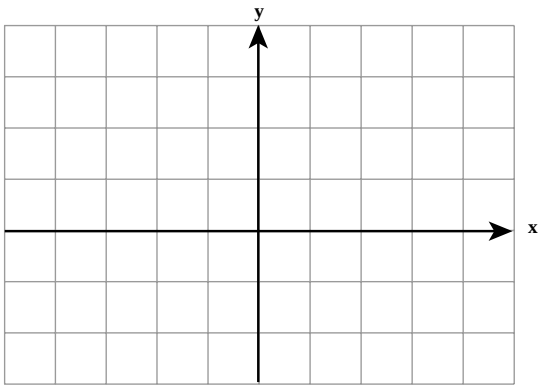
فصل ۲

توابع و معادلات

توابع درجه دوم

در ریاضی ۲ با رسم نمودار برخی از توابع درجهٔ دوم به کمکِ انتقالِ تابع $f(x)=x^2$ آشنا شدیم. با انجام تمرین زیر، آمادهٔ یادگیری مطالبی دیگر می‌شویم :



تمرین : به روش یاد شده نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -x^2$

ب) $h(x) = (x+2)^2$

ج) $s(x) = (x-1)^2 + 2$

د) $t(x) = -x^2 - 3$

به منحنی نمایش تابع درجهٔ دوم سهمی گفته می‌شود. در نمودارِ $y=x^2$ نقطهٔ $O(0,0)$ رأس سهمی است. در نمودارهای درجهٔ دوم دیگر از جمله نمودارهایی که در تمرین بالا رسم نموده‌اید چنین نقطه‌ای را مشاهده می‌کنید. در انتقال نمودار $y=x^2$ به نمودار $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ رأس سهمی نیز به نقطهٔ (x_0, y_0) انتقال می‌یابد. مثلاً رأس سهمی $y=2(x-1)^2+3$ نقطهٔ $(1,3)$ و رأس سهمی $y= -x^2-2$ نقطهٔ $(0,-2)$ می‌باشد.

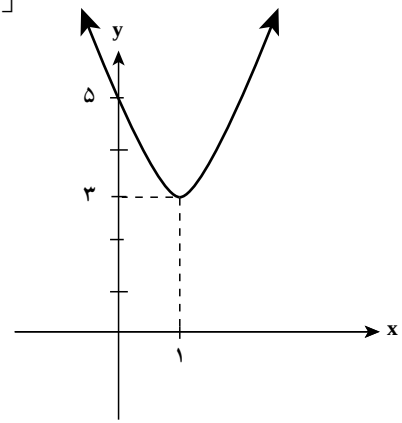
همچنین مشاهده کردید که در برخی نمودارها رأس سهمی پایین‌ترین نقطه (می‌نیمم) سهمی و در برخی بالاترین نقطه (ماکزیمم) سهمی می‌باشد. به‌عبارت دیگر در این نقطه، تابع درجه دوم کمترین مقدار یا بیشترین مقدار را داراست.

ضابطهٔ یک تابع درجه دوم در حالت کلی $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن c, b, a اعداد ثابتی هستند و $a \neq 0$ دامنهٔ این تابع IR و برد آن زیرمجموعه‌ای از IR می‌باشد. چنین ضابطه‌ای را می‌توان

به‌صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ نیز نوشت :

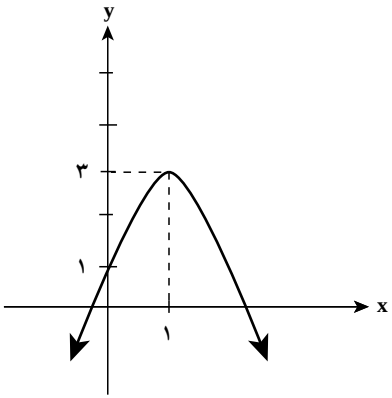
مثال : تابع درجه دوم با ضابطهٔ $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + \frac{5}{2}) = 2\left[(x-1)^2 - 1 + \frac{5}{2}\right]$$
$$= 2(x-1)^2 + 3$$



به‌ازای $x=1$ مقدار تابع $f(1)=3$ است امّا به‌ازای سایر مقادیر چون $2(x-1)^2$ مثبت است، $f(x)=2(x-1)^2+3$ بزرگتر از ۳ بوده و رأس سهمی یعنی نقطهٔ $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ نقطهٔ می‌نیمم است.

حال تابع $g(x)=-2(x-1)^2+3$ را درنظر بگیرید که ضریب x^2 عددی منفی است $(a<0)$. به‌ازای $x=1$ مقدار تابع $f(1)=3$ است اما به‌ازای سایر مقادیر چون $-2(x-1)^2$ منفی است، $g(x)=-2(x-1)^2+3$ کوچکتر از ۳ بوده و رأس سهمی یعنی نقطهٔ $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ نقطهٔ ماکزیمم می‌باشد.



مثال : حاصل جمع دو عدد برابر ۱۱۰ است. این دو عدد را چنان بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم شود.

حل : دو عدد را x و y می‌نامیم. داریم $x+y=110$ قرار می‌دهیم $P=xy$. پس

$$P=x(110-x) = -x^2+110x = -(x-55)^2+55^2$$

عبارت اخیر وقتی ماکزیمم است که جمله اول آن برابر صفر شود.

$$x-۵۵=۰ \quad , \quad x=۵۵$$

پس $x=y=۵۵$ جواب مسئله است.

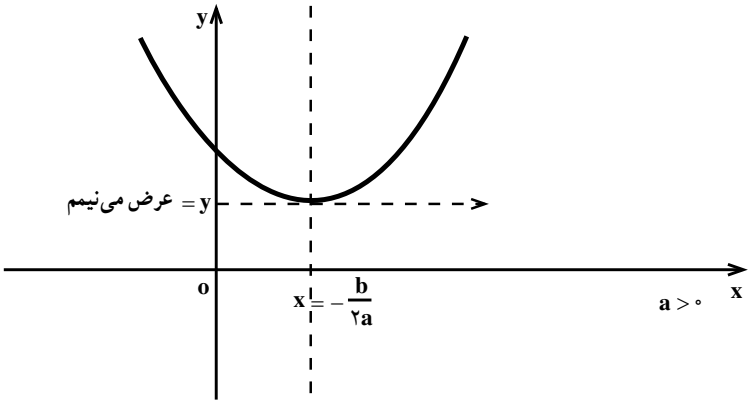
به‌طورکلی در مورد تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ می‌توان نوشت :

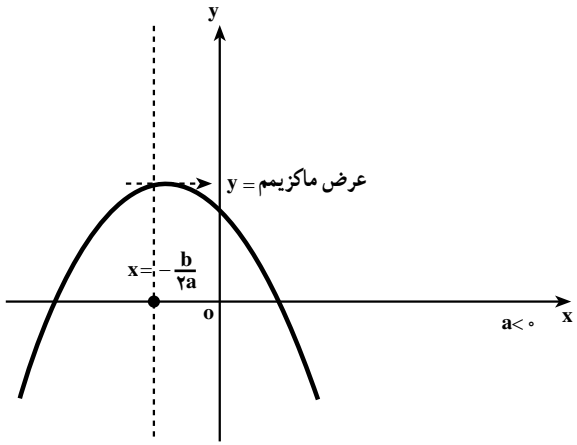
$$f(x)=a(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left[(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{c}{a}-\frac{b^۲}{۴a^۲}\right]=a(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$$

به‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ ، مقدار تابع $\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$ است. امّا به‌ازای سایر مقادیر :

الف) اگر $a>۰$ $a(x+\frac{b}{۲a})^۲$ مثبت و درنتیجه $f(x)>f(-\frac{b}{۲a})$ و نقطهٔ به طول $-\frac{b}{۲a}$ نقطهٔ می‌نیمم است.

ب) اگر $a<۰$ $a(x+\frac{b}{۲a})^۲$ منفی و درنتیجه $f(x)<f(-\frac{b}{۲a})$ و نقطهٔ به طول $-\frac{b}{۲a}$ نقطهٔ ماکزیمم است.



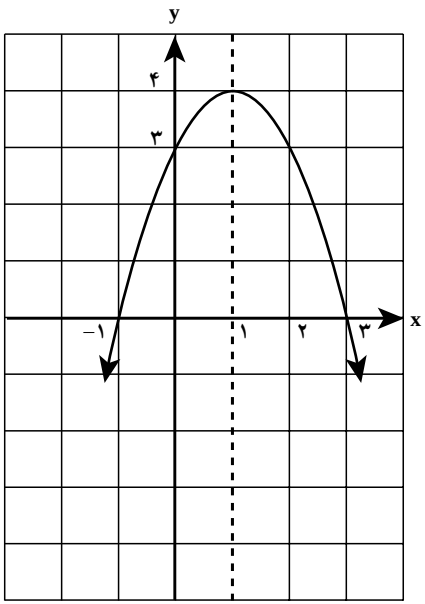


به‌طور خلاصه می‌توان گفت : تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ ، اگر $a>۰$ باشد کمترین مقدار و اگر $a<۰$ باشد بیشترین مقدار را دارد.

مثال : کمترین مقدار تابع $f(x)=۲x^{۲}-۳x+۴$ را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم :

$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow f(\frac{۳}{۴})=۲(\frac{۳}{۴})^{۲}-۳(\frac{۳}{۴})+۴=\frac{۲۳}{۸}$$

برای رسم نمودار تابع درجه دوم، معمولاً علاوه بر رأس سهمی، مختصات دو نقطهٔ دیگر در طرفین رأس و به فاصلهٔ مساوی از آن را تعیین می‌کنیم. برای رسم دقیق‌تر، مختصاتِ نقاط تلاقی نمودار با محورهای مختصات را نیز به‌دست می‌آوریم.



مثال : نمودار تابع $f(x)=-x^{۲}+۲x+۳$ را رسم می‌کنیم.

رأس سهمی نقطهٔ $\left|\begin{array}{l} x=-\frac{b}{۲a}=۱ \\ y=۴ \end{array}\right.$ و دو نقطه با فاصله مساوی در طرفین آن $\left|\begin{array}{l} x=۲ \\ y=۳ \end{array}\right.$ و $\left|\begin{array}{l} x=۰ \\ y=۳ \end{array}\right.$ می‌باشد. به‌علاوه :

نقطهٔ تلاقی منحنی با محور yها همان نقطه $\left|\begin{array}{l} x=۰ \\ y=۳ \end{array}\right.$ و نقطه تلاقی منحنی با محور xها با جایگذاری $y=۰$ دو تابع و حل معادلهٔ نظیر به دست می‌آید :

$$y=0 \rightarrow -x^2+2x+3=0 \xrightarrow{\text{حل معادله درجه دوم}} \left|\begin{array}{l} x=-1 \\ y=0 \end{array}\right. \text{ و } \left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=0 \end{array}\right.$$

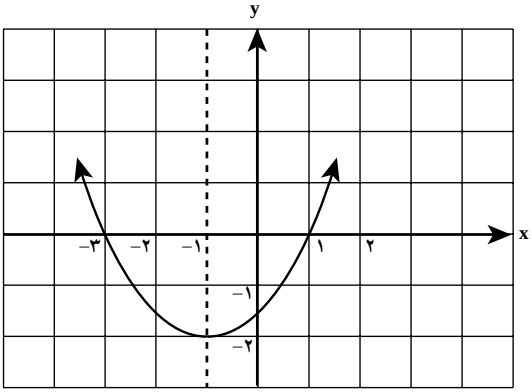
خط قائمی که از رأس سهمی می‌گذرد (در نمودار قبل خط x=۱) محور تقارن سهمی است (چرا؟) به‌طورکلی خط به معادله $x=\frac{-b}{2a}$ محور تقارنِ سهمی است.

مثال : سهمی به معادلهٔ $y=\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$ را رسم می‌کنیم.

نقاط $\left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=0 \end{array}\right.$ و $\left|\begin{array}{l} x=-3 \\ y=0 \end{array}\right.$ نقاط برخورد سهمی با محور طول‌هاست.

به‌علاوه از دو نقطهٔ فوق نتیجه می‌شود، نقطهٔ $\left|\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \end{array}\right.$ رأس سهمی است (چطور؟)

نقطهٔ $\left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$ نیز نقطه برخورد سهمی با محور عرض‌هاست.



مسائل

۱ــ نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=3x^2+6x$

ب) $y=-2x^2+2x-1$

ج) $y=9x^2+6x+1$

د) $y=(2-x)(4+x)$

هـ) $y=2x^2+3$

و) $y=2x^2-3x+4$

۲ــ شخصی که در لبهٔ فوقانی ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر ایستاده است توپی را با سرعتِ اولیهٔ ۲۰ متر بر ثانیه به سوی بالا پرتاب می‌کند. بعد از t ثانیه ارتفاع توپ از سطح زمین برابر است

با $h=-5t^2+20t+80$. نمودار این تابع را رسم کنید. با استفاده از این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) توپ پس از چند ثانیه به زمین می‌خورد؟

ب) ماکزیمم ارتفاع توپ چقدر است؟ بعد از چند ثانیه به ماکزیمم ارتفاع می‌رسد؟

ج) بعد از چند ثانیه پس از پرتاب توپ به سطح بالای ساختمان برمی‌گردد؟

د) دامنهٔ این تابع را تعیین کنید.

۳ــ محیط مستطیلی ۱۰۰ متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود.

۴ــ کمترین مقدار تابع $f(x)=x+\frac{4}{x}$ را به‌ازای مقادیر مثبتِ x تعیین کنید.

روابط بین ضرایب و جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

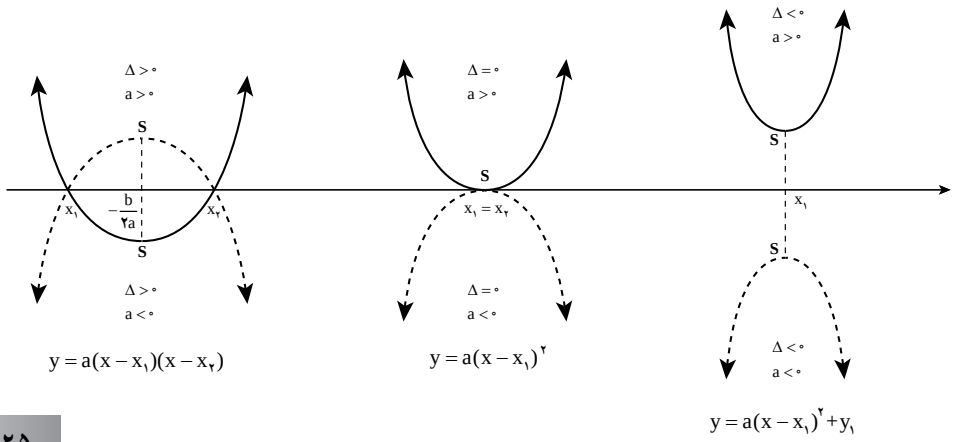
در ریاضی ۲ دیدیم که جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، طول نقاطِ برخورد نمودارِ تابع $y=ax^2+bx+c$ با محور xهاست. اگر $b^2-4ac<0$ باشد معادلهٔ فوق جواب ندارد و سهمی فوق محور xها را قطع نمی‌کند. اگر $b^2-4ac=0$، سهمی با محور xها در یک نقطه تماس دارد و اگر $b^2-4ac>0$ معادله دو جواب دارد و سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند.

هم‌چنین دیدیم که اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ فوق باشند آنگاه :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

و درنتیجه :

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x-x_1)(x-x_2)$$



مثال : معادله‌ای درجهٔ دوم با ضرایب صحیح بنویسید که جواب‌های آن $\frac{۱}{۲}$ و ۳- باشد.

$$x=-۳,\ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow (x+۳)(x-\frac{۱}{۲})=۰\Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow ۲x^۲+۵x-۳=۰$$

مثال : معادلهٔ سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در ۳+ و ۱+ و محور عرض‌ها را در ۶+ قطع کند.

$$y=a(x-۱)(x-۳)\Rightarrow y=a(x^۲-۴x+۳)$$

و چون از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۰\\۶\end{bmatrix}$ می‌گذرد : $۶=۳a\Rightarrow a=۲$

پس معادلهٔ سهمی $y=۲x^۲-۸x+۶$ می‌باشد.

مثال : مقدار m را چنان بیابید که مجموع جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-(m+۱)x-۳m=۰$ برابر ۳ باشد.

$$-\frac{b}{a}=۳\Rightarrow ۳=\frac{m+۱}{۲}\Rightarrow m=۵$$

مثال : معادلهٔ درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن معکوس جواب‌های $-۳x^۲+۲x+۱=۰$ باشد.

اگر جواب‌های معادلهٔ داده شده α و β باشد جواب‌های معادلهٔ خواسته شده $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ است، پس :

$$(x-\frac{۱}{\alpha}).(x-\frac{۱}{\beta})=۰\Rightarrow x^۲-(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})x+\frac{۱}{\alpha\beta}=۰\Rightarrow x^۲-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x+\frac{۱}{\alpha\beta}=۰$$

$$x^۲-\frac{+\frac{۲}{۳}}{-\frac{۱}{۳}}x+\frac{۱}{-\frac{۱}{۳}}=۰\Rightarrow x^۲+۲x-۳=۰$$

به‌طور کلی می‌توان نشان داد جواب‌های معادله‌های درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ و $cx^۲+bx+a=۰$ معکوس یکدیگرند.

مسائل

۱ــ معادله‌ای درجهٔ دوم بنویسید که جواب‌های آن دو عدد زیر باشند.

الف) ۴ و ۳- ب) $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۲}$ ج) $۲-\sqrt{۲}$ و $۲+\sqrt{۲}$

۲ــ مقدار m را چنان تعیین کنید که حاصل ضرب جواب‌های معادلهٔ $-mx^۲+۳x+m-۱=۰$ برابر ۲- شود.

۳ــ مقدار a را چنان تعیین کنید که جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-۵x+a=۰$ معکوس یکدیگر باشند.

سپس جواب‌های این معادله را بیابید.

۴ــ معادلهٔ سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در ۲+ و ۲− و محور عرض‌ها را در ۲+ قطع کند.

۵ــ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن معکوس جواب‌های $x^۲+۳x-۵=۰$ باشد.

تابع قدرمطلق

در ریاضی ۱ با مفهوم قدرمطلق یک عدد حقیقی و در ریاضی ۲ با تابع‌های قدرمطلقی آشنا شدید.

تمرین : ۱ــ عبارت‌های زیر را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

الف) $\left|۲-\sqrt{۲}\right|$ ب) $\left|۱-\sqrt{۳}\right|$ ج) $\left|a^۲+۱\right|$ د) $\left|-(x-۱)^۲-۳\right|$

۲ــ اگر $۱<x<۳$ حاصل عبارتِ $|x-۱|+|x-۳|$ را به‌دست آورید.

۳ــ در یک صفحهٔ مختصات نمودار تابع $f(x)=|x|$ را رسم کرده و با استفاده از آن نمودار توابع زیر را در همان صفحه رسم کنید.

الف) $g(x)=|x+۲|$ ب) $h(x)=-|x|$ ج) $k(x)=|x-۳|+۱$

د) $s(x)=۲-|x+۳|$ هـ) $t(x)=|۲x|$ و) $p(x)=|۲x-۳|$

با توجه به این‌که $|x|=\sqrt{x^۲}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $|xy|=|x||y|$ و $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

هم‌چنین $|-x|=|x|$ و $|x|^۲=x^۲$. برخی دیگر از ویژگی‌های قدرمطلق به قرار زیر است :

۱) اگر $|x|=a$, $a\geq ۰$ آنگاه $x=a$ یا $x=-a$.

۲) اگر $|x|\leq a$ آنگاه $-a<x<a$ و برعکس.

$$|x|\leq a\Rightarrow |x|^۲\leq a^۲\Rightarrow x^۲\leq a^۲\Rightarrow x^۲-a^۲\leq ۰\Rightarrow (x+a)(x-a)\leq ۰$$

$$۰\leq x+a \text{ و } x-a\leq ۰ \Rightarrow -a\leq x\ ,\ x\leq a\Rightarrow -a\leq x\leq a$$

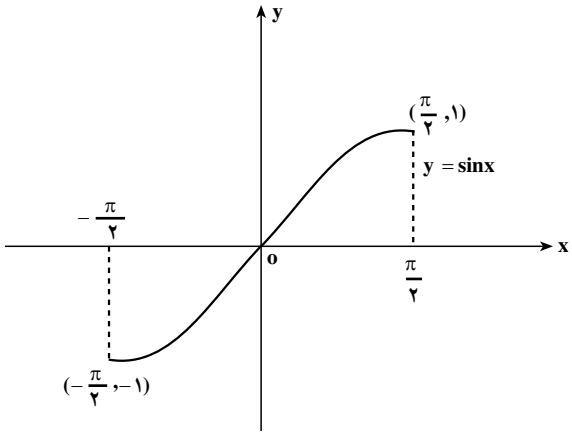
همین استدلال را برعکس نیز می‌توان ارائه کرد و از $-a<x<a$ نتیجه می‌شود $|x|<a$

مثال : جواب نامعادلهٔ $|۳-۵x|<۸$ را به‌دست می‌آوریم.

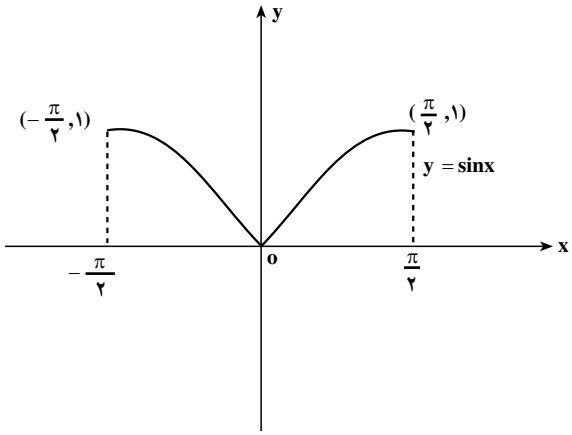
$$-۸<۳-۵x<۸\Rightarrow -۱۱<-۵x<۵\Rightarrow -۱<x<\frac{۱۱}{۵}$$

با استفاده از نمودار $y=f(x)$ می‌توان نمودار $y=|f(x)|$ را رسم کرد.

به‌عنوان مثال، منحنی نمایش تابع $y=\sin x$ $(-\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲})$ به شکل مقابل است :



بنابراین، منحنی نمایش تابع $y=|\sin x|$ به شکل مقابل است.



به‌طورکلی در این روش ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، قسمتی از نمودار که بالای محور xها است باقی می‌ماند ولی قسمتی که زیر محور xهاست را حذف و قرینهٔ آن نسبت به محور xها را رسم می‌کنیم به این ترتیب نمودار $y=|f(x)|$ به‌دست می‌آید. آیا می‌توانید علت درستی این روش را توضیح دهید؟

مسائل

۱ــ با استفاده از ویژگی ۲ نشان دهید برای هر عدد حقیقی x داریم : $-|x|\le x\le|x|$

۲ــ اگر $|x|>a$ و $a>۰$ نشان دهید $x<a$ یا $x>-a$ و برعکس.

۳ــ با استفاده از مسأله ۱ برای هر دو عدد حقیقی x و y نشان دهید

$$-|x|-|y| \le x+y \le |x|+|y|$$

و نتیجه بگیرید : $|x+y| \le |x|+|y|$ (رابطه نامساوی مثلثی)

۴ــ می‌توان نشان داد رابطهٔ نامساوی مثلثی برای هر تعداد عدد حقیقی برقرار است. برای سه عدد حقیقی x_1 و x_2 و x_3 نشان دهید $|x_1+x_2+x_3| \le |x_1|+|x_2|+|x_3|$.

۵ــ معادله‌ها و نامعادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $|2x-1|=3$ ب) $\frac{1}{|x+5|}=2$

ج) $\left|x+\frac{2}{3}\right| \le 1$ د) $\frac{3}{|x|}<1$ هـ) $|2x+1|=|x-2|$

۶ــ نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید :

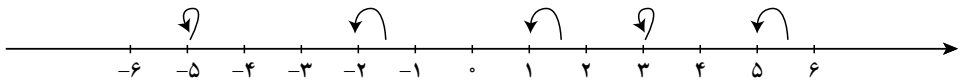
الف) $y=|3-2x|$ ب) $y=|1-x^2|$ ج) $y=|x^3|$

د) $y=|\cos x|\,,\ 0 \le x \le \pi$

۷ــ هریک از توابع زیر را به‌صورت یک تابع چند ضابطه‌ای (بدون نماد قدرمطلق) بنویسید. سپس نمودار هریک را رسم کنید :

الف) $y=3-|x+1|$ ب) $y=x|x|$ ج) $y=|x-1|+|x+1|$

تابع جزءِ صحیح : اگر x یک عدد حقیقی باشد، جزءِ صحیح x که با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم بزرگترین عدد صحیحی است که کوچکتر یا مساوی x است. برای مثال :



$[-5]=-5$ $\left[-1\frac{3}{5}\right]=-2$ $[\sqrt{2}]=1$ $[3]=3$ $[5/7]=5$

برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری که $n \le x < n+1$ درنتیجه $[x]=n$.

مثلاً چون $2 \le \sqrt{8} < 3$ درنتیجه $[\sqrt{8}]=2$ و $-6 \le -\frac{17}{3} < -5$ درنتیجه $\left[-\frac{17}{3}\right]=-6$

با توجّه به این تعریف می‌توان گفت $x=[x]+\alpha$ که در اینجا α جزء کسری x نامیده می‌شود و چون $[x] \le x < [x]+1$ ، $0 \le \alpha < 1$.

در زیر به دو مورد از خواص تابع جزءِ صحیح اشاره می‌کنیم :

الف) $[x+k]=[x]+k \; ; \; k\in\mathbb{Z}$

ب) $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ \; ; \; x\in\mathbb{Z} \\ -۱ \; ; \; x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

دلیل درستی احکام فوق را می‌نویسیم :

الف) گفتیم برای هر عدد حقیقی x، عدد صحیح n وجود دارد به‌طوری که $n\le x<n+۱$. درنتیجه $n+k\le x+k<n+k+۱$ و بنابراین $[x+k]=n+k$ و چون $n=[x]$ درنتیجه : $[x+k]=[x]+k$

ب) اگر $x\in\mathbb{Z}$ آنگاه $-x\in\mathbb{Z}$ و درنتیجه $[x]+[-x]=x+(-x)=۰$

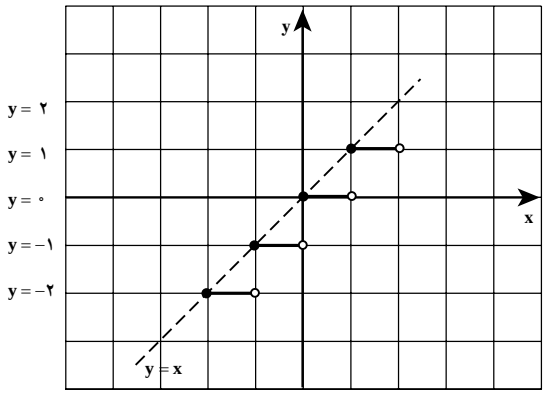
اگر $x\notin\mathbb{Z}$ آنگاه $n<x<n+۱$ و $-n-۱<-x<-n$. به ترتیب طبق تعریف نتیجه می‌شود $[x]=n$ و $[-x]=-n-۱$ درنتیجه $[x]+[-x]=n+(-n-۱)=-۱$

تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزءِ صحیح x را نسبت دهد تابع جزءِ صحیح نامیده می‌شود : $f(x)=[x]$

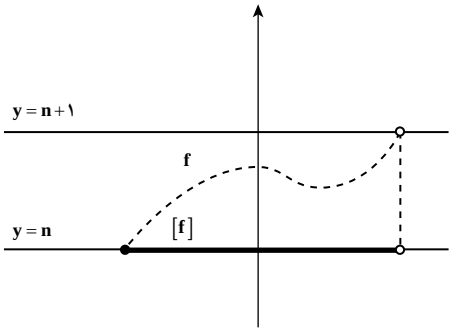
چون جزءِ صحیح برای هر عدد حقیقی تعریف شده است پس دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی (IR) ولی برد آن مجموعه اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$) می‌باشد.

در زیر نمودار این تابع در بازهٔ $[-۲,۲)$ رسم شده است :

x	$y=[x]$
$-۲\le x<۱$	-۲
$-۱\le x<۰$	-۱
$۰\le x<۱$	۰
$۱\le x<۲$	۱



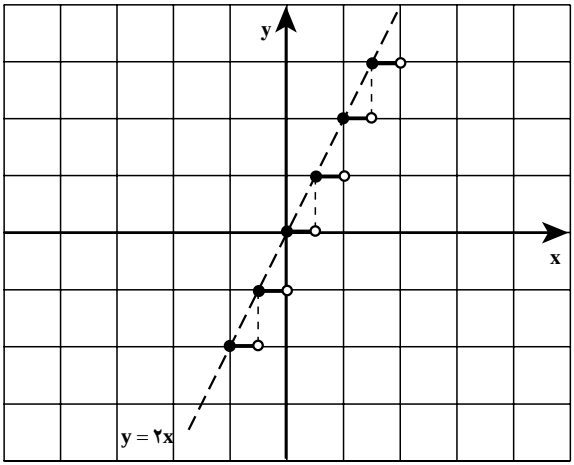
با استفاده از نمودار $y=x$ نیز می‌توان نمودار $y=[x]$ را رسم کرد. آیا می‌توانید در نمودار بالا، رابطهٔ بین نمودارهای این دو تابع را بیابید؟

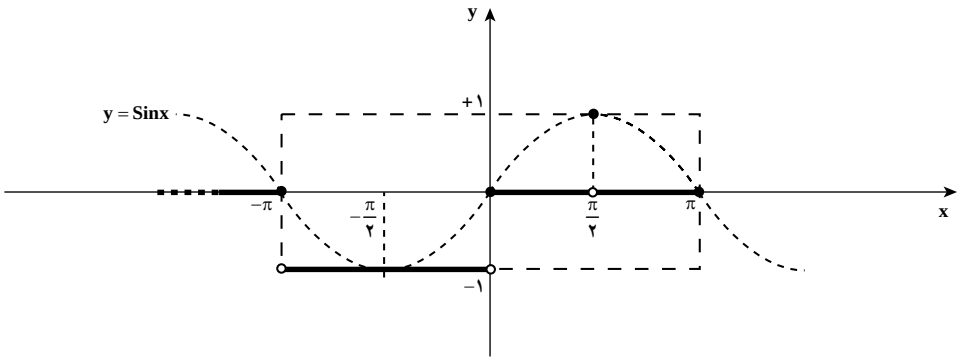


به‌طورکلی برای رسم نمودار $y=[f(x)]$ می‌توانیم از نمودار $y=f(x)$ استفاده نماییم. می‌دانیم که اگر $n \le f(x) < n+۱$ آنگاه $[f(x)]=n$. $(n \in NI)$

بنابراین برای رسم نمودار $y=[f(x)]$ هر قسمتی از نمودار $y=f(x)$ که بُرد آن در بازهٔ $[n, n+۱)$ قرارمی‌گیرد را حذف و به جای آن قطعه خط $y=n$ را رسم می‌کنیم.

مثال : در زیر نمودارهای دو تابع $y=[۲x]$ و $y=[\sin x]$ با استفاده از نمودارهای $y=۲x$ و $y=\sin x$ رسم شده است :





مسائل

۱ــ نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=2[x]+1$

ب) $y=\left[\frac{x}{2}\right]$

ج) $y=[\cos x]$ ؛ $-\pi \le x \le \pi$

د) $y=\left[x^2\right]$ ؛ $-2 \le x \le 2$

۲ــ نمودار تابع $y=x-[x]$ را رسم کنید (راهنمایی : ابتدا نشان دهید $0 \le x-[x]<1$)

۳ــ اگر $f(x)=[x+2]+[-x]$ و $x \notin \mathbb{Z}$ نشان دهید $f(x)=1$

۴ــ با استفاده از نامساوی‌های $4n^2<4n^2+2n+1<4n^2+4n+1$ نشان دهید :

$n \in \mathbb{N}$ ؛ $\left[\sqrt{4n^2+2n+1}\right]=2n$

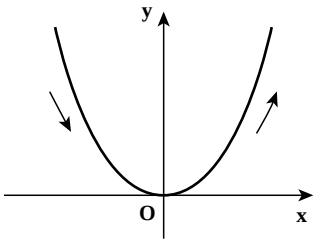
۵ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $[x-3]=4$ ب) $[1-2x]=-5$

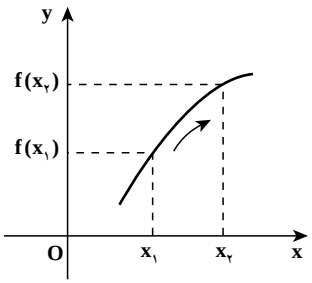
۶ــ فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید :

$[x+y]=[x]+[y]$ یا $[x+y]=[x]+[y]+1$

توابع صعودی و نزولی



اگر به نمودار تابع $f(x)=x^2$ توجه کنید دیده می‌شود که روی بازه $[0,+\infty)$ با افزایش مقادیر x مقادیر f(x) نیز افزایش می‌یابند. در این حالت گوییم تابع در حال صعود است. اما اگر این تابع را روی بازه $(-\infty,0]$ نگاه کنیم، دیده می‌شود که با افزایش مقادیر x مقدار f(x) کاهش می‌یابد. در این حالت گوییم تابع در حال نزول است.

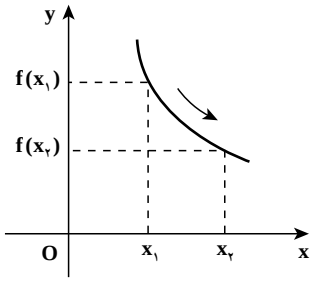


به‌طور کلی، اگر D بازه‌ای در دامنه تابع f باشد گوییم، f در بازه D صعودی است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

و گوییم f در بازه D نزولی است هرگاه برای هر $x_1 , x_2 \in D$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$$



برای مثال، توابع ثابت هم صعودی محسوب می‌شوند هم نزولی. توابع یک به یک و صعودی را توابع اکیداً صعودی می‌نامند. یک تابع f روی بازه اکیداً صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

توابع ثابت جزو توابع اکیداً صعودی نیستند. توابع یک به یک و نزولی را نیز توابع اکیداً نزولی می‌نامند. یک تابع f روی بازه D اکیداً نزولی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

مثال : با رسم نمودار تابع $y = x^2$ دیده می‌شود که این تابع روی بازه $(-\infty , 0]$ اکیداً نزولی و روی بازه $[0 , \infty)$ اکیداً صعودی است.

مثال : نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ نشان می‌دهد که این تابع روی بازه‌های $(-\infty , 0)$ و $(0 , \infty)$ اکیداً نزولی است، اما روی $IR-\{0\}$ نه صعودی است و نه نزولی.

مثال : نمودار تابع y=sinx نشان می‌دهد که این تابع روی بازه $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$ اکیداً صعودی و روی بازه $\left[\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}\right]$ اکیداً نزولی است.

مسائل

۱ــ تعیین کنید تابع y=|x| روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

۲ــ تعیین کنید تابع y=|sinx| روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

۳ــ روی بازه $[0 , 2]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه $[0 , 1]$ صعودی و روی بازه $[1 , 2]$ نزولی باشد.

۴ــ روی بازه $[-1 , 1]$ نمودار تابعی را رسم کنید که روی بازه $[-1 , 0)$ و $(0 , 1]$ صعودی باشد ولی روی بازه $[-1 , 1]$ صعودی نباشد.

ترکیب توابع

اگر بادکنکی کروی را به‌گونه‌ای باد کنیم که شعاع آن در هر ثانیه ۲ سانتی‌متر افزایش یابد، حجم آن در هر لحظه چقدر است؟

اگر r شعاع بادکنک باشد، r برحسب زمان t به‌صورت $r=۲t$ است که t را بر حسب ثانیه و r را برحسب سانتی‌متر اندازه‌گیری کرده‌ایم. حجم کره به شعاع r برابر $V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ است. r تابعی از t است و $r(t)=۲t$ و v تابعی از r است و $V(r)=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$. اما حجم بادکنک تابعی از زمان t است و در هر لحظه t حجم بادکنک برابر $\frac{۴}{۳}\pi(۲t)^{۳}$ خواهد بود. این مقدار به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$V(r(t))=\frac{۴}{۳}\pi(r(t))^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi(۲t)^{۳}=\frac{۳۲}{۳}\pi t^{۳}$$

این تابع جدید را ترکیب دو تابع $V(r)$ و $r(t)$ می‌نامند.

به‌طور کلی، اگر f و g دو تابع به‌گونه‌ای باشند که برای هر x در دامنه f مقدار $f(x)$ در دامنه g قرار بگیرد، می‌توانیم مقدار $g(f(x))$ را محاسبه کنیم و تابع جدیدی بسازیم که آن را به gof نشان می‌دهند. دامنه gof همان دامنهf است و برای هر x در دامنه f خواهیم داشت.

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

مثال : برای دو تابع $f(x)=۲x$ و $g(x)=x^{۳}$ چون دامنه هر دو تابع تمام اعداد حقیقی است می‌توانیم هر دو ترکیب gof و fog را انجام دهیم و داریم

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x)=(۲x)^{۳}=۸x^{۳}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^{۳})=۲x^{۳}$$

در همین مثال دیده می‌شود، دو ترکیب fog و gof لزوماً با هم مساوی نیستند.

مثال : برای دو تابع $f(x)=x-۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$ ، دامنه f تمام اعداد حقیقی است و ترکیب fog قابل انجام است و داریم

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=\sqrt{x}-۱ \quad x\in[۰,\infty)$$

اما ترکیب gof قابل انجام نیست زیرا برد f تمام IR است در حالی که دامنه g فقط بازه $[۰,\infty)$ است. برای آن‌که ترکیب قابل انجام باشد، می‌توان دامنه f را به بازه $[۱,\infty)$ محدود کرد تا بُرد آن در $[۰,\infty)$ قرار گیرد، در این حالت داریم

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x-۱)=\sqrt{x-۱} \quad x\in[۱,\infty)$$

مثال : برای تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ ، ترکیب fof قابل انجام است و

$$(fof)(x)=f(f(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x \qquad x\in IR-\{0\}$$

مثال : برای دو تابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=\sin x$، هر دو ترکیب fog و gof قابل انجام است و

$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sin x)=|\sin x|$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(|x|)=\sin|x|$

تابع وارون

اگر طول ضلع یک مربع را به x و مساحت آن را با s نشان دهیم، s تابعی از x است و داریم $s(x)=x^2$. اما x نیز تابعی از s است و از طریق معادله $s=x^2$ می‌توانیم x را برحسب s حساب کنیم و داریم $x=\sqrt{s}$. اگر طول ضلع مربع را با l و مساحت مربع را با x نشان دهیم این تابع به صورت $l(x)=\sqrt{x}$ در می‌آید. در اینجا با دو تابع s(x) و l(x) روبه‌رو هستیم که هر کدام عکس عمل دیگری را انجام می‌دهد، یعنی

$y=l(x)\Leftrightarrow s(y)=x$

این گونه توابع را وارون یکدیگر می‌نامند.

این طور نیست که هر تابعی دارای تابع وارون باشد، شرط وجود تابع وارون برای یک تابع f آن است که برای هر y در بُرد f معادله $y=f(x)$ دارای جواب منحصر به‌فردی مانند x در دامنه f باشد. این به معنای یک به یک بودن f است.

مثال : تابع $y=x^2$ وارون پذیر نیست زیرا یک به یک نیست. اما اگر دامنه این تابع را به بازه $(-\infty,0]$ محدود کنیم تابعی یک به یک می‌شود و وارون‌پذیر خواهد بود. برای محاسبه تابع وارون آن، در معادله $y=x^2$، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم و در محاسبه توجه داریم که $x\in(-\infty,0]$.

$$y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y} \Rightarrow x=-\sqrt{y}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y=-\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید که تابع وارون $y=x^2$ با دامنه $(-\infty,0]$ است.

مثال : تابع $y=\frac{1}{x^3}$ با دامنه $IR-\{0\}$ یک به یک است و وارون‌پذیر است. برای محاسبه تابع وارون، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم.

$$y=\frac{1}{x^3}\Rightarrow x^3=\frac{1}{y}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ به دست می‌آید که تابع وارون $y=\frac{1}{x^3}$ است.

مثال : تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ با دامنه $IR-\{1\}$ یک به یک است زیرا

$$\frac{2x_1+1}{x_1-1}=\frac{2x_2+1}{x_2-1}\Rightarrow(2x_1+1)(x_2-1)=(2x_2+1)(x_1-1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2-2x_1+x_2-1=2x_1x_2-2x_2+x_1-1$$

$$\Rightarrow -3x_1+3x_2=0\Rightarrow x_1=x_2$$

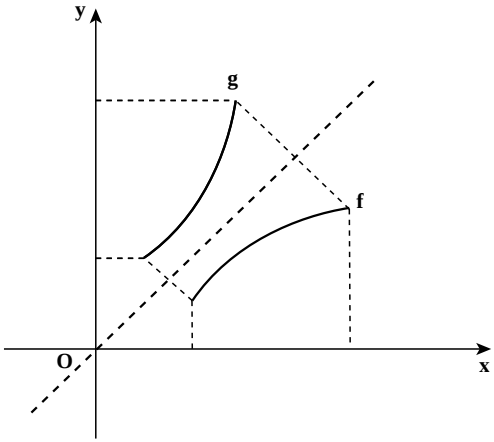
پس این تابع وارون‌پذیر است و برای محاسبه تابع وارون در معادله $y=\frac{2x+1}{x-1}$ ، x را بر حسب y حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{2x+1}{x-1}\Rightarrow y(x-1)=2x+1\Rightarrow x(y-2)=1+y$$

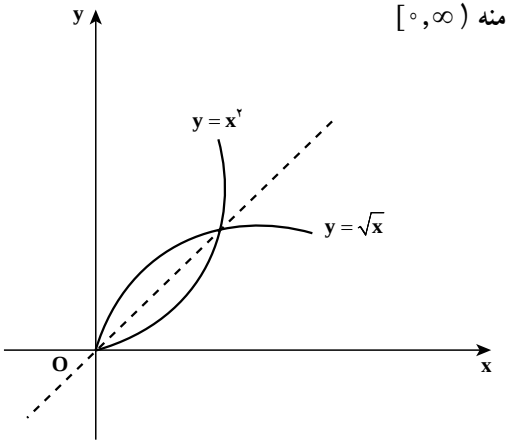
$$\Rightarrow x=\frac{1+y}{y-2}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y=\frac{x+1}{x-2}$ به دست می‌آید که تابع وارون تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ است.

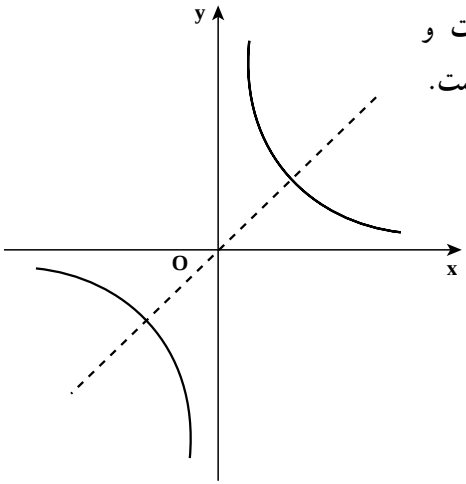
اگر g تابع وارون تابع f باشد، f نیز تابع وارون تابع g است و دامنه f برابر برد g و دامنه g برابر برد f است و نمودار این دو تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.



مثال : دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=x^{۲}$ با دامنه $[۰,\infty)$ وارون یکدیگرند.



مثال : تابع $y=\frac{۱}{x}$ وارون خودش است و نمودارش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن است.



با توجه به تعریف تابع وارون، مشخص است که اگر تابع f با دامنه D_1 و تابع g با دامنه D_2 وارون یکدیگر باشند داریم

$$g(f(x))=x \qquad x\in D_1$$

$$f(g(x))=x \qquad x\in D_2$$

بر عکس، اگر این تساوی‌ها برقرار گردند، می‌توان نتیجه گرفت f و g وارون یکدیگرند.

مثال : تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ وارون خود است زیرا $(fof)(x)=x$.

مثال : تابع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ با دامنه $IR-\{-1\}$ وارون تابع $g(x)=\frac{1-x}{x}$ با دامنه $IR-\{0\}$ است زیرا

$$f(g(x))=f(\frac{1-x}{x})=\frac{1}{\frac{1-x}{x}+1}=\frac{1}{\frac{1-x+x}{x}}=x$$

$$g(f(x))=g(\frac{1}{x+1})=\frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}}=x$$

مثال : برای هر عدد مثبت a که $a\neq 1$ تابع $f(x)=a^x$ با دامنه IR وارون تابع $g(x)=\log x_a$ با دامنه $(0,\infty)$ است و

$$f(g(x))=f(\log x_a)=a^{\log x_a}=x \qquad x\in(0,\infty)$$

$$g(f(x))=g(a^x)=\log_{a_a{}^x}=x \qquad x\in IR$$

مسائل

۱ــ برای توابع $f(x)=x^{۲}+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ و $k(x)=۲^{x}$ ترکیب توابع زیر را حساب کنید.

$fog\ ,\ gof\ ,\ fok\ ,\ kof\ ,\ fofok$

۲ــ دامنه تابع $f(x)=۳x+۱$ را به گونه‌ای محدود کنید که برای تابع $g(x)=\sqrt{۱-x}$ ترکیب gof قابل انجام باشد و gof را حساب کنید.

۳ــ برای تابع $f(x)=۱-\sqrt{x}$ آیا ترکیب fof قابل انجام است؟ دامنه f را به‌گونه‌ای محدود کنید که fof قابل انجام باشد.

۴ــ در تابع $y=\frac{ax+۱}{x-c}$ آیا می‌توان a و c را به گونه‌ای تعیین کرد که این تابع وارون خود باشد؟

۵ــ دامنه تابع $y=x^{۲}+۲x$ را به‌گونه‌ای محدود کنید که وارون‌پذیر باشد و وارون آن را به‌دست آورید.

۶ــ آیا تابع زیر وارون‌پذیر است؟ وارون آن را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\leq ۰ \\ -x^{۲} & ۰<x \end{cases}$$

۷ــ ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{۲^{x}-۱}{۲^{x}+۱}$ وارون‌پذیر است و وارون آن را به‌دست آورید.

دنباله‌ها

در ریاضی ۲ با مفهوم کلی دنباله‌های عددی و به‌طور خاص با دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدیم. در آنجا گفته شد «هر تعدادی از اعداد که آن‌ها را پشت سرهم نوشته باشیم یک دنباله از اعداد تشکیل می‌دهند».

در واقع هر موقع مجموعه‌ای از اعداد را شماره‌گذاری می‌کنیم دنباله‌ای در دست داریم و هر عدد از دنباله را جملهٔ دنباله می‌نامیم. در دنبالهٔ با نام u، جملهٔ اول، جملهٔ دوم، ...، جمله nاُم، ...، آن را به‌ترتیب با $u_۱$، $u_۲$، ...، u_n، ... نشان دادیم. u_n را جملهٔ عمومی دنباله نیز می‌نامیم.

مثال : جملهٔ عمومی دنباله‌ای $u_n=n^۲-۴n$ است. شش جملهٔ ابتدای این دنباله چنین است :

$-۳, -۴, -۳, ۰, ۵, ۱۲, \ldots$

هم‌چنین می‌توان دنبالهٔ نامتناهی را تابعی درنظر گرفت که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) و مقادیر آن اعداد حقیقی است. دنبالهٔ مثال قبل را می‌توان در جدولی به‌صورت زیر که نوعی از نمایش تابع است نشان داد :

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
u_n	-۳	-۴	-۳	۰	۵	۱۲	...

دنباله می‌تواند متناهی نیز باشد. در این‌صورت دامنه آن بخشی از $\mathbb{N}$ است. مانند دنبالهٔ عددهای طبیعی اول یک رقمی : ۷ ، ۵ ، ۳ ، ۲.

تمرین : پنج جملهٔ ابتدای هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید. (در صورت لزوم می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

الف) $a_n=۱-۳n$ ب) $b_n=۳\times(\frac{۱}{۲})^n$ ج) $c_n=(-۱)^{n+۱}$ د) $d_n=\frac{۱}{n+۱}$

هـ) $e_n=(۱+\frac{۱}{n})^n$ و) $f_n=\frac{n(n+۱)}{۲}$ ز) $g_n=\frac{۷}{۹}(۱-۰/۱^n)$ ح) $h_n=\frac{۲n}{n+۳}$

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

برای به‌دست آوردن مجموع جملات دنبالهٔ ۱۵۰ و ... و ۱۰۲ و ۱۰۱ می‌توان روش زیر را به‌کار برد :

$$\begin{array}{l} ۱۰۱+۱۰۲+\ldots+۱۵۰ \\ +۱۵۰+۱۴۹+\ldots+۱۰۱ \\ \hline \end{array}$$

$$۲۵۱+۲۵۱+\ldots+۲۵۱=۵۰\times۲۵۱ \Rightarrow \text{مجموع جملات} = \frac{۵۰}{۲} \times (۱۰۱+۱۵۰)$$

و اگر مجموع اعداد فرد آن دنباله یعنی مجموع جملات دنبالهٔ ۱۴۹ و ... و ۱۰۳ و ۱۰۱ مورد نظر باشد به طریق مشابه :

$$\begin{array}{l} ۱۰۱+۱۰۳+\ldots+۱۴۹ \\ +۱۴۹+۱۴۷+\ldots+۱۰۱ \\ \hline \end{array}$$

$$۲۵۰+۲۵۰+\ldots+۲۵۰=۲۵\times۲۵۰ \Rightarrow \text{مجموع جملات} = \frac{۲۵}{۲} \times (۱۰۱+۱۴۹)$$

در دو مثالِ فوق اولی دنباله‌ای حسابی است با جملهٔ اول ۱۰۱ و جملهٔ آخر ۱۵۰ و تعداد جمله ۵۰ و دومی دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۱۰۱ و جملهٔ آخر ۱۴۹ و تعداد جملهٔ ۲۵است. در حالت کلی در دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و جملهٔ آخر a_n و تعداد جملهٔ n نیز می‌توان نوشت :

$$\begin{array}{l} a+a_۲+\ldots+a_n \\ +a_n+a_{n-۱}+\ldots+a \\ \hline \end{array}$$

$$(a+a_n)+(a+a_n)+\ldots+(a+a_n)=n(a+a_n) \Rightarrow \text{مجموع جملات} = \frac{n}{۲}(a+a_n)$$

بنابراین اگر مجموع n جملهٔ ابتدای دنباله را با s_n نشان دهیم : $s_n = \frac{n}{۲}(a+a_n)$

مثال : مجموع اعداد طبیعی مضرب ۳ کوچکتر از ۱۰۰ برابر است با $\frac{۳۳}{۲}(۳+۹۹)=۱۶۸۳$ زیرا در دنبالهٔ حسابی ۳۳×۳ و ... و ۲×۳ و ۱×۳ جملهٔ اول ۳ جملهٔ آخر ۹۹ و تعداد جمله‌ها ۳۳ است.

از طرفی می‌دانیم در دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول a و قدر نسبت d، جملهٔ nاُم از دستور $a_n=a+(n-۱)d$ به‌دست می‌آید. در نتیجه :

$$s_n = \frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

مثال : محصول تولید لوله‌های فولادی کارخانه‌ای، در آغاز سال ۱۳۹۰ برابر ۱۵ میلیون تن می‌باشد. قرار است تولید این لوله‌ها هر سال نسبت به سال قبل ۴ میلیون تن افزایش یابد. مجموع تولید لوله‌ها در دههٔ ۹۰ را پیش‌بینی کنید.

پاسخ : مقدار تولید لوله‌ها در سالِ اول یعنی سال ۱۳۹۰ برابر است با $a_1=19$ تن. قدر نسبت این دنبالهٔ حسابی $d=4$ و تعداد سال‌های یک دهه $n=10$ است، پس

$$s_{10}=\frac{10}{2}[2(19)+(10-1)(4)]=370 \text{ تن}$$

دنبالهٔ $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{63}$ را در نظر بگیرید. این دنباله، دنباله‌ای است هندسی با جملهٔ عمومی 2^{n-1}.

برای به‌دست آوردن مجموعِ ۶۴ جمله ابتدای آن می‌نویسیم :

$$s_{64}=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{63}$$

طرفین تساوی اخیر را در ۲ ضرب می‌کنیم :

$$2\times s_{64}=2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{64}$$

سپس طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم نتیجه می‌شود :

$$s_{64}=2^{64}-1$$

به عنوان مثالی دیگر می‌خواهیم مجموعِ n جملهٔ ابتدای دنبالهٔ هندسی $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$ که جملهٔ عمومی آن $(\frac{1}{3})^n$ است را به‌دست آوریم :

$$s_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}$$

طرفین این تساوی را در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{1}{3}\times s_n=\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{3^{n+1}}$$

طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود :

$$(1-\frac{1}{3})s_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}$$

$$s_n=\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n})$$

از ایده‌ای که در دو مثال قبل به‌کار رفت می‌توان استفاده نمود و مجموع n جملهٔ دنبالهٔ هندسی

با جملهٔ اولِ a و قدر نسبت qرا به‌دست آورد :

$$s_n=a+aq+aq^{۲}+\ldots+aq^{n-۱}$$

$$q\times s_n=aq+aq^{۲}+aq^{۳}+\ldots+aq^{n}$$

طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم :

$$(۱-q)s_n=a-aq^n$$

و در نتیجه :

$$s_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q}\ ,\ q\neq ۱$$

از این دستور می‌توان برای محاسبهٔ مجموع هر تعداد جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی استفاده نمود.

مثال : مجموع ده جملهٔ ابتدای دنبالهٔ $a_n=\frac{۳}{۲}(-۲)^n$ را به‌دست می‌آوریم. این دنباله، دنباله‌ای است هندسی با جملهٔ اول ۳- و قدر نسبت ۲-.

$$s_{۱۰}=\frac{-۳(۱-(-۲)^{۱۰})}{۱-(-۲)}=-(۱-۱۰۲۴)=۱۰۲۳$$

حد مجموع جملات دنبالهٔ هندسی نزولی

گفتیم برای محاسبهٔ مجموع n جملهٔ ابتدای دنبالهٔ هندسی از دستور زیر استفاده می‌کنیم :

$$s_n = \frac{a(۱-q^n)}{۱-q}$$

اگر $|q|<۱$ آنگاه با بزرگتر شدن n مقدار $|q^n|$ کوچکتر می‌شود. به عبارت دیگر هر گاه n بی‌نهایت بزرگ شود مقدار $|q^n|$ بی‌نهایت کوچک می‌شود. به عبارت دیگر حد q^n در بی‌نهایت صفر می‌شود و در نتیجه حد عبارت فوق برابر با $\frac{a}{۱-q}$ می‌شود.

مثال : مجموع تمام جملاتِ دنبالهٔ زیر (حد مجموع جملات دنباله) را حساب می‌کنیم.

$$۳, -۱, \frac{۱}{۳}, -\frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۲۷}, \ldots$$

$$s = \frac{۳}{۱-(-\frac{۱}{۳})} = \frac{۳}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

مسائل

۱ــ مجموع همهٔ عددهای طبیعی مضرب ۷ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را به‌دست آورید.

۲ــ در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ پنجم ۱۹- و جملهٔ دهم ۳۱ است. مجموع بیست جملهٔ ابتدای این دنباله را به‌دست آورید.

۳ــ دنباله‌ای حسابی مشخص کنید که جملهٔ اول آن ۲- بوده و مجموع پنج جملهٔ اول آن، یک‌سوم مجموع پنج جملهٔ بعدی باشد.

۴ــ نشان دهید $۱+۳+۵+\ldots+(۲n-۱)=n^۲$.

۵ــ مجموع شش جملهٔ ابتدای یک دنبالهٔ هندسی ۹ برابر مجموع سه جملهٔ ابتدای آن دنباله است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۶ــ احمد می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۰/۹۹ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. پس از ۲۰

روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوقِ او هیچگاه از ۱۰۰,۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۷ــ برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۷ درصد کاهش یابد؟

۸ــ با استفاده از دستور محاسبهٔ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی، درستی اتحادهای زیر را نشان دهید.

الف) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)$

ب) $x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+\ldots-x+1)$

۹ــ با استفاده از اتحاد (الف) در مسئله قبل درستی اتحاد زیر را نشان دهید.

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}.b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

حد دنباله‌ها : مفهوم حد دنباله‌ها مُشابه مفهوم حد تابع در $+\infty$ است که قبلاً (در ریاضی ۳) بیان گردید.

مثال : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ زیرا با بزرگ شدن عدد طبیعی n عدد $\frac{1}{n+1}$ به صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شود. به عبارتی دیگر هر چقدر بخواهیم می‌توانیم $\frac{1}{n+1}$ را به ۰ نزدیک کنیم به شرط آن‌که n را به‌قدر کافی بزرگ کرده باشیم.

تعریف : هر دنباله که دارای حد بوده و حد آن عددی حقیقی باشد یک دنباله همگرا نامیده می‌شود.

به‌عنوان مثال هر یک از دنباله‌های $a_n=\frac{2n}{n+3}$ و $b_n=\frac{n^2+2}{n^2+1}$ همگرا می‌باشد زیرا به‌ترتیب دارای حدی برابر ۲ و ۱ هستند. اصطلاحاً گوییم این دنباله‌ها به ترتیب به ۲ و ۱ همگرا هستند.

امّا دنباله $c_n=(-1)^{n+1}$ همگرا نیست زیرا $c_n=\begin{cases}1 & n \text{ فرد،}\\ -1 & n \text{ زوج،}\end{cases}$ و با بزرگ شدن n به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود. هم‌چنین دنبالهٔ $f_n=\frac{n(n+1)}{2}$ همگرا نیست زیرا حد آن $+\infty$ است و عددی حقیقی نیست.

بعضی دنباله‌های خاص : دنباله‌های صفحهٔ بعد را در نظر بگیرید :

$$a_n = \frac{1}{2^n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$$
$$\searrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} : 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$$
$$\searrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$$

$$c_n = n^2 : 1, 4, 9, 16, 25, \ldots$$
$$\nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow$$

دنبالهٔ a چنان است که با افزایش شمارهٔ جمله، مقدار جمله کاهش می‌یابد. a نمونه‌ای از یک دنباله نزولی است. دنباله c چنان است که با افزایش شمارهٔ جمله، مقدار جمله افزایش می‌یابد. c مثالی از یک دنباله صعودی است. دنبالهٔ b نه صعودی است و نه نزولی. زیرا برای برخی از افزایش شماره‌ها مقدار جمله کاهش و برای برخی از افزایش شماره‌ها، مقدار جمله افزایش می‌یابد. در دنبالهٔ نزولی a داریم : $a_1>a_2>a_3>\ldots$ و در دنبالهٔ صعودی b داریم : $b_1<b_2<b_3<\ldots$.

تعریف : هرگاه دنبالهٔ u_n چنان باشد که همواره $u_n \le u_{n+1}$ آنگاه این دنباله را یک دنباله صعودی می‌نامیم. اگر همواره $u_n<u_{n+1}$ آنگاه دنباله را اکیداً صعودی می‌نامیم.

تعریف : هرگاه دنبالهٔ v_n چنان باشد که همواره $v_n \ge v_{n+1}$ آنگاه این دنباله را یک دنباله نزولی نامیم و اگر $v_n>v_{n+1}$ آنگاه این دنباله را اکیداً نزولی نامیم.

در هر دو حالت صعودی یا نزولی ، دنباله را یکنوا می‌نامند.

این بخش را با مفهوم دیگری در باب دنباله‌ها به پایان می‌رسانیم. دنبالهٔ $a_n = \frac{1}{n}$ را در نظر بگیرید. همواره $a_n<2$. عدد ۲ یک کران بالا برای این دنباله است. یا برای دنبالهٔ $b_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$ عدد ۳ یک کران بالاست. زیرا همواره $b_n<3$.

تعریف : فرض کنیم α عدد حقیقی ثابتی باشد به قسمی که همواره $u_n<\alpha$. در این صورت α را یک کران بالا برای دنبالهٔ u_n گوییم و دنباله u_n را که دارای حداقل یک کران بالا باشد یک دنباله از بالا کراندار می‌نامیم.

برای دنبالهٔ $a_n = \frac{n^3}{1+n^2}$ ، همواره $a_n>0$. عدد ۰ یک کران پایین برای این دنباله است. هر یک از دنباله‌های $b_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$ و $c_n=(-1)^n$ نیز دارای کران پایین هستند.

تعریف : هرگاه عدد حقیقی ثابتی مانند β یافت شود به قسمی که همواره $v_n>\beta$ دنبالهٔ v_n را یک دنباله از پایین کراندار نامیده و β را یک کران پایین دنباله v_n گوییم.

تعریف : دنباله‌ای که هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد دنبالهٔ کراندار گوییم.

دنباله‌های $\frac{1}{n}$ و $\frac{2n^2+3}{n^2+1}$ و $(-1)^n$ کراندارند ولی دنباله‌های $\frac{n^3}{1+n^2}$ و $2n+3$ و $(-1)^n n$ کراندار نیستند.

مسائل

۱ــ بررسی کنید از دنباله‌های زیر کدام صعودی، کدام نزولی و کدام نه صعودی‌اند و نه‌نزولی‌اند.

الف) $u_n=(-1)^{n+1}$ ب) $u_n=3^{n-1}$ ج) $u_n=\frac{1}{n^2+1}$

د) $u_n=\frac{n^2}{2^n}$ هـ) $u_n=\frac{3^n}{n^3}$ و) $u_n=\frac{n(n+1)}{2}$

۲ــ دنباله‌ای مثال بزنید که هم صعودی باشد و هم نزولی.

۳ــ دو دنباله مثال بزنید که از بالا کراندار بوده ولی از پایین کراندار نباشند.

۴ــ دو دنباله مثال بزنید که از پایین کراندار بوده ولی از بالا کراندار نباشند.

۵ــ دو دنباله کراندار مثال بزنید.

۶ــ دو دنباله مثال بزنید که نه از بالا کراندار باشد و نه از پایین.

۷ــ با استفاده از ماشین حساب ده جمله نخست دنبالهٔ $e_n=(1+\frac{1}{n})^n$ را محاسبه کنید. آیا این دنباله کراندار است؟ (حدس بزنید)

۸ــ پنج جمله نخست دنباله‌ای که جملهٔ عمومی آن $u_n=(1-\frac{1}{n})^n$ است را محاسبه کنید. آیا این دنباله کراندار است؟

کاربرد تابع نمایی (رشد و زوال)

معرفی عدد e : یکی از اعدادی که در ساختمان طبیعت فراوان به کار رفته است عددی است گنگ که با حرف e نمایش داده و بسطِ اعشاری آن تا چند رقم اعشار برابر است با ...e=۲/۷۱۸۲۸۱

این که این عدد چیست و از کجا پیدا شده، بحث مفصلی دارد و ما در این بخش تنها به ماهیتِ ریاضی این عدد می‌پردازیم. در مسأله ۷ انتهای فصل قبل، ده جملهٔ نخست دنباله $(۱+\frac{۱}{n})^n$ را به‌طور تقریبی و با دقتِ چند رقم اعشار نوشتیم. یکبار دیگر آن جملات را می‌نویسیم :

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
$(۱+\frac{۱}{n})^n$	۲	۲/۲۵	۲/۳۷	۲/۴۴۱۴	۲/۴۸۸۳	۲/۵۲۱۶	۲/۵۴۶۴	۲/۵۶۵۷	۲/۵۸۱۱	۲/۵۹۳۷	...

مشاهده می‌کنیم که حاصل $(۱+\frac{۱}{n})^n$ بزرگ و بزرگتر می‌شود (دنباله صعودی است) ولی می‌توان ثابت کرد همیشه کوچکتر از ۳ باقی می‌ماند. در ریاضیاتی عالیتر ثابت می‌شود که هر دنبالهٔ صعودی و از بالا کراندار همگراست و دنبالهٔ فوق نیز به عددی حقیقی همگراست که آن را عدد e می‌نامیم.

تعریف : حد دنبالهٔ $(۱+\frac{۱}{n})^n$ را که عددی است حقیقی و گنگ با e نشان می‌دهیم.

$$e = \lim_{n\to\infty} (۱+\frac{۱}{n})^n$$

امروزه با استفاده از کامپیوترهای پیشرفته، تقریب اعشاری e را تا بیش از یک میلیون رقم بعد از ممیز محاسبه کرده‌اند.

یادداشت تاریخی : e را به افتخار جان نپر (John Napier) ریاضیدان اسکاتلندی عددِ نپر نامیده‌اند. نپر نویسنده اسکاتلندی (تولد ۱۵۵۰ و وفات ۱۶۱۷ میلادی) بود که مطالعاتی در ریاضیات و الهیات داشته است. نپر در واقع مخترع لگاریتم است که این مفهوم را برای ساده‌ترکردن محاسبات وضع کرده است.

e در پدیده‌های طبیعی

وقتی تعداد معینی باکتری را در یک آزمایشگاه کشت می‌دهیم، جمعیت آن‌ها با گذشت زمان به شدت افزایش می‌یابد. هرگاه f(t) تعداد باکتری‌ها پس از t دقیقه از شروع کشت باشد آنگاه f(t) از مدل زیر پیروی می‌کند.

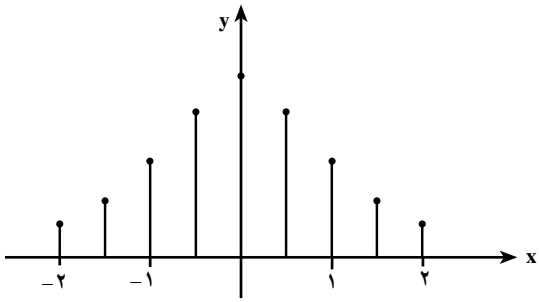
$$f(t)=Be^{۰/۰۴t}$$

که در آن B عددی است ثابت.

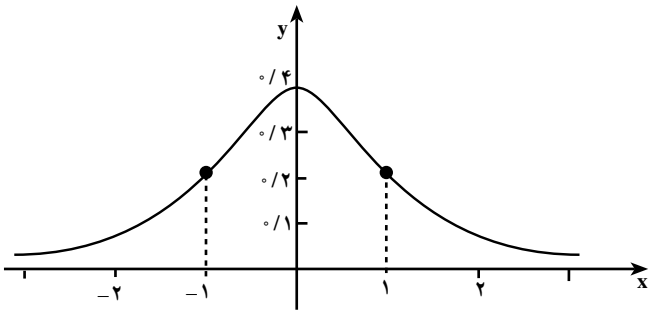
قیمت یک محصول صنعتی (مثلاً خودرو) با گذشت زمان و استفاده از خودرو کاهش می‌یابد. هرگاه V(t) قیمت یک محصول صنعتی بعد از t سال از خرید آن باشد، V(t) تابعی به‌صورت زیر است :

$$V(t)=Be^{-۰/۰۲t} \quad (\text{B مقدار ثابت})$$

می‌دانیم تابع توزیع کمیت‌هایی مانند قد، وزن، خطای اندازه‌گیری قطر لوله‌های تولید شده در یک کارخانه، در یک جامعه نمونه‌ای هنجار دارای یک نمودار میله‌ای به شکل روبه‌رو است.



اگر تعداد نمونه‌ها (تعداد میله‌ها) را افزایش دهیم و نقاط انتهایی میله‌ها را به هم وصل کنیم یک منحنی به‌دست می‌آید که نمودار آن به شکل زیر است :



این نمودار را نمودار زنگوله‌ای یا نمودار توزیع طبیعی (چگالی طبیعی) می‌نامیم. معادله این نمودار به صورت زیر است :

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{\frac{-x^۲}{۲}}$$

جهان مملوّ از پدیده‌ها است. در هر پدیده کمیت یا کمیت‌هایی برحسب کمیت‌های دیگر (مثلاً زمان) تغییر می‌کنند. این تغییر ممکن است به‌صورت افزایشی باشد که در این صورت پدیده رشد را خواهیم داشت و یا آن‌که به‌صورت کاهشی باشد که آن‌را زوال می‌نامیم. افزایش جمعیت باکتری‌ها نمونه‌ای از رشد

است در حالی‌که کاهش قیمت مصنوعات صنعتی نمونه‌ای از زوال می‌باشد. تبدیل مواد رادیواکتیویته سنگین به عناصر سبک‌تر مستلزم کاهش مقدار اولیّه مواد رادیواکتیو می‌باشد و این پدیده نیز نمونه بارزی از زوال می‌باشد.

بعضی از تغییرات توابع، همچون تابع توزیع طبیعی، منحصراً رشد یا زوال نیستند بلکه ترکیبی پیچیده‌تر دارند.

وقتی تصور کنیم که در جهان پدیده‌های متنوع و بسیاری وجود دارد که مدل تغییرات آن‌ها متضمن عدد e (عدد نپر) می‌باشد، به اهمیت e بیشتر پی می‌بریم.

بی سبب نیست که لگاریتم در پایه e را **لگاریتم طبیعی** می‌نامند.

در مسائل اجتماعی و اقتصادی نیز ما به عدد e نیازمندیم. وقتی P ریال را به‌صورت مشارکت در سرمایه‌گذاری با نرخ $100i$ درصد پیوسته در یک مؤسسه اعتباری (بانک یا شرکت تولیدی) سرمایه‌گذاری می‌کنیم، سرمایه‌ای که پس از t سال حاصل می‌شود از مدل زیر پیروی می‌کند.

$$A = Pe^{it}$$

تابع نمایی طبیعی ــ تابع لگاریتم طبیعی

در ریاضی ۲ با تابع نمایی و تابع لگاریتم و برخی ویژگی‌های آن‌ها آشنا شدید. با انجام تمرین زیر مطالب گذشته را یادآوری نموده، سپس به نوع خاصی از این توابع وکاربرد آن‌ها می‌پردازیم.

تمرین :

۱ــ با استفاده از نماد لگاریتم، رابطه‌های داده شده را به‌صورت دیگر بنویسید.

الف) $3^4 = 81$ ب) $10^{-3} = 0/001$ ج) $5^{-2} = \frac{1}{25}$ د) $2^0 = 1$

هـ) $8^{\frac{2}{3}} = 4$ و) $625^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{125}$ ز) $e^0 = 1$ ح) $(\frac{1}{4})^{\frac{7}{2}} = \frac{1}{128}$

۲ــ رابطه‌های داده شده را به‌صورت نمایی بنویسید.

الف) $\log_{10} 1 = 0$ ب) $\log_8 64 = 2$ ج) $\log_{10} 1000 = 3$ د) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

هـ) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ و) $\log_{16} \frac{1}{8} = -\frac{3}{4}$ ز) $\log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$ ح) $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$

۳ــ مقدار لگاریتم‌های داده شده را به‌دست آورید.

الف) $\log_{10} 100$ ب) $\log_2 \frac{1}{8}$ ج) $\log_{27} 9$ د) $\log_6 6$

ح) $\log_e \sqrt{e}$ ز) $\log_e ۱$ و) $\log_{\frac{۱}{۴}} \frac{۱}{۳۲}$ هـ) $\log_{۲۷} \frac{۱}{۸۱}$

۴ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\frac{۱}{۳}} x = -۴$ ب) $\log_۲(x-۱) = ۳$ ج) $\log_{\frac{۱}{۹}} x = \frac{۵}{۲}$ د) $\log(۳x+۱)=۲$

هـ) $\log(۲x-۱)+\log(x-۷)=\log ۷$ و) $۲\log x-\log(x+۱)=۱$

ز) $(۲^x-۱)(۲^x-۳)=۰$ ح) $۱۰^{\log(x+۱)}=۳$

۵ــ از روابط زیر کدام درست و کدام نادرست است؟ (c, b, a اعداد حقیقی مثبت و c مخالف صفر است.)

الف) $\log_c a+\log_c b=\log_c(a+b)$ ب) $\log_c a+\log_c b=\log_c(ab)$

ج) $\log_c a-\log_c b=\log_c(\frac{a}{b})$ د) $\log_c a-\log_c b=\log_c(a-b)$

هـ) $\log_c a^n=(\log_c a)^n$ و) $\log_c a^n=n\log_c a$

ز) $\log_{c^m} a^n=\frac{n}{m}\log_c a$ ح) $\log_{c^m} a^n=m^n\log_c a$

۶ــ ابتدا جدول را کامل کنید. سپس نمودارهای توابع زیر را در یک صفحهٔ مختصات رسم کنید.

$y=\log_۲ x \quad , \quad y=۲^x$

$y=\log_{\frac{۱}{۲}} x \ , \ y=(\frac{۱}{۲})^x$

x	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
۲^x							
$\log_۲ x$							
$(\frac{۱}{۲})^x$							
$\log_{\frac{۱}{۲}} x$							

۷ــ جدول زیر را در نظر بگیرید :

لگاریتم عدد	۰	۰/۳۰۱	۰/۴۷۷	...	۰/۶۹۹	...	۰/۸۴۵	...	...	۱
عدد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

هر عدد در ردیف دوم برابر است با ۱۰ به توان عدد نظیر از ردیفِ اول. برای مثال $۷=۱۰^{۰/۸۴۵}$. جدول را کامل کنید و مقدار عددی هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید. (در جدول، لگاریتم اعداد با دقت تا سه رقم اعشار آمده است.)

الف) $\log(۲\times۱۰^{۷})=$ ب) $\log ۳۲=$ ج) $\log ۵۶=$

د) $\log ۳۰۰۰۰۰=$ هـ) $\log\sqrt{۶}=$ و) $\log ۳۹۲=$

تابع نمایی طبیعی : وقتی پایه تابع نمایی عدد e باشد تابع نمایی حاصله را **تابع نمایی طبیعی** می‌نامیم؛ به عبارت دیگر تابع نمایی طبیعی تابع با ضابطهٔ $f(x)=e^x$ $(x\in IR)$ می‌باشد که در آن e عدد نپر است.

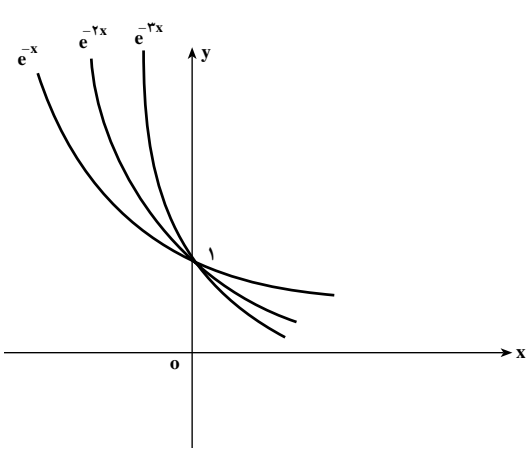
دامنه تابع نمایی طبیعی مجموعه اعداد حقیقی IR و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

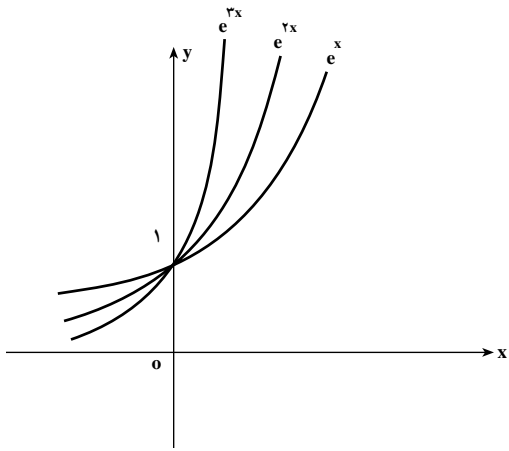
اکنون بخشی از نمودار تابع نمایی طبیعی را رسم می‌کنیم. ابتدا مقادیر تابع نمایی طبیعی را که متناظر بعضی از مقادیر x هستند در یک جدول درج می‌کنیم.

این مقادیر را با استفاده از ماشین حساب نیز می‌توان به‌دست آورد.

x	−۲	−۱	−۰/۵	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵
e^x	۰/۱	۰/۴	۰/۶	۱	۱/۵	۲/۷	۴/۵	۷/۴	۱۲/۲

سپس نقاطی از صفحه مختصات را که مختصاتشان در جدول آمده مشخص کرده و این نقاط را با یک منحنی هموار به هم وصل می‌کنیم تا بخشی از نمودار تابع نمایی طبیعی به دست آید.

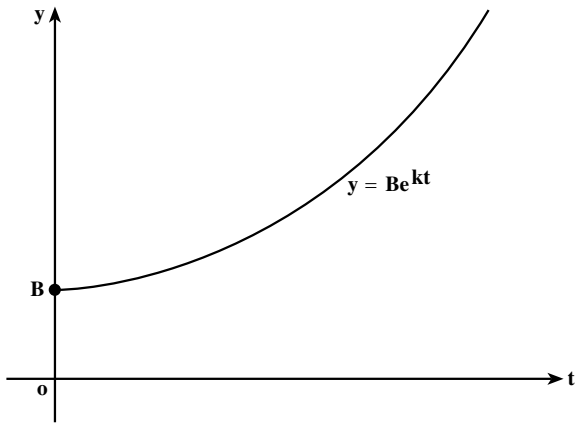




در بسیاری از شاخه‌های علمی با مدل‌های ریاضی که شامل توان‌های e است سر و کار داریم (یک مدل ریاضی رابطه یا معادله‌ای است که بین متغیرهای یک پدیده یا مشتقات آن‌ها برقرار است). بعضی از این مدل‌ها همان‌هایی هستند که رشد یا زوال نمایی نامیده می‌شوند. معادله (مدلی) به فرم

$$f(t)=Be^{kt} \qquad (t\geq ۰) \qquad\qquad (*)$$

که در آن B و k ثابت و مثبت‌اند، تابعی با رشد نمایی را تعریف می‌کند. در فصل بعد خواهیم دید که هرگاه آهنگ رشد تابعی متناسب با اندازهٔ آن باشد. این تابع رشد نمایی دارد. برای رسم بخشی از نمودار (*) باید توجه کنیم که $f(۰)=B$ و نیز این‌که $f(t)$ همواره عددی مثبت است که با افزایش t افزایش می‌یابد. نمودار توابعی که با رشد نمایی تعریف می‌شوند، به نام توابع رشد موسوم‌اند و به شکل زیر می‌باشند. $(k>۰)$



معمولاً متغیر t در این‌گونه توابع متغیّر زمان می‌باشد.

مثال : در یک کشت نمونه‌ای از باکتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t از مدل $V(t)=Be^{۲t}$ پیروی می‌کند، که در آن B مقدار ثابت مثبتی است. هرگاه در لحظهٔ $t=۰$ (شروع آزمایش) ۱۰۰۰ باکتری کشت داده شده باشند، پس از ۲ ثانیه از شروع چند باکتری وجود دارد؟

حل : داریم

$$۱۰۰۰=V(۰)=Be^{۲\times ۰}=B$$

بنابراین $B=۱۰۰۰$. پس معادله تعداد باکتری‌ها به‌صورت

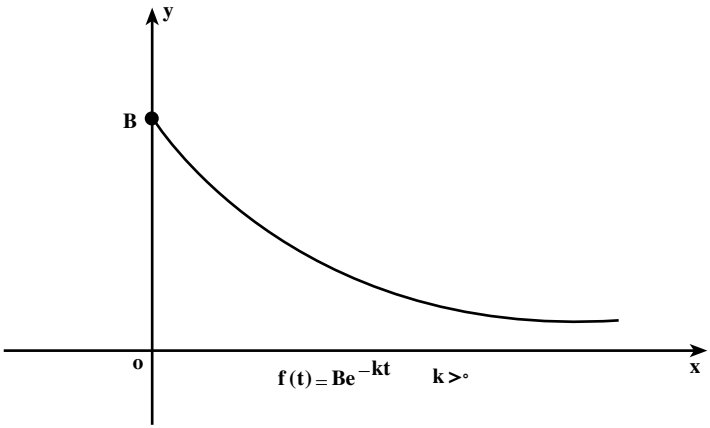
$$V(t)=۱۰۰۰e^{۲t}$$

درمی‌آید. اکنون با قرار دادن $t=۲$،

$$V(۲)=۱۰۰۰e^{۲\times۲}=۱۰۰۰\times e^{۴}\approx ۵۴۰۰۰$$

یعنی پس از ۲ ثانیه از شروع کشت ۵۴۰۰۰ باکتری وجود دارد (مقدار تقریبی).

هرگاه معادله تابع به شکل $f(t)=Be^{-kt}$ باشد که در آن B و k مثبت‌اند، گوییم این تابع از مدل نزول نمایی پیروی می‌کند، یا اصطلاحاً تابع را یک تابع زوال می‌نامیم، با توجه به این‌که $f(۰)=B$ و $f(t)$ همواره عددی مثبت است که با افزایش t نقصان می‌یابد. نمودار چنین تابعی به شکل زیر است.



مثال زیر یک پدیده را که مدل ریاضی آن از تابع نزول نمایی پیروی می‌نماید ارایه می‌کند.

مثال : قیمت یک محصول صنعتی با استفاده از آن و گذشت زمان کاهش می‌یابد. فرض کنیم $V(t)$ قیمت یک محصول (ابزار یا خودرو) بعد از t سال از خرید آن باشد. هرگاه بدانیم که

$$V(t)=Be^{-۰/۰۲t}$$

که در آن B مقدار ثابتی است، چنانچه این محصول به قیمت ۱۰۰۰۰۰۰ تومان (وقتی که نو باشد) خریداری شده باشد، قیمت آن بعد از ۲ سال چقدر است؟

حل : داریم $V(۰)=۱۰۰۰۰۰۰$ (لحظه خرید کالا را وقتی که نو باشد لحظه صفر اختیار کرده‌ایم). لذا بنابر

$$V(۰)=Be^{-۰/۰۲\times۰}$$

$$۱۰۰۰۰۰۰=Be^{۰}$$

پس $B=۱۰۰۰۰۰۰$. پس با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ قبل به‌دست می‌آوریم

$$V(t)=۱۰۰۰۰۰۰\, e^{-۰/۰۲t}$$

و قیمت این محصول پس از ۲ سال همان $V(۲)$ است؛ پس

$$V(۲)=۱۰۰۰۰۰۰\, e^{-۰/۰۲\times ۲}$$

$$=۱۰۰۰۰۰۰\, e^{-۰/۰۴}$$

$$=۱۰۰۰۰۰۰\,(۰/۶۷۰۳۲۰)$$

$$=۶۷۰۳۲۰$$

یعنی قیمت این محصول پس از ۲ سال برابر ۶۷۰۳۲۰ تومان است.

تابع لگاریتم طبیعی : تابع لگاریتم در پایه e را، **تابع لگاریتم طبیعی** می‌نامیم. درنتیجه

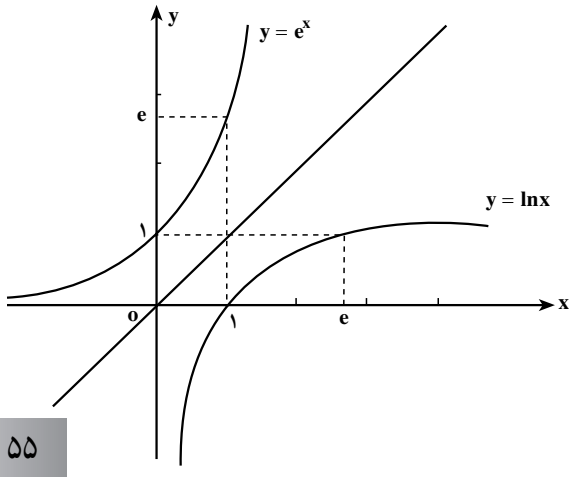
تابع لگاریتم طبیعی تابع معکوس تابع نمایی طبیعی است.

قرارداد : تابع لگاریتم طبیعی را می‌توانیم همانند حالت کلی با نماد $\log_e x$ نشان دهیم. ولی برای سادگی نام کوتاه‌تری برای این تابع انتخاب شده است و آن را با نماد ln نشان می‌دهند (l برای حرف اول لگاریتم و n برای حرف اول نِپِر می‌باشد).

مقادیر تابع ln را با lnx نشان می‌دهیم و آن را «لگاریتم طبیعی x» یا «لگاریتم نپری x» می‌خوانیم.

چون ln و تابع نمایی طبیعی توابع معکوس یکدیگرند، داریم

$y=\ln x$ اگر و فقط اگر $x=e^y$



بخشی از نمودار تابع لگاریتم طبیعی در شکل روبه‌رو رسم شده است.

مقادیر تابع لگاریتم طبیعی معمولاً در جدول‌هایی به نام جدول لگاریتم درج می‌شود. از ماشین حساب علمی با دکمه $\boxed{\ln}$ نیز می‌توان این مقادیر را به‌دست آورد.

از دیدگاه علمی می‌توانیم بگوییم که لگاریتم برای حل معادلاتی که مجهول در نما ظاهر می‌شود اختراع شده است. برای روشن‌تر شدن این مطلب به حل چند مثال کاربردی می‌پردازیم :

مثال : فرض کنیم تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت در دقیقه t از معادله

$$f(t)=۱۵۰۰e^{۰/۰۴t}$$

به‌دست آید. تعیین کنید بعد از چند دقیقه تعداد باکتری‌ها برابر ۳۰۰۰۰ می‌شود.

حل : فرض کنیم T دقیقه‌ای باشد که پس از آن ۳۰۰۰۰ باکتری به‌دست آید. پس داریم

$$f(T)=۱۵۰۰e^{۰/۰۴T}$$

چون $f(T)=۳۰۰۰۰$، داریم

$$۳۰۰۰۰=۱۵۰۰e^{۰/۰۴T}$$

یا

$$۲۰=e^{۰/۰۴T}$$

ولی این معادله هم‌ارز است با معادله

$$۰/۰۴T=\ln ۲۰$$

یا

$$۰/۰۴T=۲/۹۹۵۷$$

$$T=\frac{۲/۹۹۵۷}{۰/۰۴}=۷۴/۹$$

پس یک ساعت و ۱۴ دقیقه و ۵۴ ثانیه باید بگذرد تا تعداد باکتری‌ها به ۳۰۰۰۰ برسد.

مثال : شخصی مبلغ ۲۵۰۰۰۰۰۰ ریال را در یک حساب پس‌انداز با نرخ سود مشارکت ۱۰درصد مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری کرده است. پس از چه مدت پول اولیه این شخص دو برابر می‌شود؟ هرگاه P ریال سرمایه اولیه را با نرخ سود مشارکت ۱۰۰i درصد مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری کنیم سود و سرمایه پس از t سال از معادله $A=Pe^{it}$ به‌دست می‌آید.

حل : داریم $۱۰۰i=۱۰$، یعنی $i=۰/۱$.

$$A=Pe^{it}$$

پس

$$۵۰۰۰۰۰۰۰ = ۲۵۰۰۰۰۰۰ e^{۰/۱t}$$

درنتیجه

$$۲ = e^{۰/۱t}$$

و این هم‌ارز است با

$$۰/۱t = \ln ۲$$

$$t = \frac{\ln ۲}{۰/۱} \simeq ۶/۹۳$$

یعنی تقریباً پس از ۷ سال (۶ سال و ۱۱ ماه و ۵ روز) سرمایه اولیهٔ شخص دو برابر می‌شود.

مسائل

۱ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\ln(x-۳)=۲$

ب) $(e^x-۵)(۲e^x-۷)=۰$

ج) $(e^x+۳)^۲-۲۵=۰$

د) $\ln(۴x-۵)=\ln(۲-x)$

هـ) $\left|e^x-۱\right|=\left|۳-۲e^x\right|$

و) $\ln(۲x-۱)+\ln(x-۷)=\ln ۷$

۲ــ اعداد حقیقی x و y را چنان تعیین کنید که :

الف)
$$\begin{cases} \ln(۲x+۱)+\ln(۳y-۲)=\ln ۳x+\ln(y+۳) \\ \ln(x+۱)-\ln(y+۴)=-\ln ۳ \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} \ln x+\ln ۲y=\ln(xy+۲) \\ \ln(۱-x)+\ln(y+۱)=\ln(y-x-۱) \end{cases}$$

۳ــ جمعیت شهری ۱۰۰۰۰ نفر است و با آهنگی متناسب با تعداد جمعیت افزایش می‌یابد. اگر این آهنگ ۶ درصد و جمعیت بعد از t سال P(t) باشد، آنگاه $P(t)=۱۰۰۰۰e^{۰/۰۶t}$. تا کی انتظار می‌رود جمعیت به ۴۵۰۰۰ نفر برسد؟

۴ــ در یک نوع کشت ۲۰۰۰ باکتری موجود است، و بعد از t دقیقه f(t) باکتری ظاهر می‌شود که $f(t)=۲۰۰۰e^{۰/۰۳۵t}$. چه وقت ۱۰۰۰۰ باکتری در کشت وجود خواهد داشت؟

۵ــ کارایی کارگر عادی در کارخانه‌ای با تابع $f(t)=۱۰۰-۶۰e^{-۰/۲t}$ داده می‌شود که کارگر بعد از t ماه اشتغال می‌تواند روزانه f(t) واحد کار را کامل کند. بعد از چند ماه تجربهٔ کاری، انتظار می‌رود که کارگر روزانه ۷۰ واحد را کامل کند؟

۶ــ قیمت فروش ابزاری، t سال پس از خرید، f(t) دلار است، که $f(t)=۱۲۰۰+۸۰۰۰e^{-۰/۲۵t}$. چند سال پس از خرید، قیمت فروش این ابزار ۲۰۰۰ دلار می‌شود؟

در مسایل ۹ــ۷ به فرمول زیر نیاز داریم :

$$A=Pe^{it}$$

در این فرمول P سرمایه اولیه است که با نرخ سود مشارکت ۱۰۰i درصد به مدت t سال در مؤسسه‌ای (بانک یا شرکت تولیدی) سرمایه‌گذاری می‌شود و A مقدار سرمایه پس از t سال است.

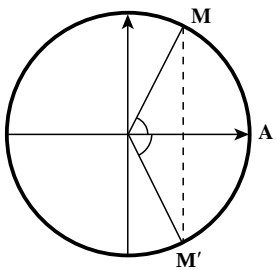
۷ــ چقدر طول می‌کشد تا ۵۰۰۰۰۰ ریال پس‌انداز با نرخ ۹ درصد مرکب پیوسته ۹۰۰۰۰۰ ریال شود؟

۸ــ مسأله ۷ را وقتی که نرخ سود شرکت در سرمایه‌گذاری ۱۲ درصد مرکب پیوسته باشد، حل کنید.

۹ــ چقدر طول می‌کشد تا یک سرمایه‌گذاری دو برابر شود هرگاه نرخ سود مشارکت در سرمایه‌گذاری ۸ درصد مرکب پیوسته باشد؟

معادلهٔ مثلثاتی

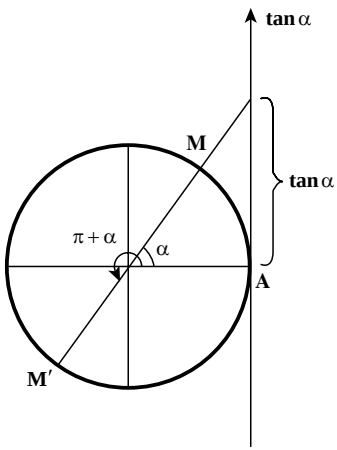
چگونه می‌توانیم تمام زوایایی را مشخص کنیم که یکی از نسبت‌های مثلثاتی آن داده شده باشد؟ به‌عنوان مثال کلیهٔ زوایایی را می‌خواهیم که کسینوس‌شان برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد. همان‌طورکه در شکل زیر مشخص است در دو نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی این اتفاق می‌افتد کلیهٔ کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در یکی از نقاط M یا M′ باشند جواب مسئله هستند از آنجا که $\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$ و $\cos(\frac{-\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}$، همهٔ جواب‌های موردنظر به‌صورت $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ هستند. در حقیقت اگر k دور بزنیم و در یکی از نقاط M یا M′ متوقف شویم مقدار کسینوس تغییر نمی‌کند. به‌طورکلی کلیهٔ زوایای x که جواب معادله $\cos x=\cos\alpha$ می‌باشند عبارت‌اند از : $x=۲k\pi\pm\alpha$.



با روش مشابه می‌توان کلیهٔ زوایایی مانند x که جواب معادله $\sin x=\sin\alpha$ می‌باشند را به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=۲k\pi+\pi-\alpha=(۲k+۱)\pi-\alpha$ به‌دست آورد.

حال می‌خواهیم کلیهٔ زوایایی مانند x را بیابیم که جواب معادله $\tan x=\tan\alpha$ باشند.

با توجه به آن که $\tan(\pi+x)=\tan x$ بنابراین هر مضربی از π که به α بیفزاییم تاثرات آن برابر $\tan\alpha$ خواهد شد و کلیهٔ جواب‌های معادله به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ خواهد بود.



معادلهٔ مثلثاتی : معادلاتی که برحسب نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می‌شوند را معادله مثلثاتی می‌نامیم به‌عنوان مثال ، $\sin^۲x+\cos x=۰$ ، $۲\cos x=۱$ معادله‌هایی مثلثاتی هستند.

جواب معادله : مقدارهایی از زاویهٔ مجهول که به‌ازای آنها معادله برقرار شود، جواب معادله می‌نامند. مقصود از حل معادلهٔ مثلثاتی پیدا کردن کلیهٔ جواب‌های آن معادله است. به‌عنوان مثال کلیهٔ

جواب‌های معادلهٔ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر است : $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ و $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

حل معادله‌های مثلثاتی

برای حل یک معادلهٔ مثلثاتی به کمک رابطه‌های مثلثاتی و دستورهای جبری آن را به معادلهٔ ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورت‌های $\sin x = a$ یا $\cos x = a$ یا $\tan x = b$ تبدیل شود.

درصورتی که $-1 \le a \le 1$ می‌توان نوشت : $\sin\alpha = a$ پس $\sin x = \sin\alpha$

و از آن‌جا $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi + \pi - \alpha$

اگر $a > 1$ یا $a < -1$ باشد معادله $\sin x = a$، یا $\cos x = a$ جواب ندارد.

برای حل $\tan x = b$ زاویهٔ β را چنان می‌یابیم که $\tan\beta = b$ پس $\tan x = \tan\beta$ و از آن‌جا $x = k\pi + \beta$.

به جواب‌هایی که به‌صورت بالا نوشته شده باشند جواب‌های کلی معادله می‌گویند. ممکن است در معادله جواب‌هایی که در فاصلهٔ مشخص قرار دارند مورد نظر باشند. در این صورت به k عددهای صحیح مختلف می‌دهیم تا جواب‌های مورد نظر به‌دست آید.

معادلات سادهٔ مثلثاتی

معادلات مثلثاتی دارای انواع مختلفی هستند که در این جا برخی از انواع سادهٔ آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد که دو نوع از آن‌ها را بررسی خواهیم کرد.

الف) معادله شامل یکی از مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ مجهول می‌باشد.

ابتدا این نوع معادلات را برحسب نسبت مثلثاتی که در معادله موجود است، حل کرده و پس از تعیین مقدار نسبت مثلثاتی، زوایایی را که جواب معادله هستند به‌دست می‌آوریم.

مثال : معادلهٔ $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل : از حل معادله برحسب sinx داریم. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و از آن‌جا که $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ پس $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$ و از آن‌جا $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ و $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$.

مثال : معادلهٔ $4\cos^2 x - 9\cos x + 5 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل :

این معادله به یک معادلهٔ درجه دوم شبیه است با فرض $\cos x = t$ داریم : $4t^2 - 9t + 5 = 0$ از حل این معادلهٔ درجه دوم داریم $t = 1$ و $t = \frac{5}{4}$

$$t=۱ \Rightarrow \cos x=۱ \Rightarrow \cos x=\cos ۰ \Rightarrow x=۲k\pi$$

$$t=\frac{۵}{۴} \Rightarrow \cos x=\frac{۵}{۴}$$ این معادله جواب ندارد.

مثال : معادلهٔ $\tan^۲ x-۳=۰$ را حل کنید و جواب‌های در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ را به‌دست آورید.

حل : می‌توان نوشت $\tan^۲ x=۳$ و از آن‌جا $\tan x=\pm\sqrt{۳}$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\tan x=\sqrt{۳} \Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۳}$$

$$\tan x=-\sqrt{۳} \Rightarrow \tan x=\tan(\frac{-\pi}{۳}) \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۳}$$

برای یافتن جواب‌های مورد نظر در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به k اعداد صحیح. و ±۱ و ±۲ و ... می‌دهیم تا کلیه جواب‌ها به‌دست آید.

همانطورکه در جدول مقابل مشخص است، معادله در این بازه ۴ جواب دارد.

k	x
۰	$\frac{\pi}{۳}$
۱	$\frac{۴\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}$
۲	$\frac{۵\pi}{۳}$

ب) معادله مثلثاتی شامل مقادیر چند نسبت مثلثاتی زاویهٔ مجهول می‌باشد.

مثلاً معادلاتی نظیر $\cos^۲ x-\sin x=۱$، $\tan x+۲\cot x=۳$، $\sin x\cos x+\sin x=۰$ چند نسبت مثلثاتی از x را در بر دارند.

برای حل این گونه معادلات ممکن است با نقل تمام جملات در یک طرف تساوی و تبدیل نسبت‌ها به یک نسبت، یا تجزیه به عامل‌ها بتوان معادله را به معادلات ساده‌تر تبدیل کرده و بعد جواب‌های معادله را به‌دست آوریم.

مثال : معادلهٔ $۲\cos^۲ x=\sin x-۱$ را حل کنید.

حل : می‌توان همه نسبت‌ها را به سینوس تبدیل کرد. داریم :

$$۲(۱-\sin^۲ x)=\sin x-۱$$

$$۲\sin^۲ x+\sin x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x=۱ \\ \sin x=\frac{۳}{۲} \quad \text{(بدون جواب)} \end{cases}$$

$$\sin x = ۱ \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{array}{l} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۲}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \end{array}$$

حالات خاص : هرچند که روابط گفته شده برای حل معادلات مثلثاتی همواره برقرار است امّا در چند حالات خاص زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به‌دست آورد.

$$\begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi \\ \cos x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $۲\sin^۳x - \sin x = ۰$ را حل کنید.

حل :

$$\sin x(۲\sin^۲ x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \\ ۲\sin^۲ x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x - \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$

سه حالت در نظر می‌گیریم و در هر حالت معادلهٔ به دست‌آمده را حل می‌کنیم.

$$\sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $\tan x - ۲\cot x = ۱$ را حل کنید.

حل : برای حل این معادله کافی است قرار دهیم $\cot x = \frac{۱}{\tan x}$ بنابراین :

$$\tan x - ۲ \times \frac{۱}{\tan x} = ۱$$

چون $\tan x \neq ۰$ پس طرفین معادله را در $\tan x$ ضرب می‌کنیم داریم :

$$\tan^۲ x - ۲ = \tan x$$

$$\tan^۲ x - \tan x - ۲ = ۰$$

$$\tan x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱+۸}}{۲} = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = ۲ \\ \tan x = -۱ \end{cases}$$

در حالت $\tan x = -۱$ می‌توان نوشت :

$$\tan x = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$$

برای حل $\tan x = ۲$ فرض کنیم α زاویه‌ای باشد که تانژانت آن برابر ۲ باشد.

می‌توان نوشت $x = k\pi + \alpha$ که در آن $\boxed{\tan\alpha = ۲}$.

مثال : معادله‌های مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

حل : معادله را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\sin x(۱ + \cos x) + (۱ + \cos x) = ۰$$

$$(۱ + \cos x)(\sin x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱ + \cos x = ۰ \Rightarrow \cos x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \\ ۱ + \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $\cos ۲x = \sin(\frac{\pi}{۲} - x)$ را حل کنید.

حل : می‌توان $\sin(\frac{\pi}{۲} - x)$ را به $\cos x$ تبدیل کرد و به معادلهٔ $\cos ۲x = \cos x$ رسید علاوه‌بر آن که می‌توان عبارت را به‌صورت $۲\cos^۲ x - ۱ = \cos x$ نوشت و از طریق یک معادلهٔ درجه دوم مقدار x را یافت. همچنین می‌توان مستقیماً عمل کرد.

$$\cos ۲x = \cos x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm x \begin{cases} x = ۲k\pi \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} \end{cases}$$

مثال : معادلهٔ $\sin ۴x+\sin ۳x=۰$ را حل کنید و جواب‌های در بازهٔ $[۰,\pi]$ را بیابید.

حل :

$$\sin ۴x=-\sin ۳x \Rightarrow \sin ۴x=\sin(-۳x)$$

$$\begin{cases} ۴x=۲k\pi+(-۳x) \Rightarrow x=\frac{۲}{۷}k\pi \\ ۴x=۲k\pi+\pi-(-۳x) \Rightarrow x=۲k\pi+\pi \end{cases}$$

حال با دادن اعداد صحیح ۰ و ۱ ± و ۲ ± و ...

k	۰	۱	۲	۳
x	$۰,\pi$	$\frac{۲\pi}{۷}$	$\frac{۴\pi}{۷}$	$\frac{۶\pi}{۷}$

مسائل

معادلات زیر را حل کرده و جواب‌های کلی آن‌ها را بیابید.

۱) $۲\sin ۲x-۱=۰$

۲) $۲\cos x+\sqrt{۳}=۰$

۳) $\sin ۲x+\sin x=۰$

۴) $\tan x=۳\cot x$

۵) $۲\sin^۲ ۲x-\sin ۲x-۱=۰$

۶) $\sin ۲x=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$

۷) $\sin ۲x\cos x-\cos ۲x\sin x=۱$

۸) $\cos ۲x-۳\cos x+۲=۰$

۹) $\cos^۲ x-\sin^۲ x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۰) $\cos x-\cos^۳ x=۰$