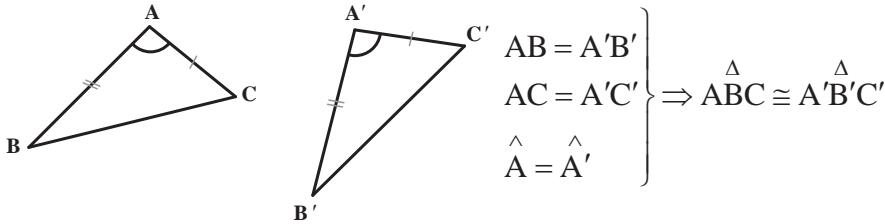


یادآوری

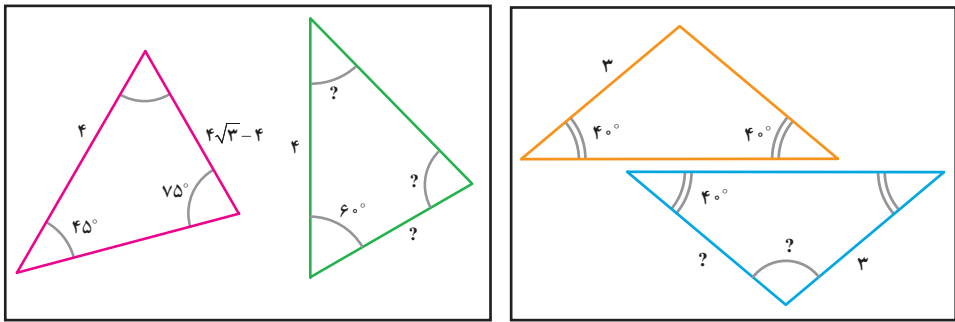
با مفهوم هم‌نهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم؛ مثلاً حالت هم‌نهشتی (ض ض ض) را این‌گونه نمایش می‌دهیم:



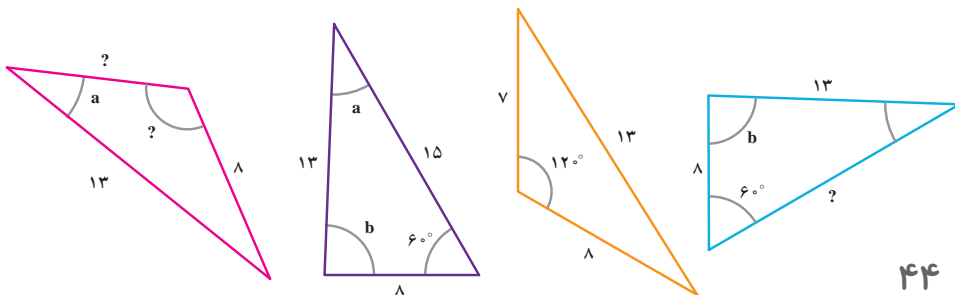
برای یادآوری، دو حالت دیگر هم‌نهشتی مثلث‌ها و دو حالت هم‌نهشتی ویژه مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

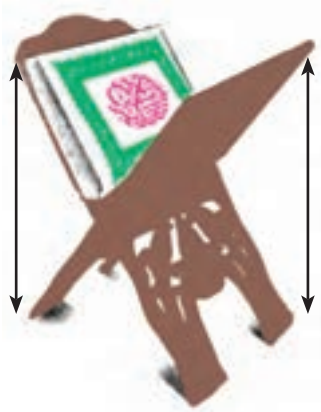
فعالیت

۱- در شکل‌های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید:

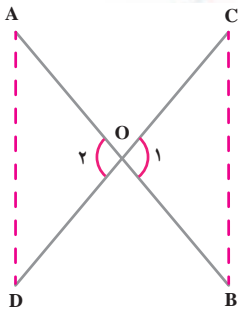


۲- در شکل زیر چهارمثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های هم‌نهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).



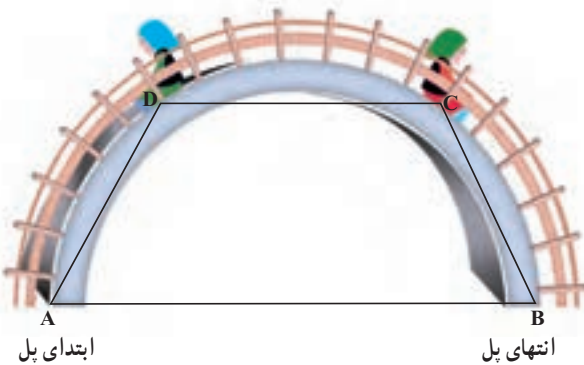


مثال : با رحل های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. در نمونه ای از آنها دو لایه چوبی آن از وسط یکدیگر گذشته است. می خواهیم نشان دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصله دو لبه کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است : $OA=OB$ و $OC=OD$ (چرا؟) و حکم این است : $AD=BC$. زوایای \hat{O}_1 و \hat{O}_2 برابرند (چرا؟)، پس مثلث های OBC و OAD هم نهشت هستند و از آنجا درستی حکم به دست می آید؛ یعنی :



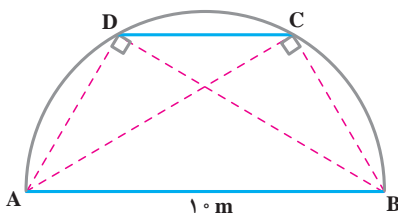
$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow AD = BC$$

فعالیت



ابتدای پل

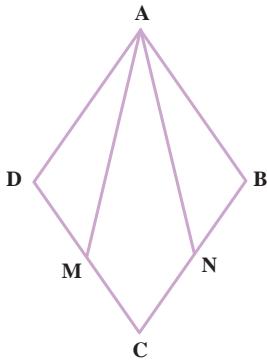
انتهای پل



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، بوستانی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم دایره وجود دارد بچه ها برای بازی از پله های آن بالا می روند. می دانیم فاصله ابتدای پل (نقطه A) از انتهای آن (نقطه B) ۱۰ متر است. ترانه روی پله C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد (BC=۶) و شهرزاد روی پله D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می زنند که باید فاصله شان از پایه های مقابل برابر باشد؛ یعنی $AC=BD$. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.

- ۱- نشان دهید زاویه‌های \hat{C} و \hat{D} در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک قضیه فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC=BD$
- ۲- به کمک هم‌نهشتی مثلث‌های ACB و ADB، نشان دهید $AC=BD$.

فعالیت

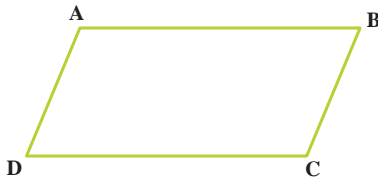


در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

- ۱- با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید:
- فرض $\begin{cases} AD = AB = \text{---} = \text{---} & , \quad BN = \text{---} \\ \hat{A} = \text{---} & , \quad \hat{B} = \text{---} & , \quad DM = \text{---} \end{cases}$
- حکم: $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

- ۲- با توجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اول، ثابت کنید مثلث‌های ADM و ABN هم‌نهشت‌اند.
- ۳- حال با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ADM و ABN، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

کار در کلاس

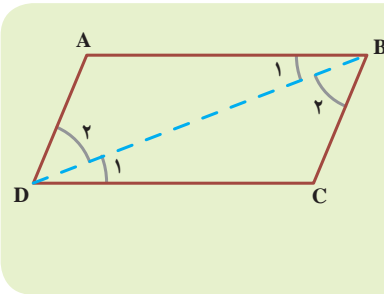


می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع، مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابرند. مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ نظر دو دانش‌آموز را دربارهٔ این مسئله ببینید و به سؤال‌های مطرح شده پاسخ دهید.

شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است؛ با چشم هم می‌توان دید!

شبنم: می‌دانیم که در تعریف متوازی‌الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو آورده شده است. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

- آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟
- به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟



ترانه: به نظر من باید دو مثلث هم‌نهشت بیایم و با اثبات هم‌نهشتی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم؛ اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطر‌ها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.

اثبات را به صورت زیر کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب} \implies \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \text{مورب و } BD \implies \text{---} \\ BD = \text{---} \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \implies \triangle \cong \triangle \text{ (ض ز ض)}$$

با توجه به هم‌نهشتی دو مثلث ABD و CBD، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

دیدیم که $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ است؛ بنابراین داریم: $AD = \text{---}$

و $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$ است؛ بنابراین داریم: $AB = \text{---}$

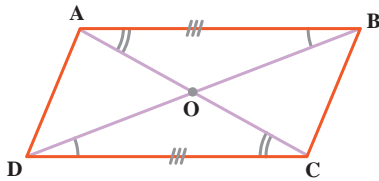
- چرا برای اثبات هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ض ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟

- با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال) بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم

قطر AC به دست آوریم؟

- از هم‌نهشتی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع، به‌جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه دیگری هم دربارهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.
- در هر متوازی‌الاضلاع _____ روبه‌رو، مساوی‌اند.

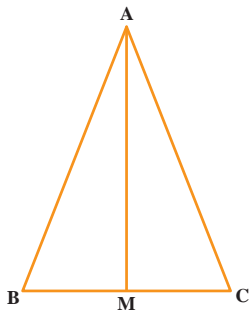
تمرین



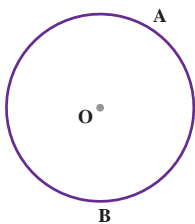
۱- ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OA = OC$ و $OB = OD$.

۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع

است!)



۳- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ چرا AM نیمساز زاویهٔ \hat{A} است؟ چرا AM بر BC عمود است؟

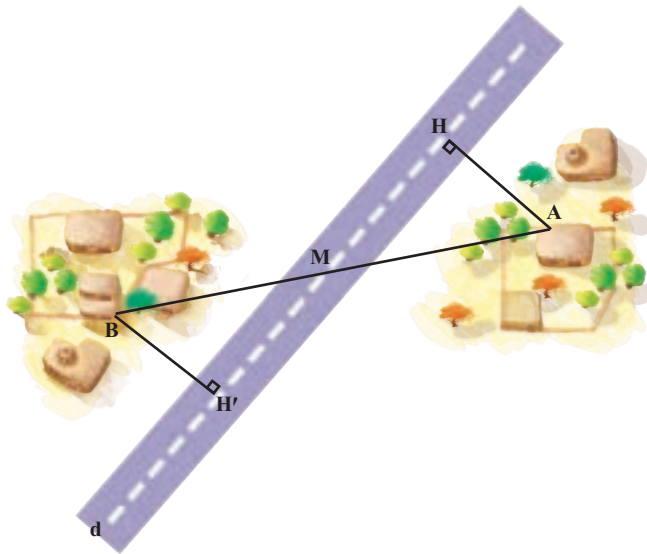


۴- از نقطهٔ M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بر دایره رسم کنید. آیا اندازهٔ این دو مماس با هم برابر است؟ درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه‌های M، A و B وصل کنید.)

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد؛ اما می‌توان مراحل را مشخص کرد که برای حل مسئله هندسه، توصیه می‌شود. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی معرفی می‌کنیم.

مثال: دو روستای A و B با یک جادهٔ خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جادهٔ آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جادهٔ آسفالتی درست از وسط جادهٔ خاکی عبور می‌کرد. ادارهٔ راه‌سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جادهٔ آسفالتی با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن تا جادهٔ اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جادهٔ مستقیم، عمود بر این جادهٔ اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ساخت جادهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است: یعنی $AH=BH'$.



قدم‌های حل مسئله

- ۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟
- ۲- اگر مسئله فاقد شکل است، با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید.

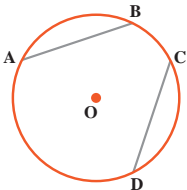
۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص دهید و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی $MA=MB$ است و AH و BH' عمودند و حکم این است: $AH=BH'$

| | |
|-----|---|
| فرض | $MA=MB$, $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ |
| حکم | $AH=BH'$ |

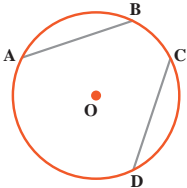
۴- برای رسیدن از فرض به حکم، راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟
با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ \text{(---)} \quad \hat{\quad} = \hat{\quad} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وتر و یک زاویه حاده)} \\ \triangle \cong \triangle \Rightarrow AH = BH' \end{array}$$

فعالیت



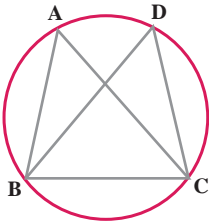
۱- در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی‌اند.
نشان دهید کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی‌اند.



۲- در شکل مقابل کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی‌اند. نشان دهید
وترهای AB و CD با هم برابرند.

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.

کار در کلاس



در شکل مقابل می‌دانیم $AB=CD$ ،

۱- چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟

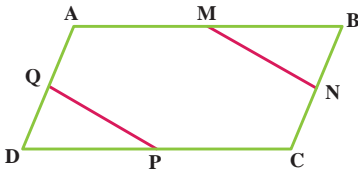
۲- جاهای خالی را با عبارتهای مناسب پر کنید:

$$\begin{cases} \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \widehat{BC} = \widehat{BC} \end{cases}$$

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{BC} \Rightarrow \text{---} = \text{---}$$

۳- چرا $AC=BD$ ؟

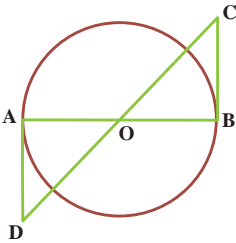
تمرین



۱- در شکل مقابل ABCD متوازی‌الاضلاع

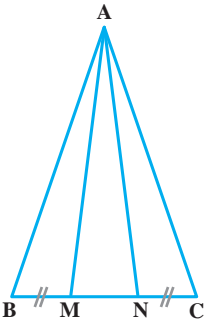
است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع

متوازی‌الاضلاع‌اند، ثابت کنید: $MN=PQ$



۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و AD و BC بر دایره

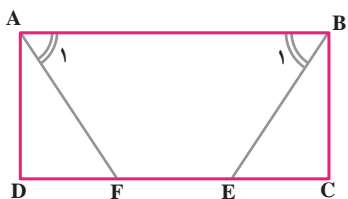
مماس‌اند، نشان دهید که AD و BC برابرند.



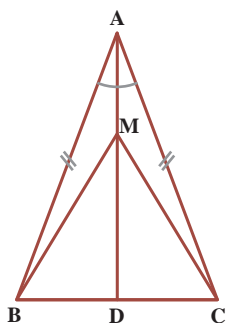
۳- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M و N

روی قاعده BC طوری قرار دارند که $BM=NC$.

نشان دهید مثلث AMN هم متساوی‌الساقین است.



۴- در مستطیل $ABCD$ ، پاره خط‌های AF و BE طوری رسم شده که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند. ثابت کنید AF و BE مساوی‌اند.



۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است: $MB=MC$.