۱۸ درصد تولید ناخالص ملی، ۲۵ درصد اشتغال‌زایی، تأمین ۸۵ درصد غذای جامعه، ۲۵ درصد صادرات غیرنفتی و فراهم کردن بخش عمده‌ای از مواد اولیه مورد استفاده در صنعت را عهده‌دار است. بنابراین رشد و توسعه در این بخش زمینه‌ساز پیشرفت اقتصادی، اجتماعی و صنعتی کشور است. ایران به دلیل موقعیت جغرافیایی خاص، دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است. از طرف دیگر، آمار و ارقام موجود در بخش کشاورزی نشان‌دهندهٔ این است که در بسیاری از مناطق در مقابل آب در دسترس، محدودیت زمین وجود نداشته و هرچه امکان صرفه جویی در مصرف آب یا استحصال منابع آبی جدید وجود داشته باشد، می‌توان میزان کشت آبی و نهایتاً میزان تولیدات کشاورزی را بالا برد. بخش کشاورزی با ۹۲ درصد بزرگ ترین و مهم‌ترین مصرف کنندهٔ آب در کشور به شمار می‌رود که متأسفانه بیش از ۸۰ درصد اتلاف منابع آب به دلیل عدم استفاده از فنّاوری (تکنولوژی)های پیشرفتهٔ آبیاری در این بخش به هدر می‌رود. تعدادی از کارشناسان معتقدند که مدیریت منابع آب کشور در شرایط فعلی مدیریت مناسبی نیست و موجب شده تا طی سال‌های اخیر شاهد کاهش منابع آب‌های زیرزمینی و نیز کاهش سطح زیرکشت کشاورزی در برخی مناطق باشیم. لذا دستیابی به بهبود بهره‌وری آب به عنوان شاخص مصرف آب در انواع تولیدات کشاورزی پایدار، امری ضروری است.

رسم نمودار تابع درجه یک

برای رسـم نمودار تابع $y=mx+h$ دو نقطه از نمودار تابع را در دسـتگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.

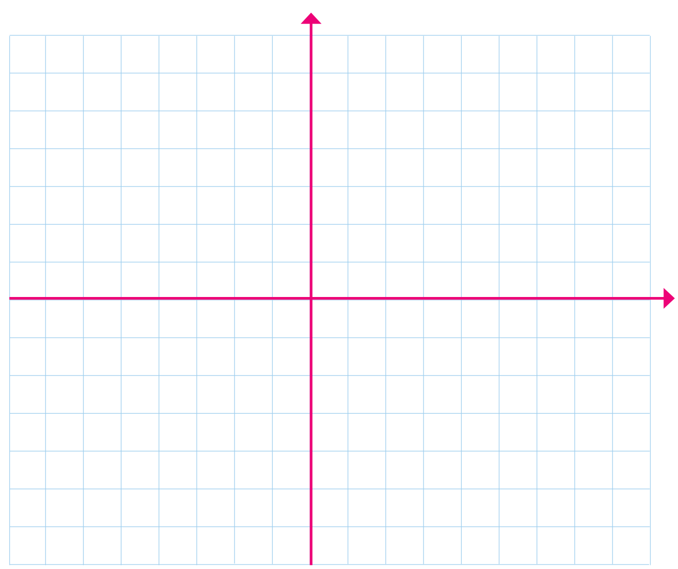
کار درکلاس

در یک تابع خطی $f(۰)=۲$ و $f(۲)=۳$ با توجّه به معادلهٔ خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده‌اید، ابتدا m و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

$$m=\frac{۳-\cdots}{\cdots-۰}=\cdots$$

معادله خط:

بنابراین $f(x)=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$



کار درکلاس

جـدول زیر رابطهٔ بین عمق و دمای سـنگ‌ها را در زیر زمین نشـان می‌دهد. x **معرف عمق** (برحسـب کیلومتر) و y **معرف دما** (بر حسب سانتی‌گراد) است.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی برحسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع $y=f(x)$ را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به ۴۴۰ درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟

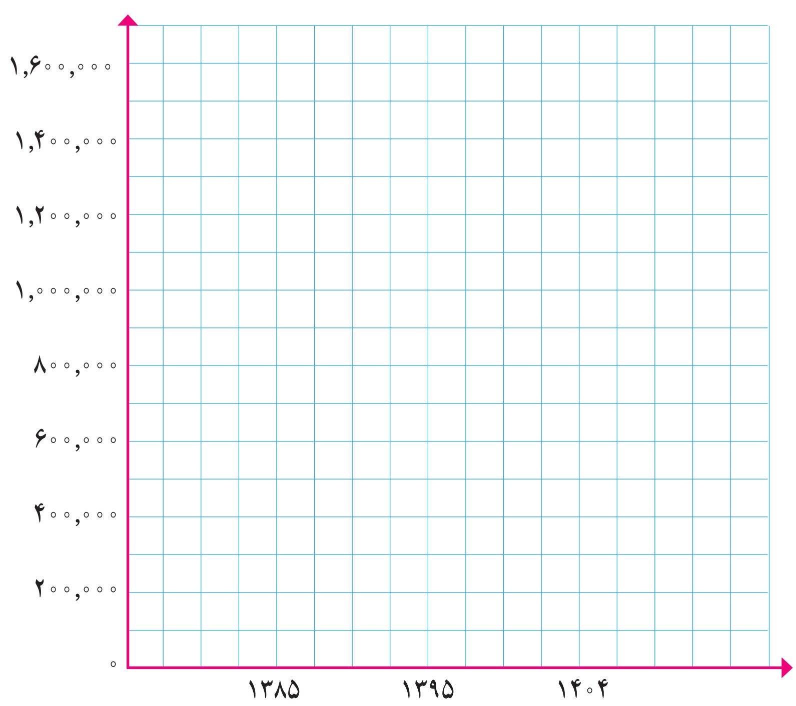
$f(۲)$	$f(۱)$	معادله خط یا ضابطهٔ تابع: $y=f(x)=mx+h$	شیب خط: $m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$

کار در کلاس

در برنامه‌ریزی اقتصادی، اجتماعــی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش‌بینی جمعیت در برنامه‌ریزی است. برای برآورد جمعیت، مدل‌های مختلفی وجود دارد که هرکدام ویژگی‌های خود را دارند. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجهٔ اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه‌ریزی بستگی دارد. یکی از این روش‌ها، مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیه می‌کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می‌کند. (روند رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیّر زمان است.)

فرض کنیم جمعیت یک شــهر در ســال ۱۳۸۵ برابر یک میلیون و پنجاه هزار نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگوی رشد خطی را در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال ۱۴۰۵ به‌طور تقریبی برآورد کنید.

نرخ رشد:
به میزان افزایش یک کمیت (نظیر جمعیت) در واحد زمان، نرخ رشد گفته می‌شود.



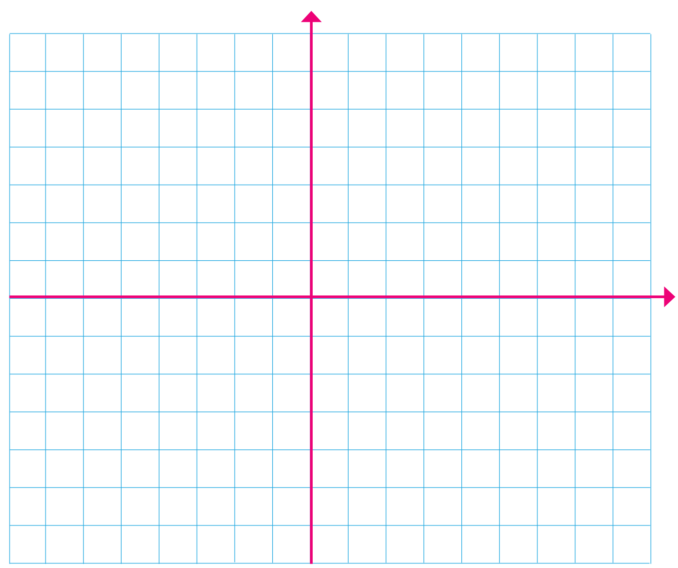
کار درکلاس

ضابطهٔ تابع محیط مســتطیل‌هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشــتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.

ــ آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟

کار درکلاس

اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-۱)=۲$ باشد، نمودار و ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.



تمرین

۱. مقادیر m و n را چنان بیابید تا در تابع با ضابطهٔ $f(x)=mx+n$ داشته باشیم: $f(۲)=۴$ و $f(۱)=۱$.

۲. ضابطهٔ تابع خطی f را که از نقاط $(۲,۳)$ و $(۴,۱)$ می‌گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.

۳. در تابع خطی f داریم $f(۱)=۵$ و $f(۲)=۸$، مقادیر $f(-۳)$ و $f(۵)$ را بیابید.

۴. نمـودار تابعی خطی را رسـم کنیـد که دامنهٔ آن برابـر $A=\{x\in \mathbb{R} | \circ \leq x \leq 1\circ\}$ و از نقطه $A\begin{vmatrix} ۵ \\ ۲ \end{vmatrix}$ بگذرد.

۵. نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(۲)=۷$ اسـت. در این صورت اختلاف $f(\circ/۱)$ و $f(-\circ/۱)$ را به‌دست آورید.

۶. رابطهٔ بین درجهٔ دما برحسـب سـانتی گراد و فارانهایت به صورت $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$ است. دمای یک جسم ۲۰ درجهٔ سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارانهایت چقدر افزایش داشته است؟

۷. یـک شـرکت برای تولیـد x کالا، $C(x)=۳\circ\circ\circ+۵\circ x$ تومان هزینه می‌کنـد و هر کالا را ۷۰ تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

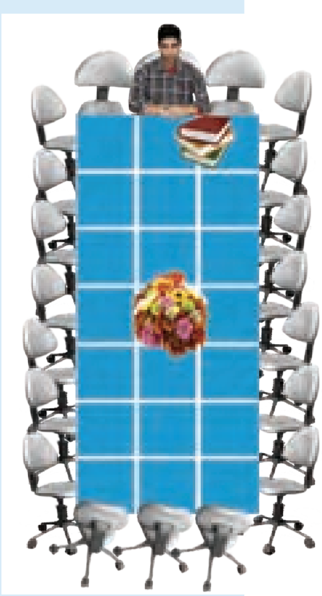
ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟

کوه‌های مینیاتوری ــ چابهار

درس ٤

نمودار تابع درجهٔ ۲

فعالیت

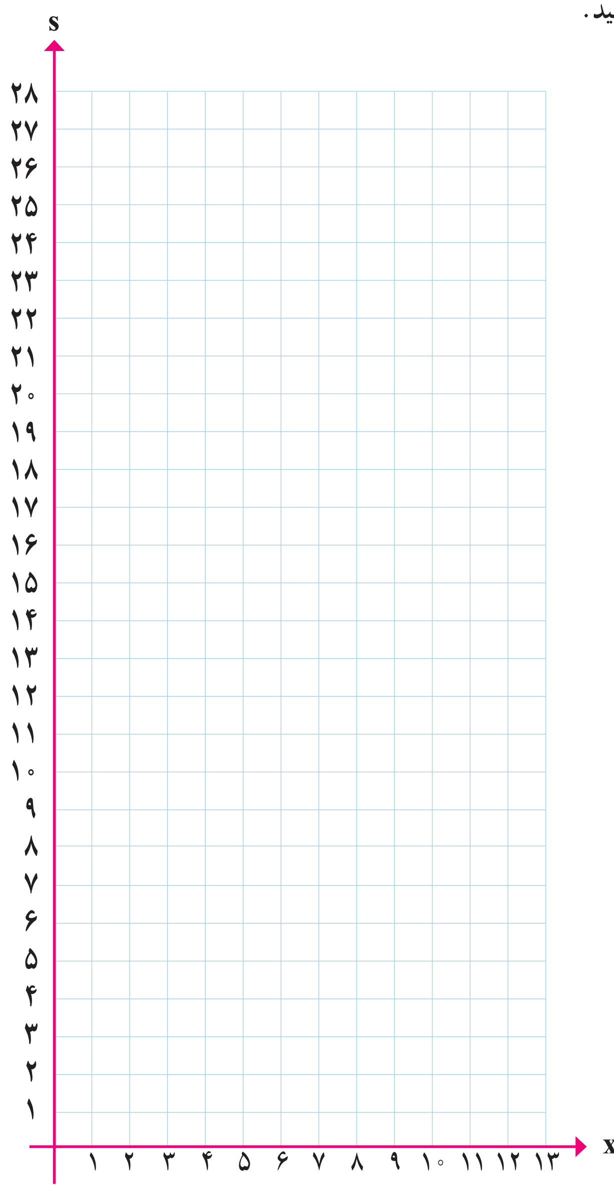


برای برگزاری یک جلســه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز بــه صورت مربع‌هایی ۱×۱، یک میز مســتطیل شــکل به محیط ثابت ۲۰ تهیه می‌کنیم. اندازهٔ ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می‌گیرد با x و اندازهٔ ضلع دیگر را با y نشان می‌دهیم همچنین مساحت مستطیل را با s نشان می‌دهیم.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲				۶			۹
y	۹	۸	۷						
s	۹			۲۴				۱۶	
(x,s)	(۱,۹)	(۲,۱۶)			(۵,۲۵)			(۸,۱۶)	

ب) اگر هر زوج مرتب (x,s) را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محورهای زیر مشخص کنید.



فعالیت

یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ‌آمیزی روزانهٔ هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می‌کند، مبلغ x − ۱۲۰۰ تومان است. x میزان رنگ‌آمیزی روزانهٔ گروه بر حسب مترمربع است. هزینهٔ رفت و آمد و صرف غذای گروه به‌طور ثابت روزانه ۳۰۰۰۰ تومان و همچنین مترمربعی ۲۰۰ تومان هزینهٔ لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر مترمربع رنگ‌آمیزی به ازای x=۲۰۰ (۲۰۰متر کار در یک روز) و x=۳۰۰ چقدر است؟

ب) هزینهٔ گروه در یک روز به ازای x=۲۰۰ و x=۳۰۰ چقدر است؟

پ) اگر تابع سود گروه را با P نشان دهیم P(۲۰)، P(۱۰۰)، P(۲۰۰)، P(۳۰۰) را محاسبه کنید.

P(۲۰) = ۲۰×(۱۲۰۰−۲۰) − (۳۰۰۰۰+۲۰×۲۰۰)=−۱۰۴۰۰

P(۱۰۰) =

P(۲۰۰) =

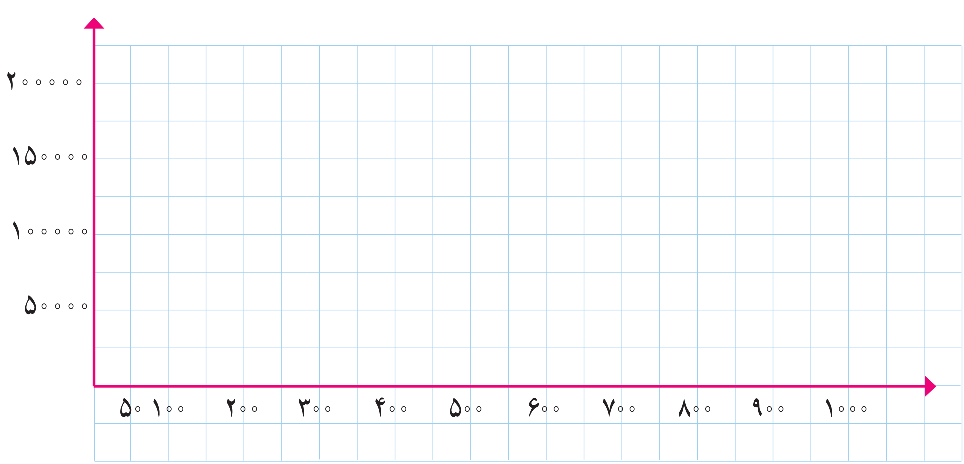
P(۳۰۰) =

ت) حاصل P(x) را به دست آورید و آن را ساده کنید.

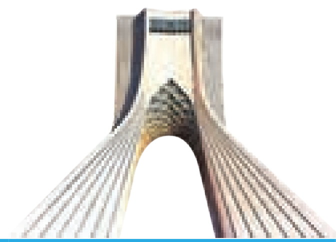
ث) جدول زیر را برای P(x) به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

x	۲۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰
P(x)	−۱۰۴۰۰	۶۰۰۰۰								

ج) نقاط به‌دســت‌آمده از جدول قسمت قبل را در یک دســتگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



چ) چرا بعضی از نقاط، پایین‌تر از محور افقی قرار می‌گیرند؟ آیا هرچه متراژ بیشتری رنگ‌آمیزی شود، گروه سود بیشتری کسب می‌کند؟



رسم نمودار تابع درجه دوم

معادلهٔ تابع درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت $y=ax^2+bx+c$ است که در آن $a\neq 0$ می‌باشد.
نمودار آن به یکی از دو صورت $\cup$ یا $\cap$ است که به آن سهمی می‌گوییم. در سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ نقطه‌ای به طول $x=-\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض‌ها رسم می‌شود، محور تقارن سهمی است.

– اگر در معادلهٔ سهمی $a>0$ باشد، شکل سهمی به صورت $\cup$ خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.

– اگر در معادلهٔ سهمی $a<0$ باشد، شکل سهمی به صورت $\cap$ خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

فعالیت

ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^2$ را رسم کنید.

x	...	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴	...
y	...		۹			۰					...