

فعالیت

۱- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را مانند نمونه‌ها به دست آورید :

$$(-3)^2 = 9 \quad (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$$

$$(-\sqrt{5})^2 = \quad \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \quad 4^2 = \quad (-4)^2 =$$

مربع (توان دوم) عددهای ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه‌های دوم عدد ۹ می‌نامند. همان گونه که در سال‌های گذشته دیده‌اید، ریشه‌های دوم ۹ را با  $\sqrt{9}$  و  $-\sqrt{9}$  نمایش می‌دهند و داریم:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{و} \quad -\sqrt{9} = -3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید :

|                        |   |    |    |  |               |                |            |             |                |  |   |  |
|------------------------|---|----|----|--|---------------|----------------|------------|-------------|----------------|--|---|--|
| عدد                    | ۳ | -۳ |    |  | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\sqrt{5}$ | $-\sqrt{5}$ |                |  |   |  |
| مربع عدد<br>(توان دوم) | ۹ |    | ۱۶ |  |               |                |            |             | $\frac{1}{49}$ |  | ۶ |  |

ریشه‌های دوم عدد  $\frac{4}{9}$ ، اعداد  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  هستند. ریشه‌های دوم ۷، عددهای  $\sqrt{7}$  و  $-\sqrt{7}$  هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم  $\sqrt{0} = 0$ .

به طور کلی اگر  $b$  یک عدد حقیقی مثبت باشد،  $\sqrt{b}$  و  $-\sqrt{b}$  را ریشه‌های دوم  $b$  می‌نامند. همان طور که می‌دانید، عددهای منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

|                        |   |    |   |    |    |               |                |   |                |   |
|------------------------|---|----|---|----|----|---------------|----------------|---|----------------|---|
| عدد                    | ۲ | -۲ | ۳ | -۳ |    | $\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{2}$ | ۵ | $-\frac{2}{3}$ | ۰ |
| مکعب عدد<br>(توان سوم) | ۸ | -۸ |   |    | ۶۴ |               |                |   |                |   |

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی  $2^3=8$ . ریشه سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به توان ۳ برسد، برابر ۸ می‌شود؛ پس، ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم  $\sqrt[3]{8}=2$ . همچنین چون  $(-2)^3=-8$  ریشه سوم عدد -۸ برابر -۲ است و می‌نویسیم  $\sqrt[3]{-8}=-2$ ؛ به عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر ..... و ریشه سوم عدد  $-\frac{8}{27}$  عدد ..... است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید:

$$(\sqrt[3]{8})^3 = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{-27} =$$

به طور کلی اگر  $b$  یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با  $\sqrt[3]{b}$  نمایش می‌دهیم.  
هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

## کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\begin{aligned} \sqrt{81} &= & \sqrt{4^2} &= & \sqrt{(-4)^2} &= & \sqrt{-1} &= \\ \sqrt{\frac{27}{125}} &= & \sqrt[3]{6^3} &= & \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} &= & \sqrt[3]{(-7)^3} &= \end{aligned}$$

۲- به کمک رابطه  $\sqrt{x^2}=|x|$ ، که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\begin{aligned} \sqrt{(-6)^2} &= & \sqrt{8^2} &= & \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} &= \\ \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} &= & \sqrt{(2-9)^2} &= & \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} &= \end{aligned}$$

۳- حاصل عبارت  $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$  را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت‌ها

حل شده است.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= & \text{الف) } x \text{ و } y \text{ هر دو مثبت هستند } (x>0, y>0). \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= |x| + |y| = x - y & \text{ب) } x \text{ مثبت و } y \text{ منفی است } (x>0, y<0). \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= & \text{ج) } x \text{ منفی و } y \text{ مثبت است } (x<0, y>0). \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} &= & \text{د) } x \text{ و } y \text{ هر دو منفی هستند } (x<0, y<0). \end{aligned}$$

## ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت  $a$  و  $b$  رابطه‌های زیر را آموختید:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرار است.

### فعالیت

با توجه به عددهای داده شده  $a$  و  $b$  جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر جدول چه حدسی می‌زنید؟

| $a$ | $\sqrt[3]{a}$ | $b$           | $\sqrt[3]{b}$ | $ab$ | $\sqrt[3]{ab}$ | $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ |
|-----|---------------|---------------|---------------|------|----------------|----------------------------------|
| ۸   | ۲             | ۱۲۵           | ۵             | ۱۰۰۰ | ۱۰             | $۲ \times ۵ = ۱۰$                |
| ۲۷  |               | $\frac{1}{8}$ |               |      |                |                                  |
| -۸  |               | ۲۷            |               |      |                |                                  |

به طور کلی برای هر دو عدد  $a$  و  $b$  داریم:  $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ ، همچنین اگر

$b \neq 0$  داریم:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

### کار در کلاس

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{۲۷} = \sqrt[3]{8+۲۷}$$

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی برابر ۵ است؛ در حالی که سمت راست آن کمتر از ۴ است.»

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید :

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{\quad} =$$

$$3\sqrt[3]{-2} \times 5\sqrt[3]{4} = 15\sqrt[3]{-8} = \quad$$

$$\sqrt{128} = \sqrt{64} \times \sqrt{\quad} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{\quad}$$

$$\sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{64}} = \quad$$

$$\frac{\sqrt{-54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt[3]{-27} = \quad$$

### تمرین

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید :

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 1^0$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

|  |                         |                            |                         |
|--|-------------------------|----------------------------|-------------------------|
| $\sqrt{(-1)^2} = -1$                     | $\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$ | $\sqrt{(-5)^2} =  -5  = 5$ | $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ |
| $-\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$ | $\sqrt{1/44} = 1/2$     | $(\sqrt{-1})^2 = 1$        | $\sqrt[3]{-64} = -4$    |

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$$\sqrt{125} \times \sqrt{36}$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{81}$$

$$\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$$

$$\sqrt{-25} \times \sqrt{5}$$

۳

۳۰

-۹

-۵

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای  $a$  قرار دهیم، نامساوی زیر درست

باشد:

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4}$$

۶- رابطه  $\sqrt{(-x)^2} = x$  به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

۷- اگر مساحت کل یک مکعب  $96a^2$  باشد، حجم آن را بر حسب  $a$  به دست آورید.

۸- اگر  $x > 0$  و  $y < 0$  باشد، حاصل  $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$  را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

۹- عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید:  $\sqrt{9^0} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{1^0} = 3\sqrt{1^0}$

$$\sqrt{15^0}, \quad \sqrt{8^0}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt[3]{125^2}$$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید:

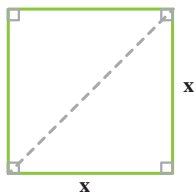
$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} =$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{1^0}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{6^0}}{\sqrt[3]{5}} =$$

## فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن  $2\sqrt{6}$  متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.



حل: به کمک رابطه ————— داریم:  $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه:  $2x^2 = 24$  و از آنجا  $x^2 = 12$

بنابراین ————— این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که ————— مربع  $\sqrt{12}$  متر یا  $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر  $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$  = مربع

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آنها را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت  $3\sqrt{2}$  و  $7\sqrt{2}$  دارای قسمت‌های رادیکالی یکسان هستند و داریم:

$$7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \quad \text{و} \quad 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات  $2\sqrt{5}$  و  $\sqrt{2}$  یا عبارات  $7\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  یکسان نیستند.

## کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

|                          |                                  |                         |                        |              |             |
|--------------------------|----------------------------------|-------------------------|------------------------|--------------|-------------|
| $3\sqrt{7}$              | $\frac{3}{2}\sqrt{2}$            | $\frac{\sqrt{5}}{2}$    | $3\sqrt{a}$            | $\sqrt{xy}$  | $\sqrt{2}$  |
| $-4\sqrt{5}$             | $\sqrt{2}$                       | $2\sqrt{5}$             | $2\sqrt{b}$            | $2\sqrt{x}$  | $\sqrt{3}$  |
| $8\sqrt{7}$              | $8\sqrt{2}$                      | $-\frac{2}{3}\sqrt{10}$ | $-\frac{1}{5}\sqrt{a}$ | $-7\sqrt{x}$ | $\sqrt{5}$  |
| $2\sqrt{5}$              | $-5\sqrt{2}$                     | $-2\sqrt{10}$           | $-7\sqrt{b}$           | $4\sqrt{xy}$ | $6\sqrt{2}$ |
| $11\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$ | $\frac{9}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$ |                         |                        |              |             |

## ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

### فعالیت

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.  
راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

$$\text{الف) } \sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم:  
(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times \quad} = 4\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{\quad} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{\quad} - \quad + \quad = 5\sqrt{2} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \sqrt{50} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} &= \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} \\ &= 5\sqrt{\quad} + 2\sqrt[3]{\quad} + 3\sqrt[3]{\quad} = 5\sqrt{\quad} + 5\sqrt[3]{\quad} \end{aligned}$$

مثال ۱: حاصل  $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  را به دو روش به دست آورده‌ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^2} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2} \\ &= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$$

مثال ۲: حاصل  $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$  را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$۱) \sqrt{98} - \sqrt{50} + \sqrt{128}$$

$$۲) \sqrt{27} - \sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$$

$$۳) ۵\sqrt{2} + ۳\sqrt{54} - ۴\sqrt{128}$$

$$۴) \sqrt{4 + \frac{1}{81} + \frac{4}{9}}$$

$$۵) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

### گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی یا آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به‌طور مثال برای محاسبه  $\frac{20}{\sqrt{2}}$  باید عدد ۲۰ را بر  $\sqrt{2}$  تقسیم کنیم؛ در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم:

$$\frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

### فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است، راه‌حل را کامل کنید.

$$\text{الف) } \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{ج) } \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{د) } \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{2^2}} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$$

$$\text{ه) } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2x}}{x} \quad (x > 0)$$

$$\text{و) } \frac{5}{\sqrt[3]{z^2}} \times \frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{5\sqrt[3]{z}}{z} \quad (z \neq 0)$$



مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{6}{\sqrt{2}}$

ب)  $\frac{2}{\sqrt{32}}$

ج)  $\frac{12}{\sqrt{6}}$

د)  $\frac{5}{\sqrt[3]{3x}}$

( $x \neq 0$ )

## تمرین

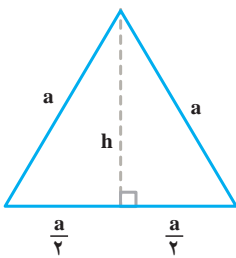
۱- عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف)  $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$       ج)  $\sqrt[3]{27^2}$       ه)  $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

ب)  $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$       د)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$       و)  $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$

$2\sqrt{x^2} - x$

۲- اگر  $x < 0$  باشد، حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.



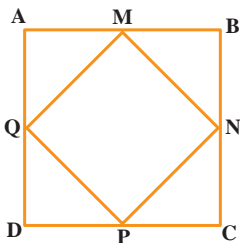
۳- محیط و مساحت مربعی به ضلع  $3\sqrt{5}$  سانتی متر را به دست

آورید.

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع را به ضلع  $a$  نشان

می دهد. اندازه ارتفاع  $h$  را بر حسب  $a$  به دست آورید؛ سپس مساحت

آن را بر حسب  $a$  بنویسید.



۵- نقاط  $M, N, P, Q$  وسطهای اضلاع مربع  $ABCD$

هستند. اگر مساحت مربع  $ABCD$ ،  $100$  مترمربع باشد، محیط مربع

$MNPQ$  چقدر است؟

۶- در جاهای خالی علامت < یا = یا > بگذارید :

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} \bigcirc \sqrt{5+4}$$

$$4 \bigcirc \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \bigcirc \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \bigcirc 5$$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید :

$$\sqrt{\square} = 10 \quad \text{ب) } 2\sqrt{\square} = 6 \quad \text{ج) } \sqrt{\square} = \frac{1}{3} \quad \text{د) } \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\frac{2^{-5}}{2^0} = \sqrt{64} \quad \text{و) } \frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3^0 \quad \text{ز) } \frac{m^6 \times m^{-2}}{m^0} = m \quad \text{ح) } 9\sqrt{-27} = \frac{0^3}{(-4)^3}$$

۸- مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید.

$$\text{الف) } \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}$$

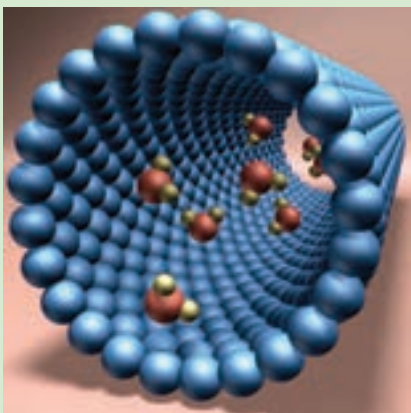
$$\text{ج) } \frac{2}{\sqrt{v}}$$

۹- آیا تساوی  $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$  همیشه درست است؟ توضیح دهید.

الف) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر  $x \geq 0$ ، تساوی

درست است.

## خواب‌آلودگی



فناوری نانو مجموعه‌ای از فرایندهای تفکیک، ادغام و تشکیل مواد در حد یک اتم یا مولکول است. یک نانومتر برابر  $10^{-9}$  متر؛ یعنی صدهزار برابر از قطر موی سر انسان کوچک‌تر است. کشور عزیز ما ایران بین ده کشور برتر در حوزه فناوری نانو قرار دارد.