

فعالیت

۱- حاصل عبارت زیر را با دو روش ارائه شده انجام دهید و آنها را کامل کنید.

$$\text{روش اول: } (a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) =$$

$$\text{روش دوم: } ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + \dots$$

به کمک نتیجه این فعالیت، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

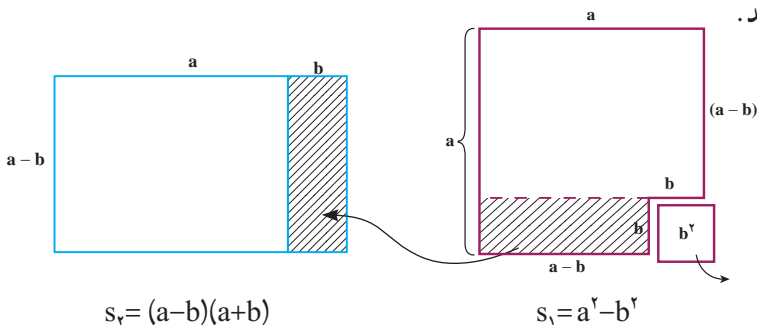
$$(a+b-c)^2 =$$

۲- با استفاده از ضرب عبارتهای جبری، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(a+b)(a-b) =$$

اگر a و b مثبت و $b < a$ باشد، به کمک شکل‌های زیر درستی اتحاد $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ را

نتیجه بگیرید.



از آنجا که $s_1 = s_2$ ، بنابراین داریم:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج

این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید.

کاردرکلاس

۱- تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

$$۱) (1+a)(1-a) = 1 - \dots$$

$$۳) (t + \dots)(t - \dots) = t^2 - 9$$

$$۲) (2a+5)(2a-5) = \dots - 25$$

$$۴) (a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + \dots$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید.

$$۱) (10-x)(x+10) = (10-x)(10+x) = 100 - x^2$$

$$۲) (-y-2z)(-2z+y) = (\quad - y)(-2z+y) = 4z^2 - \quad$$

$$۳) (-7y+t)(t+7y) =$$

$$۴) (-4y-2z)(2z-4y) =$$

$$۵) (x-2y+5)(x+2y-5) = [x-(2y-5)][x+(2y-5)] =$$

فعالیت

از اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود.

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

با توجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

$$۱) x^2 - 9 = (x+3)(\quad - \quad)$$

$$۲) 4y^2 - \frac{1}{4}z^2 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

$$۳) (2x+1)^2 - y^2 = [(2x+1) - \quad][(\quad) + y]$$

$$۴) 1 - (3a+z)^2 = [1 - (\quad)][1 + (\quad)]$$

$$= (\quad)(1 + 3a + z)$$

$$۵) (2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(\quad) - (\quad)][(\quad) + (\quad)]$$

$$= (-x-3)(\quad + \quad)$$

$$۶) x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(\quad - \quad)$$

$$= (x^2 + y^2)(x+y)(\quad - \quad)$$

کار در کلاس

۱- محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$$4x^2 - (7-3y)^2$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را

به کمک این اتحاد به صورت زیر تجزیه می‌کند.

$$(2x-7+3y)(2x+7-3y)$$

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟
 ۲- استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را ساده کند. به کمک اتحادها، تساوی های زیر را کامل کنید.

$$98 \times 102 = (100 - 2) \times (100 + 2) = \text{————} =$$

$$497 \times 503 = \text{————} \times \text{————} =$$

$$(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = \text{————}$$

فعالیت

۱- به تساوی های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به دست آمده است؟
 بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

$$\text{الف) } (x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

$\begin{array}{ccc} & \leftarrow & \rightarrow \\ & 2+5 & 2 \times 5 \end{array}$

$$\text{ب) } (x+9)(x-4) = x^2 + 9x - 4x - 36 = x^2 + 5x - 36$$

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (\quad)x + \text{————}$$

اتحاد به دست آمده را اتحاد جمله مشترک می نامند.

۲- با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن را به حاصل ضرب دو عبارت تجزیه کنیم، اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x + \quad)(x + \quad)$$

$$\text{الف) } x^2 + 7x + 10 = (x + \quad)(\quad + \quad)$$

$$\text{ب) } x^2 + 7x + 12 = (x + \quad)(\quad + \quad)$$

$$\text{ج) } y^2 + y - 6 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

$$\text{د) } y^2 - y - 6 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

$$\text{ه) } y^2 + 5y + 6 = (\quad + \quad)(\quad + \quad)$$

۳- تجزیه عبارت $x^2 - 24x + 101$ را چهار نفر از دانش آموزان به کمک اتحاد جمله مشترک به چهار صورت زیر انجام داده اند. کدام یک درست و کدام یک نادرست است؛ چرا؟

- جواب نفر سوم: $(x+12)(x-2)$
 جواب نفر اول: $(x+6)(x-4)$
 جواب نفر چهارم: $(x-12)(x+2)$
 جواب نفر دوم: $(x+6)(x+4)$

تمرین

۱- حاصل عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

- الف) $(\frac{1}{4} - x)(\frac{1}{4} + x)$ د) $(3x+y-z)(3x+y+z)$
 ب) $(5x+4)(5x+3)$ ه) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$
 ج) $(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})$ و) $(x-2)(x+2)(x^2+3)$

۲- در قسمت های نقطه چین، با استفاده از اتحادها، عبارت های مناسب بگذارید.

- الف) $(xy-z)(xy+z) = \dots - z^2$ ج) $(x+a)(x-b) = x^2 + \dots - \dots$
 ب) $(\dots + \sqrt{5})(\dots - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}y^2 - \dots$ د) $(x^2 + \dots)(x^2 - 5) = x^4 + 2x^2 - \dots$

۳- عبارات زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

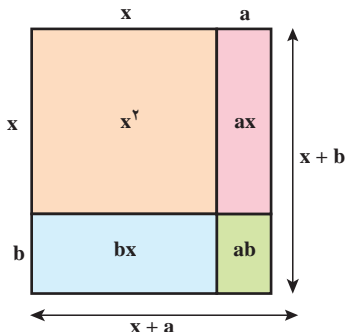
- الف) $a^2 - 8a + 15$ و) $x^2 - 13x + 36$
 ب) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ ز) $x^2 - 12x + 36$
 ج) $x^2 + 10x + 24$ ح) $(x+y)^2 - 9$
 د) $x^2 - 2x - 8$ ط) $bx^2 - 5bx - 50b$
 ه) $4ax^2 - a$ ی) $x^4 - 5x^2 + 4$

۴- در اتحاد جمله مشترک اگر $a=b$ باشد، چه اتحادی به دست می آید؟ اگر a و b قرینه باشند،

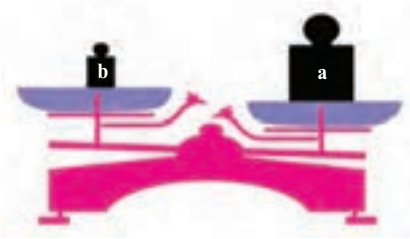
کدام اتحاد به دست می آید؟

۵- به کمک مساحت ها در شکل روبه رو، اتحاد

جمله مشترک را به دست آورید.



فعالیت



روی کفه های ترازو دو وزنه a و b کیلوگرمی قرار دارد. با توجه به شکل، وزنه a از وزنه b سنگین تر است. — با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای \neq ، $>$ ، $<$ را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه های a و b را با هم مقایسه کنید.

$$a \square b, a \square b, b \square a$$



در شکل بالا اگر وزنه ای p کیلوگرمی باشد، به طوری که $a=b+p$ ، در این صورت برای اینکه کفه های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد؛ به طوری که $a > b$ ، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p هست؛ به طوری که $a = b + p$.

با توجه به برابری های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف) $x = y + 4 \Rightarrow x > y$

ج) $a - 2 = b + 3$

ب) $m + 1 = n + 3$

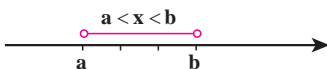
د) $2m = 3n \quad (m, n > 0)$

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از حالت های « a بزرگ تر از b » یا « a کوچک تر از b » یا « a برابر با b » را خواهیم داشت.

چنانچه عدد حقیقی a منفی نباشد در این صورت $a > 0$ یا $a = 0$ است. در این حالت می نویسیم $a \geq 0$ و می خوانیم a بزرگ تر یا برابر با 0 است؛ مانند $2 \geq 0$ یا $0 \geq 0$.

چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشند، به طوری که a از b کمتر نباشد، در این صورت $a > b$ یا $a = b$ است. در این حالت می نویسیم $a \geq b$.

برای سه عدد حقیقی a و b و x به طوری که عدد دلخواه

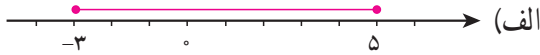


x بین اعداد a و b باشد ($a < b$)، می نویسیم: $a < x < b$.

مانند: $1 < 2 < 5$



۱- مناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.



۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) اگر $a+b > 0$ آنگاه، a و b هر دو مثبت اند.

(ب) اگر $ab > 0$ آنگاه، a و b هم علامت هستند.

(ج) اگر $\frac{ab}{c} < 0$ آنگاه، a و b و c منفی هستند.

(د) اگر $a^2b < 0$ آنگاه، b منفی است.

۳- عبارات‌های کلامی را به صورت جبری بنویسید.

• ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ تر است.

• قرینه دو برابر عددی به علاوه ۳ از ۸ کوچک تر است.

فعالیت

۱- به دو طرف نابرابری‌های زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$-3 < 1 \xrightarrow{+3} -3 + 3 < 1 + 3 \rightarrow 0 < 4$$

$$-3 < 1 \xrightarrow{-7}$$

$$-3 < -2 \xrightarrow{-100}$$

خاصیت ۱: اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری

همچنان برقرار است؛ یعنی اگر $a > b$ آنگاه $a + c > b + c$.

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری‌ها تغییر می‌کنند؟

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times 3} -21 > -27$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-3)} 21 < 27$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times^{\circ}}$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times(-1)}$$

خاصیت ۲: اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند c ضرب کنیم، نابرابری همچنان برقرار خواهد بود؛ یعنی اگر $a > b$ و $c > 0$ آنگاه $ac > bc$.

خاصیت ۳: اگر دو طرف نابرابری $a > b$ را در عدد منفی c ($c < 0$) ضرب کنیم، در این صورت داریم: $ac < bc$.

۳- نابرابری $2x+1 > 7$ را در نظر بگیرید؛ این نابرابری شامل متغیر x است و درجه نسبت به x با ۱ برابر است؛ در این صورت به این نابرابری، نامعادله یک مجهولی درجه اول می‌گوییم. در جدول زیر مقادیر داده شده را به جای x قرار دهید؛ آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

نامعادله	$x=-1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=7$
$2x+1 > 7$	$2(-1)+1 > 7$ \downarrow $-1 > 7$ نادرست				

مجموعه مقداری که به ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، مجموعه جواب نامعادله است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ در مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

– دو طرف نامعادله را با ۱- جمع کنید.

– دو طرف نامعادله حاصل را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید.

– با توجه به نابرابری $x > 3$ ، در می‌یابیم که مجموعه همه عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با D نمایش دهیم، خواهیم داشت: $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$. می‌توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور عددهای حقیقی به صورت زیر نمایش داد.



$$2x + 1 > 7 \xrightarrow{+(-1)} \quad \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \quad \text{_____}$$

مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $2x + 7 \geq 15$

ب)
$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \xrightarrow{\times 6} 6 \times \frac{x}{3} - 6 \times \frac{1}{2} < 6 \times \frac{x-1}{6}$$

$$\rightarrow 2x - 3 < x - 1 \xrightarrow{+(-x)} 2x - 3 + (-x) < x - 1 + (-x)$$

$$\rightarrow x - 3 < -1 \xrightarrow{+3} x < 2 \quad D = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$$

ج) $3(x-1) \geq 2x+1$ د) $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} \leq \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6}$

تمرین

۱- در جاهای خالی نمادهای $<$ یا $>$ را جایگزین کنید.

الف) $a = b = 1$ است. در این صورت $a \square b$. (ج) اگر $2(p-1) = 2q-3$ ، در این صورت $p \square q$.

ب) اگر $u-v = -2$ ، در این صورت $u \square v$. (د) اگر $\frac{a-b}{4} = -3$ ، در این صورت $a \square b$.

۲- علامت عددهای حقیقی a, b, c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد:

الف) $\frac{ac}{b^2} < 0$ ب) $\frac{a}{bc} > 0$ ج) $ab > 0$ د) $\frac{a^2}{bc} > 0$

۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2(x-3) + 5 < 5-x$ ج) $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

ب) $3-2x \geq 5(3-2x)$ د) $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3}$

۴- اگر $a^2 > b^2$ آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت، $a > b$ ؟

۵- اگر $a, b > 0$ و $a^2 > b^2$ ، نشان دهید $a > b$ (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید).

۶- عبارتهای کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل 300 تومان از دو برابر پولش بیشتر می‌شود.

ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b ، حداکثر 6 واحد است.

۷- دو نفر با وزن‌های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند. آنها در این جنگل به منابع غذایی دسترسی ندارند. برای همین همراه خود مواد غذایی‌ای برده‌اند که ۴۵۰۰ کیلوکالری انرژی دارد. اگر فرض کنیم هر انسان روزانه حداقل به اندازه سه برابر وزن خود انرژی نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می‌توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

خوارزمی

خوارزمی، ابو عبدالله، محمد بن موسی، متولد خوارزم بوده و حدود سال ۲۳۲ هـ ق فوت کرده است. این ریاضی‌دان، منجم، جغرافی‌دان و مورخ ایرانی یکی از بزرگ‌ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ‌ترین عالم زمان خود بود. کتاب جبر و مقابله خوارزمی از آغاز تألیف، یعنی اوایل قرن سوم هجری برابر با قرن نهم میلادی و تا قرن شانزدهم میلادی، نزد ریاضی‌دانان به عنوان سند و حجت شناخته می‌شده است. در زیر بخشی از مقدمه کتاب جبر و مقابله و ترجمه آن آمده است.



به نام خداوند بخشنده مهربان

خدای راسپاس بر نعمت‌هایش، بدان گونه که شایسته اوست؛ سپاسی آن چنان، که اگر بر آیینی که بر بندگان ستایشگر او فرض شده انجام شود «شکر» نامیده می‌شود، و باعث افزونی نعمت می‌گردد، و ما را از دگرگونی‌های روزگار در امان می‌دارد تا به خداوندی‌اش گردن نهیم، و خویشتن را در پیشگاه عزتش ناچیز شمیریم، و در برابر کبریا و عظمتش فروتن شویم. خدایی که محمد (ص) را در روزگاری به پیامبری فرستاد که پیوند مردم با پیامبران گسسته شده، و حق ناشناخته مانده، و راه رستگاری ناپیدا گشته بود؛ پیامبری که با آمدنش کوردلان بینا شدند و گمراهان از هلاکت‌هایی یافتند؛ به وجودش هر اندکی فزونی گرفت و هر پراکندگی به پیوستگی و یگانگی انجامید.