فصل ۴

مُدل‌سازی ریاضی

مدل به معنی نمونه و الگویی است که براساس آن واقعیتی را مجسّم می‌کنیم. اسباب‌بازی‌ها، نمونه‌های آشنا از مدل‌هایی هستند که کودکان از طریق آن‌ها می‌توانند دنیای واقعی را تجسّم و درک کنند و به تصوّرات خود عینیت بخشند. درحقیقت، انسان‌ها در مراحل مختلف زندگی برای درک واقعیت‌ها ناگزیر از مُدل‌سازی هستند. یک نمونه‌ی جالب مدل‌سازی کره‌ی جغرافیایی است که در تشریح و توضیح مختصّات جغرافیایی زمین مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در شروع آموزش ریاضیات برای درک بهتر بسیاری از مفاهیم از مدل‌سازی استفاده می‌شود. مثلاً برای تدریس مفهوم عدد، نمایش اعداد حقیقی روی محور و نمایش نقطه در دستگاه مختصات دکارتی از مدل‌سازی بهره می‌گیریم. و این روند تا مراحل بالاتر آموزش هم‌چنان ادامه دارد.

مدل‌های فیزیک نیوتنی و فیزیک نسبیت اینشتین نیز نمونه‌هایی از مدل‌سازی قوانین طبیعت هستند. فیزیک نیوتنی مدلی از جهان ارائه می‌کند که اگرچه کامل و بی‌نقص نیست امّا در تبیین بسیاری از پدیده‌های طبیعی مفید است. با این حال، این مدل در مورد حرکت ذراتی که سرعتی نزدیک به سرعت نور دارند پاسخگو نیست و مدل ریاضی نسبیت اینشتین در این زمینه رهگشا است. هدف این فصل، ارایه‌ی مدل‌سازی ریاضی چند مسأله از زندگی واقعی و حلّ آن‌ها است.

۴ـ۱ـ مسائل رشد[1]

فعالیّت ۴ـ۱

مریم و دوستانش به حفظ محیط زیست اهمیت زیادی می‌دهند و اخبار مربوط به تحوّلات کره‌ی مَسکون را با دقّت دنبال می‌کنند. در روز اوّل مِهر، مریم ادّعا کرد که در خبر آمده است «لایه‌ی

۱ـ Growth

اُزُن زمین به‌سرعت در حال از بین رفتن است و خطرِ جدّی، زندگی ساکنان کره‌ی زمین را در ده سال آینده تهدید می‌کند!» مریم تلفنی این خبر را به دو نفر از دوستانش گفت و از هریک از آن‌ها خواست که خبر را تا روز بعد، به دو نفر دیگر اطّلاع دهند. روز دوّم، هریک از این دو نفر، خبر را به دو نفر دیگر رساند یعنی در روز دوّم مهر، چهارنفر دیگر خبر را شنیدند و در روز سوّم هشت نفر دیگر به آن‌ها که خبر را شنیده بودند، اضافه شدند. اگر خبر به همین ترتیب پخش شود، در روز دهم مهر چند نفر خبر را می‌شنوند؟ تا روز دهم، مجموعاً چند نفر خبر را خواهند شنید؟ برای یافتن پاسخ، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

با توجّه به جدول (۱)، می‌بینیم که سرعت پخش یا رشد خبر چقدر بوده است!

جدول (۱)

روز: n	تعداد افرادی که خبر را در روز nاُم می‌شنوند.	تعداد کل افرادی که تا روز nاُم خبر را شنیده‌اند ــ مریم هم جزءِ این عده است.
قبل از شروع به بخش خبر، تنها مریم آن را شنیده است.	۱	۱
۱	۲	۳
۲	۴	۷
۳	۸	۱۵
۴	۱۶	۳۱
۵	۳۲	۶۳
۶	۶۴	۱۲۷
۷	۱۲۸	۲۵۵
۸	۲۵۶	۵۱۱
۹	۵۱۲	۱۰۲۳
۱۰	۱۰۲۴	۲۰۴۷

تمرین ۱ : اگر مریم از دوستانش خواسته بود که هر پنج دقیقه یک بار خبر را به اطلاع دو نفر دیگر برسانند، چند دقیقه طول می‌کشید تا ۲۰۴۷ نفر خبر را بشنوند؟

اگر تعداد افرادی که در پایان روز بیستم، بیست و هشتم یا هر روز دیگر از خبر آگاهی پیدا می‌کنند مورد نظر باشد، قطعاً باید به‌دنبال راه میان‌بری بگردیم وگرنه محاسبات، طولانی، وقت‌گیر و کسل کننده می‌شوند. به همین منظور، جدول (۱) را برحسب توان‌های ۲ بازنویسی می‌کنیم. شما هم جای علامت سؤال‌ها را با استفاده از ماشین حساب، پر کنید :

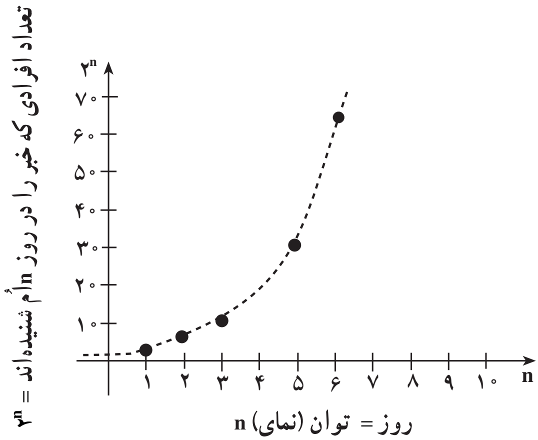
جدول (۲)

روز: n	**تعداد افرادی که در روز nاُم خبر را شنیده‌اند.**	**تعداد کل افرادی که تا روز nاُم خبر را شنیده‌اند ـــ مریم هم جزءِ این عده است.**
قبل از شروع به پخش خبر، تنها مریم آن را شنیده است.	$۱ = ۲^{۰}$	$۱ = ۲^{۰+۱} - ۱$
۱	$۲ = ۲^{۱}$	$۳ = ۲^{۱+۱} - ۱$
۲	$۴ = ۲^{۲}$	$۷ = ۲^{۲+۱} - ۱$
۳	$۸ = ۲^{۳}$	$۱۵ = ۲^{۳+۱} - ۱$
۱۰	$۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$	$۲۰۴۷ = ۲^{۱۰+۱} - ۱$
۱۱	$۲۰۴۸ = ۲^{۱۱}$	$۴۰۹۵ = ۲^{۱۱+۱} - ۱$
؟	۶۵۵۳۶	؟
؟	؟	۵۲۴۲۸۷
۲۰	$۲^{۲۰}$	$۲^{۲۰+۱} - ۱$
۲۸	$۲^{۲۸}$	$۲^{۲۸+۱} - ۱$
n	۲^{n}	$۲^{n+۱} - ۱$

با دقّت در جدول، مشاهده می‌کنیم که با گذشت یک روز، تعداد شنوندگان خبر در آن روز دوبرابر روز قبل می‌شوند و تعداد کل افراد (ستون سوم) تقریباً دوبرابر تعداد شنوندگان خبر در آن روز می‌شوند. این مشاهده، رابطه‌ی بین دو کمیّت یا دو متغیر را به ما نشان می‌دهد یعنی تعداد شنوندگان

خبر در هر روز، تابعی از آن روز است. رابطه‌ی بین تعداد روزها و تعداد شنوندگان خبر در آن روز، یک **تابع نمایی** است، زیرا رشد تعداد افراد شنونده‌ی خبر، به‌صورت توان‌ها یا نماهای ۲ است.

۴ــ۱ــ۱ــ نمودار رُشد نمایی: الگویی را که در ستون دوّم جدول مشاهده کردیم به‌صورت نمودار نمایش می‌دهیم :



شکل ۱ــ تعداد افرادی که در روز nاُم خبر را شنیده‌اند.

نمودار توان‌های دو، نمونه‌ای از یک تابع نمایی است و تصویر فوق رابطه‌ی بین n و ۲^{n} را نشان می‌دهد. این رابطه را می توانیم به‌صورت $b = ۲^{n}$ نیز نمایش دهیم. درواقع، روابطی از نوع $b = a^{n}$ که‌در آن a بزرگ‌تر از یک است (a . ۱) شکلی مشابه با این نمودار دارند. حرف a معرّف **پایه** و حرف n معرف **نما** یا **توان** است.

مثال ۱: با توجّه به نمودار فوق، می‌توانیم نماهای کسری ۲ را تقریب بزنیم. مثلاًبرای به‌دست آوردن مقدار $b = ۲^{\frac{۷}{۲}}$ ، چون $\frac{۷}{۲}$ یعنی ۳/۵ بین ۳ و ۴ است، درنتیجه مقدار $۲^{\frac{۷}{۲}}$ نیز بین $۲^{۳}$ و $۲^{۴}$ یا بین ۸ و ۱۶ است. پس مقدار تقریبی $۲^{\frac{۷}{۲}}$ برابر ۱۲ است.

مثال ۲: اگر بخواهیم بدانیم که چه توانی از ۲ مساوی ۷۵ است، به نمودار مراجعه کرده، جواب تقریبی ۶/۲ را به‌دست می‌آوریم زیرا ۷۵ بین ۶۴ و ۱۲۸ یعنی $۲^{۶}$ و $۲^{۷}$ است :

$۲^{۶} . ۲^{n} . ۲^{۷}$

۶۴ . ۷۵ . ۱۲۸

یعنی n بین ۶ و ۷ است و چون ۷۵ به ۶۴ نزدیک‌تر است، پس n به شش نزدیک‌تر است. (این دو مثال را مقایسه کنید.)

تمرین ۲: با استفاده از نمودار :

الف) مقدار تقریبی n را در رابطه ۵۶ = ۲^{n} پیدا کنید.

ب) مقدار تقریبی $۲^{\frac{۱۷}{۳}}$ را به‌دست آورید.

تمرین ۳: قسمت‌های(الف) و (ب) از تمرین ۲ چه رابطه‌ای با لگاریتم دارند؟ توضیح دهید.

فعالیت ۴ــ۲

فرض کنیم که هزینه‌ی تحصیل عمومی از سال ۱۳۷۰ خورشیدی با آهنگ[۱] سالانه‌ی ۱۰ درصد[۲] رو به افزایش بوده است و این روند تقریباً به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند. اگر در سال ۱۳۷۰ که میلاد به کلاس اوّل رفت، هزینه‌ی تحصیل[۳] او ۱۸۰۰۰ تومان بوده باشد، این هزینه در دوره‌ی پیش‌دانشگاهی (پس از ۱۲ سال) یعنی در سال ۱۳۸۲ چه‌قدر خواهد بود؟ برای پاسخ به این سؤال، دو مسیر مختلف را در نظر می‌گیریم :

مسیر ۱: هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان یک سال چنین است :

a = هزینه‌ی اوّلیه +٪۱۰ (هزینه‌ی اولیه)

اگر هزینه‌ی اوّلیه را یک تومان فرض کنیم آن‌گاه :

$$a=۱+\frac{۱۰}{۱۰۰}\times۱$$

$$a=۱+۰/۱$$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال ۱۳۷۰ $\boxed{a=۱/۱}$

در پایان سال ۱۳۷۱، هزینه‌ی تحصیل میلاد ۱/۱ هزینه‌ی تحصیل سال قبل او، یعنی ۱/۱×۱/۱ است زیرا $(۱/۱)(۱/۱)=(۱/۱)(۰/۱)+(۱/۱)$. در سال سوم، هزینه‌ی تحصیل میلاد ۱/۱ هزینه‌ی سال قبل او یعنی

$$(۱/۱\times۱/۱)\times۱/۱$$

۱ــ Rate (نرخ)

۲ــ آهنگ رشد سالانه ۱۰ درصد یک حالت فرضی است. برای محاسبه‌ی هزینه واقعی از اطلاعات بانک مرکزی استفاده نمایید.

۳ــ هزینه‌ی تحصیل شامل لوازم تحریر، کتاب و هزینه‌ی رفت و آمد مدرسه است.

است. اگر هزینه‌های تحصیل میلاد را در پایان هر سال به‌طور منظم بنویسیم، می‌توانیم هزینه‌ی تحصیل او را در پایان سال دوازدهم حدس بزنیم و سپس محاسبه کنیم

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال اوّل $= ۱/۱ = (۱/۱)^{۱}$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال دوم $= (۱/۱) \times (۱/۱) = (۱/۱)^{۲}$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال سوم $= (۱/۱ \times ۱/۱) \times (۱/۱) = (۱/۱)^{۳}$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال چهارم $= (۱/۱ \times ۱/۱ \times ۱/۱) \times (۱/۱) = (۱/۱)^{۴}$

هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان سال پنجم $= (۱/۱ \times ۱/۱ \times ۱/۱ \times ۱/۱) \times (۱/۱) = (۱/۱)^{۵}$

هزینه‌ی تحصیل میلاد درپایان سال دوازدهم $= \underbrace{(۱/۱ \times ۱/۱ \times \ldots \times ۱/۱)}_{۱۱\ \text{بار}} \times (۱/۱) = (۱/۱)^{۱۲}$

اگر هزینه‌ی تحصیل میلاد در پایان یک سال، یعنی ۱/۱ را $\mathbf{a}$ بنامیم، هزینه‌ی تحصیل او پس از $t = ۱۲$ به $(۱/۱)^{۱۲}$ می‌رسد. این مقدار را $\mathbf{b}$ می‌نامیم که نشان‌دهنده‌ی رشد هزینه‌ی تحصیلی میلاد پس از گذشت $t = ۱۲$ دوره‌ی زمانی است. با توجّه به آن‌چه که در این فعّالیت انجام دادیم، روابط زیر را به‌دست آوردیم

$$(۱/۱)^{۱۲} = \mathbf{b}$$

یا

$$\boxed{\mathbf{a}^{t} = \mathbf{b}}$$

$\mathbf{a}$= یک به اضافه‌ی درصد افزایش **(فاکتور رشد در یک واحد زمانی)**؛

$\mathbf{t}$ = دوره‌ی زمانی ؛

$\mathbf{b}$ = فاکتوری که مقدار اولیّه در آن ضرب می‌شود تا هزینه را در t دوره‌ی زمانی به دست دهد **(فاکتور رشد در t دوره‌ی زمانی)**.

رابطه‌ی فوق را با این فرض که هزینه‌ی اولیّه یک تومان بود به دست آوردیم. چون هزینه‌ی اولیّه، ۱۸۰۰۰ تومان است، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم با ضرب هزینه‌ی اولیّه (۱۸۰۰۰ تومان) در فاکتور رشد در ۱۲ دوره‌ی زمانی، یعنی $\mathbf{b} = (۱/۱)^{۱۲}$ به دست می‌آید

هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم = هزینه‌ی اولیّه $\times (۱/۱)^{۱۲}$

$$= ۱۸۰۰۰ \times (۱/۱)^{۱۲}$$

برای محاسبه‌ی عبارت فوق یا از طرفین لگاریتم می‌گیریم و یا با استفاده از تابع نمایی y^{x} در ماشین حساب علمی، مقدار $(۱/۱)^{۱۲}$ را به دست می‌آوریم و سپس در ۱۸۰۰۰ ضرب می‌کنیم درنتیجه

هزینه‌ی تحصیل در سال دوازدهم $= ۱۸۰۰۰ \times ۳/۱۳۸ = ۵۶۴۹۱/۷۱۰۷۸$

تمرین ۴ــ با استفاده از لگاریتم، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم را به دست آورید.

مسیر ۲ــ به کمک ماشین حساب، هزینه‌ی تحصیل میلاد را در هر سال با استفاده‌ی متوالی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آوریم :

هزینه‌ی تحصیل در پایان هر سال = هزینه در شروع سال + هزینه در شروع سال ۰/۱

(۱) هزینه‌ی تحصیل در پایان اوّلین سال : ۱۳۷۰ $= ۱۸۰۰۰ + ۰/۱(۱۸۰۰۰) = ۱۹۸۰۰$

(۲) هزینه‌ی تحصیل در پایان دومین سال : ۱۳۷۱ $= ۱۹۸۰۰ + ۰/۱(۱۹۸۰۰) = ۲۱۷۸۰$

(۳) هزینه‌ی تحصیل در پایان سومین سال : ۱۳۷۲ $= ۲۱۷۸۰ + ۰/۱(۲۱۷۸۰) = ۲۳۹۵۸$

(۴) هزینه‌ی تحصیل در پایان دوازدهمین سال : ۱۳۸۱ $= ۵۱۳۵۶ + ۰/۱(۵۱۳۵۶) = ۵۶۴۹۱/۷۰$

با دقّت در چگونگی رشد هزینه در محاسبات فوق، می‌توانیم مراحل بالا را به صورت دیگری بازنویسی کنیم

(۱ــ۱) هزینه‌ی تحصیل در پایان اولین سال تحصیلی $= ۱۹۸۰۰ = ۱۸۰۰۰(۱ + ۰/۱) = ۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۱}$

(۲ــ۲) هزینه‌ی تحصیل در پایان دومین سال تحصیلی $= ۱۹۸۰۰(۱ + ۰/۱) = ۱۹۸۰۰(۱/۱)^{۱}$،

از رابطه‌ی ۱ــ۱، مقدار ۱۹۸۰۰ را در رابطه‌ی ۲ــ۲ جایگزین می‌کنیم.

هزینه‌ی تحصیل در پایان دومین سال $= ۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۱}(۱/۱)^{۱} = ۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۲}$,

رابطه‌ی (۳) را نیز بازنویسی می‌کنیم

هزینه‌ی تحصیل در پایان سومین سال $= ۲۱۷۸۰(۱ + ۰/۱)$

$= ۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۲}(۱/۱)$

$= ۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۳}$,

با همین استدلال، هزینه‌ی تحصیل میلاد در سال دوازدهم را حدس می‌زنیم

هزینه‌ی تحصیل در پایان دوازدهمین سال $= ۱۸۰۰۰(۱/۱)^{۱۲}$,

می‌توانیم به جای هزینه‌ی اولیه یعنی ۱۸۰۰۰ تومان، $A_۰$ را قرار دهیم و مراحل فوق را از نو بنویسیم

$A_۰ = ۱۸۰۰۰$

$A_۱ = ۱۸۰۰۰ + ۱۸۰۰۰(۰/۱) = ۱۸۰۰۰(۱/۱)$

یا

$$A_1 = A_0 + A_0(0/1)$$

$$A_1 = A_0(1/1) \qquad (۵)$$

به طور مشابه

$$A_2 = A_1 + A_1(0/1) = A_1(1/1) \qquad (۶)$$

$$A_3 = A_2 + A_2(0/1) = A_2(1/1) \qquad (۷)$$

با همین استدلال،

$$A_{12} = A_{11}(1/1)$$

مقدارهای A_1 و A_2 را از (۵) و (۶) به‌دست آورده و در (۷) جایگزین می‌کنیم

$$A_1 = A_0(1/1)$$

$$A_2 = A_1(1/1) = A_0(1/1)(1/1) = A_0(1/1)^2$$

$$A_3 = A_2(1/1) = A_0(1/1)^2(1/1) = A_0(1/1)^3$$

به همین ترتیب A_{12} را به‌دست می‌آوریم

$$A_{12} = A_0(1/1)^{12}$$

و در حالت کلّی

$$A_t = A_0(1/1)^t$$

که در آن t تعداد سال‌هاست.

اگر در حالت کلّی، آهنگ رشد هزینه را r در نظر بگیریم، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\boxed{\mathbf{A_t = A_0(1+r)^t}}$$

که در آن :

$\underline{A_0}$ = هزینه‌ی اوّلیه ؛

$\underline{r}$ = آهنگ رشد سالانه‌ی هزینه ؛

$\underline{t}$ = تعداد سال‌ها ؛

$\underline{A_t}$ = هزینه‌ی انباشته شده بعد از t سال ؛

اختلاف این روش با روش مسیر ۱ در آن است که در این‌جا هزینه‌ی انباشته شده بعد از t سال یعنی A_t را مستقیماً به دست آوردیم در حالی که در مسیر ۱ ابتدا **b** یعنی **فاکتور رشد** در t را

محاسبه کردیم و سپس با ضرب هزینه‌ی اولیّه یعنی A_0 در آن، A_t را حساب کردیم که در آن

$$\mathbf{b = a^t = (1 + r)^t}$$

a = آهنگ یا فاکتور رشد در یک سال (رشد سالانه) ؛

b = آهنگ یا فاکتور رشد در t سال ؛

t = تعداد سال‌ها ؛

مثال ۳: متخصصّان بر این باورهستند که زمین قابل کشت و زرع کره‌ی مسکون حداکثر می‌تواند ۴۰ میلیارد نفر را غذا دهد[1]. در شروع سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیّت تقریبی کره‌ی زمین ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر جمعیّت به‌طور نمایی و با ضریب ثابت ۲٪ در سال رشد کند، چه زمانی جمعیّت به ۴۰ میلیارد نفر خواهد رسید.

حل: این مسأله را از هر دو مسیر پیشنهادی در فعالیت قبل حل می‌کنیم.

مسیر۱: با توجّه به این‌که جمعیّت به طور نمایی رشد می‌کند، پس با استفاده از رابطه‌ی $\mathbf{b = a^t}$ ، زمان خواسته شده را حساب می‌کنیم :

$$\mathbf{a} = 1 + \frac{2}{100}$$

یا

$$\boxed{\mathbf{a} = 1/02}$$

فاکتور رشد در t سال یعنی **b** برابر است با جمعیت در t سال آینده تقسیم بر جمعیت در سال ۱۹۹۰ (زمان شروع)

$$b = \frac{40,000,000,000}{5/2 \times 1,000,000,000} = \frac{40 \times 10^9}{5/2 \times 10^9} = 7/692$$

با دانستن **a** و **b**، تنها مجهول رابطه‌ی $\mathbf{a^t = b}$ یعنی زمان t را محاسبه می‌کنیم :

$$(1/02)^t = 7/692$$

$$\log(1/02)^t = \log 7/692$$

$$t(\log 1/02) = \log 7/692$$

با مراجعه به جدول لگاریتم و یا به کمک ماشین حساب، مقدارهای فوق را پیدا می‌کنیم :

$$t(0/0086) = 0/886$$

$$t = \frac{0/886}{0/0086} = 103/02$$

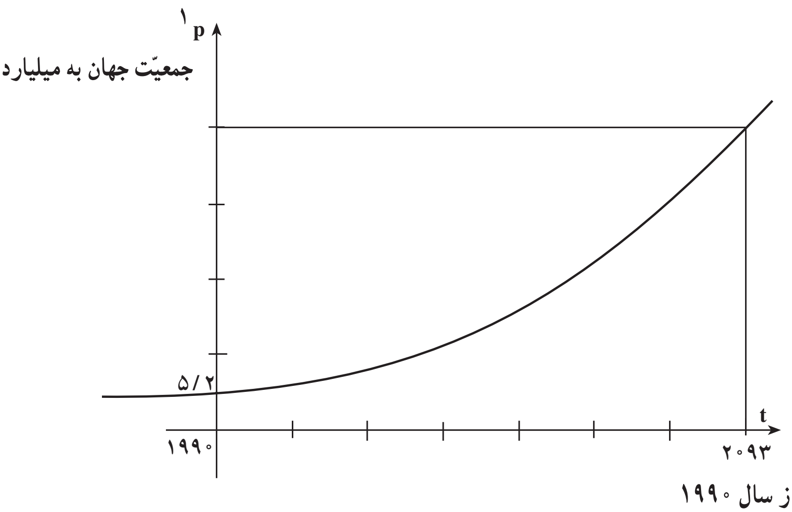
۱ــ مطمئناً با پیشرفت صنعت و تکنولوژی، راه‌های گوناگون دیگری برای تهیه‌ی غذا در کره‌ی زمین پیدا خواهد شد.

یعنی جمعیت کره‌ی زمین به طور تقریبی در سال

۱۹۹۰. ۱۰۳. ۲۰۹۳

به ۴۰ میلیارد نفر خواهد رسید.

در این مسأله یک **تابع نمایی** با پایه‌ی ۱/۰۲ وجود دارد که نشان دهنده‌ی آهنگ رشد **جمعیّت** در هر سال است. این تابع به این دلیل **نمایی** نامیده می‌شود که متغیّر t در **نما یا توان** قرار دارد.



شکل ۲ــ جمعیت تقریبی جهان: رشد نمایی

مسیر۲: داده‌های مسأله یعنی

A_t . ۴۰×۱۰^۹

A_0 . ۵/۲×۱۰^۹

r . ۲٪. ۲/۱۰۰ . ۰/۰۲

را در رابطه‌ی A_t . $A_0(1. r)^t$ جای‌گذاری می‌کنیم :

۴۰×۱۰^۹ . ۵/۲×۱۰^۹(۱. ۰/۰۲)^t

یا

۴۰. ۵/۲(۱/۰۲)^t

از طرفین لگاریتم می‌گیریم

۱ــ Population جمعیّت

$$\log ۴۰ = \log. ۵/۲(۱/۰۲)^{t}.$$

[1] $$\log(۴\times ۱۰) = \log ۵/۲ + \log(۱/۰۲)^{t}$$

$$\log ۴ + \log ۱۰ = \log ۵/۲ + t \log ۱/۰۲ \qquad (۸)$$

با مراجعه به جدول لگاریتم، یا با استفاده از ماشین حساب، مقدار لگاریتم‌های فوق را به دست می‌آوریم

$$\log ۴ = ۰/۶۰۲ \quad \text{و} \quad \log ۵/۲ = ۰/۷۱۶ \quad \text{و} \quad \log ۱/۰۲ = ۰/۰۰۸۶$$

سپس با جای‌گذاری آن‌ها در رابطه‌ی (۸)، مقدار t را پیدا می‌کنیم

$$۰/۶۰۲ + ۱ = ۰/۷۱۶ + t \times ۰/۰۰۸۶$$

$$۱/۶۰۲ - ۰/۷۱۶ = ۰/۰۰۸۶t$$

$$t = \frac{۱/۶۰۲ - ۰/۷۱۶}{۰/۰۰۸۶} = \frac{۰/۸۸۶}{۰/۰۰۸۶} = ۱۰۳/۰۲۰$$

در شکل ۲، مشاهده می‌شود که هر چه زمان به جلو می‌رود، جمعیّت سریع‌تر و سریع‌تر رشد می‌کند و این ویژگیِ یک تابع نمایی است. این نمودار نشان می‌دهد که حتّی اگر در ابتدا، یک تابع نمایی آهسته آهسته رشد کند، با گذشت زمان، این رشد سریع‌تر و سریع‌تر خواهد شد. شاید آگاهی از این موضوع به ما کمک کند تا بهتر با مشکلات ازدیاد جمعیّت آشنا شویم!

در فعالیّت قبلی، اگر رشد جمعیّت کره‌ی زمین را از سال ۱۹۹۰ به‌بعد با آهنگ‌رشد[2] ۱/۰۲ و در سال‌های مختلف حساب کنیم به نتایج جالبی می‌رسیم. به محاسبات زیر توجه کنید.

جمعیت کره‌ی زمین پس از گذشت ۳۰، ۳۵، ۵۰، ۶۶، ۷۰ و ۱۰۵ سال را از سال ۱۹۹۰ به بعد و با آهنگ رشد سالانه‌ی ۲ درصد حساب می‌کنیم

[3] $$P_t = P_{۰}(۱ + r)^{t} \qquad (۹)$$

$P_{۰} = ۵/۲$ میلیارد ۱۹۹۰ جمعیّت اولیه ــ شروع سال (۱۰)

$P_{۳۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۳۰} = ۹/۴۱۹$ میلیارد (۱۱)

$P_{۳۵} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۳۵} = ۱۰/۳۹۹ \;!\; ۵/۲ \times ۲$ میلیارد (۱۲)

$P_{۵۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۵۰} = ۱۳/۹۹۶$ میلیارد (۱۳)

۱ــ با تبدیل $\log ۴۰$ به $\log ۴ + \log ۱۰$، ارتباط بین لگاریتم‌گیری با نماد علمی بهتر دیده می‌شود.

۲ــ Growth rate

۳ــ در این رابطه به جای $A_۱$ و $A_۰$، از نمادهای $P_۱$ و $P_۰$ که معرّف جمعیت (Population) هستند، استفاده می‌کنیم.

$$P_{۶۶} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۶۶} = ۱۹/۲۱۳ \text{ میلیارد} \qquad (۱۴)$$

$$\underline{P_{۷۰} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۷۰} = ۲۰/۷۹۷ \approx ۵/۲\times ۴} \text{ میلیارد} \qquad (۱۵)$$

$$\underline{P_{۱۰۵} = ۵/۲(۱/۰۲)^{۱۰۵} = ۴۱/۵۹۳ \approx ۵/۲\times ۸} \text{ میلیارد} \qquad (۱۶)$$

در محاسبات فوق، مشاهده می‌کنیم که رابطه‌های (۱۲)، (۱۵) و (۱۶) از ویژگی خاصّی برخوردار هستند. رابطه‌ی (۱۲) نشان می‌دهد که پس از گذشت **۳۵ سال**، جمعیّت کره‌ی زمین به دو برابر جمعیّت اوّلیه آن (شروع سال ۱۹۹۰) می رسد. رابطه‌ی (۱۵) نشان‌دهنده‌ی چهاربرابرشدن جمعیّت کره‌ی زمین پس از گذشت **۷۰ سال** یعنی **۳۵×۲** سال است. رابطه‌ی (۱۶) حاکی از هشت برابرشدن جمعیت کره‌ی زمین پس از گذشت **۱۰۵ سال** یعنی **۳۵×۳** سال است. این یافته‌ها را در جدولی منظم می‌کنیم تا رابطه‌ی بین آن‌ها را بهتر ببینیم :

جدول (۳)

تعداد سال‌ها = t	تعداد دوره‌ی زمانی = T	جمعیّت کره‌ی زمین	
۳۵	۱	$۵/۲\times۲ = ۵/۲\times۲$	$۵/۲\times۲^{۱}$
۷۰	۲	$(۵/۲\times۲)\times۲ = ۵/۲\times۴$	$۵/۲\times۲^{۲}$
۱۰۵	۳	$(۵/۲\times۲\times۲)\times۲ = ۵/۲\times۸$	$۵/۲\times۲^{۳}$

جمعیّت کره‌ی زمین در هر **دوره‌ی زمانی**[۱]، یعنی هر ۳۵ سال یک‌بار، به دو برابر می‌رسد. این دوره‌ی زمانی (۳۵ سال) را **زمان دوبرابرشدن**[۲] جمعیّت کره‌ی زمین می‌نامیم.

> ***زمان دوبرابر شدن*** *یک تابع نمایی رشد، زمانی است که مقدار اوّلیه دو برابر شود. هر تابع نمایی رشد دارای یک زمان دو برابرشدن ثابت است.*

می‌توانیم به جای آهنگ رشد سالانه‌ی جمعیّت، آهنگ رشد ماهانه و حتی آهنگ رشد روزانه را به‌دست آوریم که به واقعیّت نیز نزدیک‌تر است. مسأله‌ی قبلی را با توجّه به آهنگ رشد ماهانه بررسی می‌کنیم. چون در رابطه‌ی

$$P_t = P_۰(۱+r)^t$$

۱ــ Time period

۲ــ Doubling time

r آهنگ رشد سالانه است. درنتیجه آهنگ رشد ماهانه $\frac{r}{۱۲}$ خواهد بود. به‌عنوان مثال، جمعیّت کره‌ی زمین در ۳۵ سال آینده با توجّه به جمعیّت اوّلیه ۵/۲ میلیارد نفری در سال ۱۹۹۰ و قراردادن زمان برحسب ماه عبارت است از :

$$P_{۳۵} = ۵/۲(۱+\frac{۰/۰۲}{۱۲})^{۱۲\times ۳۵} = ۱۰/۴۶۵ \text{ میلیارد}$$

درحالی که اگر آهنگ رشد سالانه را در نظر بگیریم، در ۳۵ سال آینده، جمعیت کره زمین تقریباً دو برابر یعنی $P_{۳۵} = ۱۰/۳۹۹$ میلیارد می‌شود که کم‌تر از تخمین جمعیّت با آهنگ رشد ماهانه است.

بهتر است برای مقایسه‌ی دقیق‌تر، جمعیّت دنیا را با درنظرگرفتن آهنگ رشد روزانه نیز بررسی کنیم. در چنین وضعی، به جای $r = ۰/۰۲$ ، $\frac{r}{۳۶۵}$ و یا $\frac{۰/۰۲}{۳۶۵}$ را قرار می‌دهیم، در این صورت :

$$P_{۳۵} = ۵/۲(۱+\frac{۰/۰۲}{۳۶۵})^{۳۶۵\times ۳۵} = ۱۰/۴۷۱$$

مشاهده می‌کنیم که آهنگ رشد روزانه‌ی جمعیّت دقیق‌تر از آهنگ رشد ماهانه و باز هم دقیق‌تر از آهنگ رشد سالانه است. به‌طورکلی، اگر تقسیم‌بندی باز هم کوچک‌تری از سال را در نظر بگیریم، دقّت ما بالاتر می‌رود. اگر سال را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت.

$$\boxed{P_t = P_{\circ}(۱+\frac{r}{n})^{nt}}$$

۴ـ۲ـ مسائل زوال[۱]

فعالیت ۴ـ۳

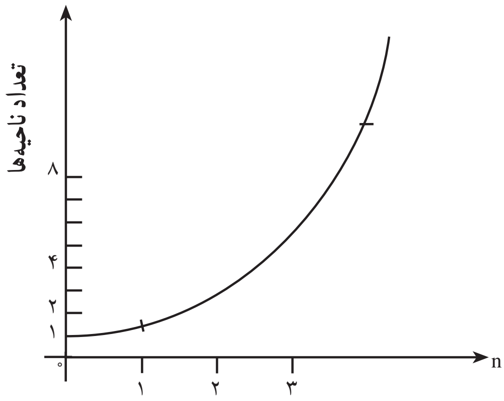
یک صفحه کاغذ سفید را در دست بگیرید و آن را تا بزنید. دوباره کاغذ تاخورده را تای جدید بزنید و این تازدن‌ها را تا آن‌جایی که می‌توانید ادامه دهید. بعد از اولین تا زدن، دو ناحیه به‌وجود می‌آید که مساحت هر یک نصف مساحت اولیه است. در دومین تا زدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آن‌ها نصف مساحت قبلی یعنی $\frac{۱}{۴}$ مساحت اولیه است. جدول (۴) چگونگی تغییر تعداد ناحیه‌هایی که بر اثر تازدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند و چگونگی تغییر مساحت‌های آن ناحیه‌ها را بررسی می‌کند :

۱ـ Decay

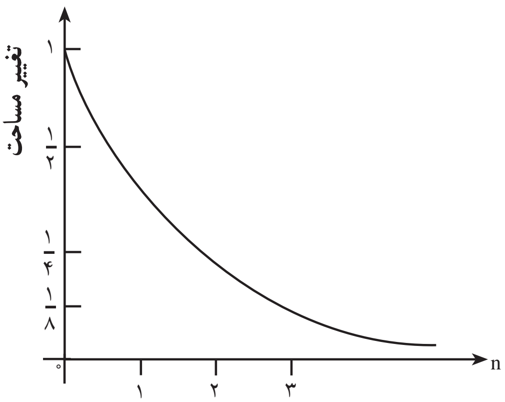
جدول (۴)

تعداد تازدن‌ها n	تعداد ناحیه‌ها	چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌ها
۰	$۱ = ۲^۰$	$۱ = \frac{۱}{۲^۰} = (\frac{۱}{۲})^۰$
۱	$۲ = ۲^۱$	$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲^۱} = (\frac{۱}{۲})^۱$
۲	$۴ = ۲^۲$	$\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲^۲} = (\frac{۱}{۲})^۲$
۳	$۸ = ۲^۳$	$\frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲^۳} = (\frac{۱}{۲})^۳$
n	۲^n	$\frac{۱}{۲^n} = (\frac{۱}{۲})^n$

با توجه به داده‌های جدول بالا، دو نمودار زیر را رسم می‌کنیم :



شکل ۳ــ رشد



شکل ۴ــ زوال

همان‌طورکه در دو نمودار دیده می‌شود، هم‌چنان که تعداد ناحیه‌ها بر اثر تاکردن‌های متوالی بیشتر و بیشتر می‌شود، مساحت ناحیه‌ها کمتر و کمتر می‌شود! در واقع، تعداد ناحیه‌ها به طور نمایی رشد می‌کند، مساحت ناحیه‌ها به طور نمایی رو به زوال می‌رود. با بررسی عمیق‌تر نمودار (۴) مشاهده می‌کنیم که فاکتور زوال $a = \frac{۱}{۲}$ است که از یک کوچک‌تر است در حالی که در نمودار (۳) فاکتور رشد $a = ۲$ است که از یک بزرگ‌تر است.

۴ــ۲ــ۱ــ چگونگی تعیین قدمت سنگواره (زوال کربن)

فعالیت ۴ــ۴

کربن به‌وسیله‌ی موجودات زنده جذب می‌شود. نسبت ایزوتوپ‌های[1] C^{12}، C^{13} و C^{14} در موجودات زنده ثابت است. با این حال، به محض این‌که موجودات زنده بمیرند، جذب ایزوتوپ C^{14} به وسیله‌ی آن‌ها متوقف می‌شود و C^{14} موجود در آن‌ها شروع به زوال می‌کند. دانستن این‌که با چه سرعتی C^{14} روبه زوال می‌رود، به ما فرصت می‌دهد تا قدمت موجودات را پیدا کنیم و این فن (تکنیک) وسیله‌ی قدرتمندی برای باستان‌شناسان است که به آن آزمایش C^{14} گفته می‌شود. لازم است گفته شود که ۵۷۰۰ سال طول می‌کشد تا مقدار ایزوتوپ C^{14} به نصف مقدار اوّلیه‌ی خود برسد.

مثال۴: کربن یک استخوان فسیل شده شامل تنها ۲۰ درصد مقدار معمولی C^{14} است. می‌خواهیم قدمت استخوان را تخمین بزنیم.

حل: می‌دانیم که ۵۷۰۰ سال طول می‌کشد تا مقدار ایزوتوپ C^{14} کربن به نصف کاهش یابد. این زمان، **نیم‌عمر** و ۵۷۰۰ سال، یک **دوره‌ی زمانی** برای زوال C^{14} در کربن نامیده می‌شود. در واقع، ما به دنبال پیدا کردن دوره‌ی زمانی مشخصی هستیم که با گذشت آن، مقدار ایزوتوپ C^{14} کربن به ٪۲۰ می‌رسد. الگوی زیر می‌تواند راهنمای ما باشد :

جدول (۵)

دوره‌ی زمانی	تعداد سال‌ها	مقدار C^{14} باقی‌مانده	درصد مقدار باقی‌مانده
۱	۵۷۰۰	$\frac{1}{2}$	٪۵۰
۲	۱۱۴۰۰=۲×۵۷۰۰	$(\frac{1}{2})\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	٪۲۵
۳	۱۷۱۰۰=۳×۵۷۰۰	$(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	٪۱۲/۵

با مشاهده‌ی جدول درمی‌یابیم که در مدتی بیشتر از دو دوره‌ی زمانی و کم‌تر از سه دوره‌ی زمانی، مقدار C^{14} به ۲۰ درصد مقدار اولیه‌ی خود می‌رسد. اکنون که زمان تقریبی را پیدا کردیم، با دانستن این‌که میزان C^{14} در کربن **به صورت نمایی روبه زوال می‌رود** و با استفاده از

۱ــ ایزوتوپ‌های کربن دارای تعداد پروتون‌ها و الکترون‌های مساوی (۶) هستند ولی تعداد نوترون‌های آن‌ها متفاوت است. این تعداد در C^{12}، C^{13} و C^{14} به‌ترتیب برابر ۶، ۷ و ۸ است.

رابطه‌ی $a^T = b$، زمان دقیق را پیدا می‌کنیم

فاکتور زوال در یک دوره‌ی زمانی $a = \frac{۱}{۲}$

فاکتور زوال در T دوره‌ی زمانی $b = \frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۵}$

در نتیجه

(۱) $\boxed{(\frac{۱}{۲})^T = \frac{۱}{۵}}$

رابطه‌ی (۱) مدلی مناسب برای به‌دست آوردن T است. با استفاده از (۱) و به کارگیری روش‌های محاسباتی متنوع، می‌توانیم مقدار T و سپس $t = ۵۷۰۰T$ را پیدا کنیم.

روش ۱: لگاریتم گرفتن از دو طرف (۱)

$$T \ \log\frac{۱}{۲} = \log\frac{۱}{۵}$$

$$T(-۰/۳۰۱) = -۰/۶۹۸$$

$$T = \frac{-۰/۶۹۸}{-۰/۳۰۱}$$

$$\boxed{T = ۲/۳۲۲}$$

چون هر دوره‌ی زمانی برای زوال مقدار $C^{۱۴}$ در کربن ۵۷۰۰ سال است، در نتیجه زمان دقیق برابر است با

$$t = ۵۷۰۰ \times T = ۵۷۰۰ \times ۲/۳۲۲$$

$$\boxed{t = ۱۳۲۳۵/۴}$$

یعنی استخوان فسیلی که شامل تنها ۲۰ درصد $C^{۱۴}$ است قدمتی برابر با ۱۳۲۳۵/۴ سال دارد.

روش ۲: استفاده از نمودار توان‌های کسری ۱۰ (فصل لگاریتم)

(۲) $(\frac{۱}{۲})^T = \frac{۱}{۵}$

دو طرف (۲) را به صورت معکوس می‌نویسیم (به چه دلیل؟) :

$$۲^{T} = ۵ \qquad (۳)$$

با توجه به نمودار جدول مذکور، مقادیر ۲ و ۵ را برحسب توان‌های کسری ۱۰ می‌نویسیم

$$۵ = ۱۰^{۰/۶۹۹} \quad , \quad ۲ = ۱۰^{۰/۳۰۱}$$

و آن‌ها را در (۳) جایگزین می‌کنیم

$$(۱۰^{۰/۳۰۱})^{T} = ۱۰^{۰/۶۹۹}$$

$$۱۰^{۰/۳۰۱T} = ۱۰^{۰/۶۹۹} \qquad (۴)$$

چون پایه‌ها در (۴) با هم برابرند، درنتیجه توان‌ها نیز با هم مساویند

$$۰/۳۰۱T = ۰/۶۹۹ \qquad (۵)$$

$$T = \frac{۰/۶۹۹}{۰/۳۰۱}$$

تعداد دوره‌های زمانی لازم برای رسیدن $C^{۱۴}$ به ٪ ۲۰ مقدار اولیه برابر است با

$$\boxed{T = ۲/۳۲۲}$$

و مدّت زمان برحسب سال برابر است با

$$t = ۵۷۰۰T = ۵۷۰۰ \times ۲/۳۲۲$$

$$\boxed{t = ۱۳۲۳۵/۴}$$

می‌بینیم که زمان دقیق به زمان تقریبی که در جدول (۵) به‌دست آوردیم، یعنی بین ۲ و ۳ دوره‌ی زمانی بسیار نزدیک است.

فعالیت ۴ــ ۵

مسأله: برای بیهوش کردن یک سگ، ۳۰ میلی‌گرم داروی سدیم پنتوباربیتال برای هر یک کیلوگرم وزن بدن لازم است. اگر دارو به طور نمایی در بدن روبه‌زوال برود، با در نظر گرفتن نیم‌عمر دارو که ۴ ساعت است، تقریباً چه مقدار دارو برای بیهوش نگه‌داشتن این سگ ۲۰ کیلوگرمی به مدّت ۴۵ دقیقه لازم است؟

حل: کلید اصلی حل این مسأله، دانستن زوال نمایی دارو در بدن است به این معنا که بعد از هر دوره‌ی زمانی (۴ساعت) دارو به نصف مقدار اولیه‌ی خود در بدن می‌رسد و ادامه‌ی نصف شدن‌ها همان زوال نمایی است.

در ضمن، باید بدانیم ۴۵ دقیقه چه نسبتی از یک دوره‌ی زمانی ۴ ساعتی است :

$$\text{۴۵ دقیقه} = \frac{\frac{۳}{۴}}{۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

یا

$$\frac{۴۵}{۴\times۶۰} = \frac{۹}{۴\times۱۲} = \frac{۳}{۴\times۴} = \frac{۳}{۱۶} \text{ دوره‌ی زمانی}$$

با توجه به‌داده‌های مسأله، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

جدول (۶)

دوره‌ی زمانی	تعداد ساعت‌ها	مقدار داروی باقی‌مانده برحسب توان‌های $\frac{۱}{۲}$
$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۳}{۱۶}\times۴$	$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۳}{۱۶}}$
۱	۱×۴	$(\frac{۱}{۲})^{۱}$
۲	۲×۴	$(\frac{۱}{۲})^{۲}$

داده‌های مسأله یعنی

فاکتور زوال در یک واحد زمانی= $\frac{۱}{۲}$

فاکتور زوال در $\frac{۳}{۱۶}$ واحد زمانی= b

دوره‌ی زمانی مورد نظر= $t = \frac{۳}{۱۶} = ۰/۱۸۷۵$

را در رابطه‌ی $a^t = b$ قرار می‌دهیم. آنگاه

$$(۰/۵)^{۰/۱۸۷۵} = b$$

یا

$$(\frac{۱}{۲})^{\frac{۳}{۱۶}} = b. \qquad (۶)$$

رابطه‌ی (۶) مدل مناسبی را برای پیدا کردن فاکتور زوال در $\frac{۳}{۱۶}$ واحد زمانی به دست می‌دهد. برای انجام محاسبات، راحت‌ترین کار استفاده از ماشین حساب علمی است : با توجه به وزن بدن سگ که ۲۰ کیلوگرم است، مقدار دارویی که در هر لحظه تا پایان عمل باید در بدن سگ وجود داشته باشد تا او را بیهوش نگه دارد، برابر $۶۰۰ = ۳۰ \times ۲۰$ میلی‌گرم است. در واقع، مقدار داروی بیهوشی لازم برای مدت عمل باید بیش از ۶۰۰ میلی‌گرم تا پایان عمل در بدن باشد. با محاسبات فوق، مقدار فاکتور زوال در ۴۵ دقیقه که همان $\frac{۳}{۱۶}$ دوره‌ی زمانی است را نیز پیدا کرده‌ایم

$$b = ۰/۸۷۸$$

تنها مجهول مسأله، مقدار داروی لازم در حین عمل است ؛ یعنی چه مقدار سدیم پنتوباربیتال باید به بدن سگ تزریق شود تا با توجه به فاکتور زوال $b = ۰/۸۷۸$ ، هم‌چنان ۶۰۰ میلی‌گرم دارو در بدن باقی بماند.

$$\text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق} \times ۰/۸۷۸ = ۶۰۰$$

$$\text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق} = \frac{۶۰۰}{۰/۸۷۸}$$

$$\boxed{\text{مقدار داروی مورد نیاز برای تزریق} = ۶۸۳/۳۷}$$

تمرین ۵: با روش‌های دیگر، ازجمله مراجعه به جدول لگاریتم، محاسبات فوق را انجام دهید.

مسائل

۱ــ اگر آهنگ رشد جمعیت در کشوری ۱/۰۲ در سال باشد، چند سال طول می‌کشد تا جمعیت دو برابر شود؟ (جواب را با تقریب یک رقم اعشار بنویسید)

۲ــ از یکی از آرامگاه‌های سومریان، یک ظرف سفالی با قدمت ۴۵ قرن یافت شده است. این قدمت با توجه به شواهد تاریخی است. برای تأیید آن، یک آزمایش C^{14} روی آن انجام شد. انتظار دارید چند درصد از کربن C^{14} اولیه، باقی مانده باشد؟

۳ــ ایزوتوپ هیدروژن H_1^3 که نیمه عمر آن ۱۲/۳ سال است در طبقات بالایی جو تشکیل می‌شود و همراه باران به زمین می‌آید. اگر میزان این ایزوتوپ در چوب یک کشتی قدیمی ٪۱۰ همان

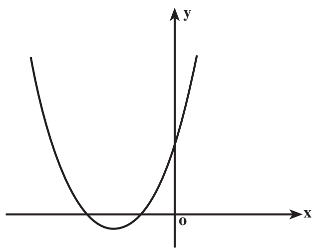
ایزوتوپ در چوب یک کشتی جدید مشابه باشد، سن آن را تقریب بزنید.

۴ــ معلوم شده است که میزان کربن $C^{۱۴}$ موجود در درختانی که توسط یخچال‌های متحرک عصر چهارم یخبندان نابود شده‌اند، ۲۷٪ میزان کربن $C^{۱۴}$ در درختان زنده است. درباره‌ی تاریخ شروع این عصر یخبندان چه می‌توانید بگویید؟

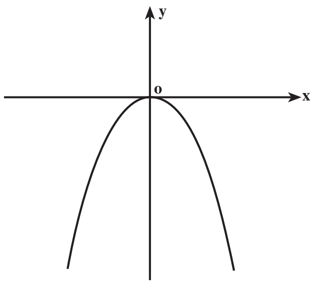
۴ــ۳ــ بهینه‌سازی

دامنه‌ی مسائل بهینه‌سازی سیار وسیع است، با این حال، در این کتاب، مسائلی از بهینه‌سازی را مطرح می‌کنیم که با دانستن رفتار و خصوصیات توابع درجه‌ی دوم قابل بررسی باشند.

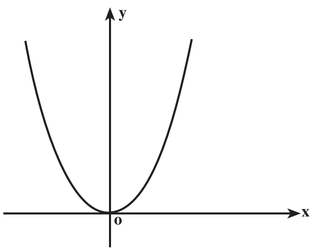
فعالیت ۴ــ۶



شکل ۵



شکل۶



شکل ۷

۱ــ از منحنی‌های بالا کدام‌یک ماکزیمم و کدام‌یک می‌نیمم دارند؟

۲ــ توابع $y = x^{۲} + ۱$ و $y = -x^{۲} + ۳$ را رسم کنید و وجود ماکزیمم و می‌نیمم را بررسی کنید.

۳ــ توابع $y = ۲x^{۲} + ۲x + ۱$ و $y = -x^{۲} + ۲x + ۱$ را رسم کنید و وجود ماکزیمم و می‌نیمم را بررسی کنید.

۴ــ از سؤال‌های ۱ تا ۳ چه نتیجه‌ای درباره‌ی ماکزیمم و می‌نیمم تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^{۲} + bx + c$ برای دو حالت $a \;.\; ۰$ و $a \;.\; ۰$ می‌گیرید؟

۵ــ اگر $a . 0$ ، سهمی رو به بالا است یا رو به پایین؟ تابع ماکزیمم دارد یا می‌نیمم؟ اگر $a . 0$ ، سهمی رو به بالا است یا رو به پایین؟ تابع ماکزیمم دارد یا می‌نیمم؟

۶ــ اگر $a = 0$ ، در مورد ماکزیمم و می‌نیمم تابع چه می‌توان گفت؟

۷ــ طول نقطه‌ای را که در آن تابع ماکزیمم یا می‌نیمم دارد تعیین کنید.

۸ــ مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم تابع f را تعیین کنید و سپس مختصات نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم آن را بنویسید.

۹ــ آیا جواب سؤال‌های ۵ تا ۸ برای هر تابع درجه‌ی دوم درست است؟ چرا؟

۱۰ــ آیا می‌توانید بدون قلم و کاغذ، نمودار و نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم هر تابع درجه‌ی دوم را تصور کنید؟ جواب خود را توجیه کنید.

۱۱ــ بدون استفاده از قلم و کاغذ نقاط ماکزیمم یا می‌نیمم توابع زیر را پیدا کنید :

الف) $f(x) = 4x^2 - 3x$ ؛

ب) $g(x) = x^2 - 2x + 1$

۱۲ــ آیا تابع درجه‌ی دومی وجود دارند که هم ماکزیمم و هم می‌نیمم داشته باشند؟ توضیح دهید.

فعالیت ۴ــ۷

۴ــ۴ــ بازاریابی

بخش تحقیقات و بازاریابی یک شرکت، پس از تحقیق و بررسی وضعیت بازار در مورد یک کالای جدید که توسط شرکت تولید می‌شود، معادله‌ی تقاضا را با توجه به این‌که بر اثر افزایش قیمت، تقاضا کم می‌شود، مدل‌سازی ریاضی کرده به مدیریت ارائه می‌کند :

(۱) معادله‌ی تقاضا : $x = 6000 - 30p$

که در آن x تعداد واحد کالایی است که مصرف کنندگان در یک ماه خرید می‌کنند و p[1] (برحسب تومان) قیمت هر واحد کالا است. همچنین بخش مالی شرکت، هزینه‌ی تمام شده‌ی تولید کالای جدید را با معادله‌ی زیر به مدیریت شرکت ارائه کرده است.

(۲) معادله‌ی هزینه[2] : $C = 72000 + 60x$

۱ــ Price   ۲ــ Cost

که در آن ۷۲۰۰۰ تومان **هزینه‌ی ثابت تولید** مربوط به دستگاه‌ها، استهلاک و هزینه‌های مشابه است و ۶۰ تومان **هزینه‌ی متغیر تولید** هر واحد کالا مربوط به دستمزد کارگر، مواد اولیه، انبارداری و حمل و نقل است. با توجّه به قیمت کالا، یعنی p و تعداد واحد کالای تولید شده، x ، معادله‌ی درآمد از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

(قیمت هر واحد کالا) × (تعداد واحد کالا) = درآمد

$R = x \times p$ [1] : معادله‌ی درآمد (۳)

رابطه‌ی (۲)، هزینه‌ی C را به عنوان تابعی از x بیان می‌کند و رابطه‌ی (۱)، تقاضای x را بعنوان تابعی از p مشخص می‌نماید.

مدیر شرکت درصدد پیدا کردن مقدار تولیدی بود که بیشترین سود را عاید شرکت نماید. به‌همین منظور، بخش تحقیقات مشغول مطالعه گردید تا راهی پیدا کند که شرکت به سود ماکزیمم برسد. اولین حدس آن‌ها این بود که سود ماکزیمم وقتی عاید می‌شود که درآمد شرکت ماکزیمم گردد. اکنون به بررسی این حدس می‌پردازیم و سطح تولیدی را می‌یابیم که درآمد را ماکزیمم کند.

۴ــ۴ــ۱ــ ماکزیمم کردن درآمد: برای اینکار لازم است تابع درآمد را برحسب x بسازیم. معادله (۱) را بصورت

$$۳۰p = ۶۰۰۰ - x$$

می‌نویسیم و p را برحسب x محاسبه می‌کنیم :

$$p = \frac{۶۰۰۰ - x}{۳۰}$$

یا

$$p = ۲۰۰ - \frac{۱}{۳۰}x$$

p را در (۳) جایگزین می‌کنیم :

$$R(x) = x(۲۰۰ - \frac{۱}{۳۰}x)$$

۱ــ Revenew

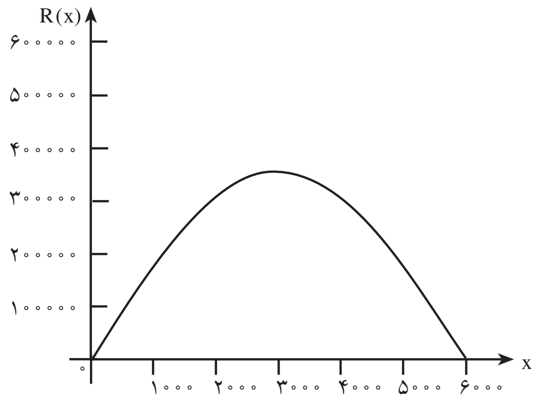
بنابراین مدل ریاضی به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد :

$$R(x) = ۲۰۰x - \frac{۱}{۳۰}x^۲$$ پیدا کردن ماکزیمم تابع

با قرار دادن $R(x) = ۰$ محل تلاقی نمودار تابع $R(x)$ را با محور x ها محاسبه می‌کنیم که مقادیر زیر به‌دست می‌آید

$$x = ۰ \quad , \quad x = ۶۰۰۰$$

نمودار تابع درجه‌ی دوم $R(x)$ به‌صورت زیر است :



شکل ۸ــ نمودار تابع R(X)

از طرف دیگر طول نقطه رأس سهمی برابر است با :

$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲۰۰}{۲ \times (\frac{-۱}{۳۰})} = ۳۰۰۰$$: طول رأس سهمی

طول این نقطه از روی نمودار نیز محاسبه می‌شود. نمودار محور x ها را در دو نقطه $O = (۰ \ , \ ۰)$ و $A = (۶۰۰۰ \ , \ ۰)$ قطع می‌کند. طول رأس سهمی وسط این دو نقطه است. بنابراین :

$$x = \frac{۰ + ۶۰۰۰}{۲} = ۳۰۰۰$$

و ماکزیمم درآمد برحسب تومان برابر است با

$$R(۳۰۰۰) = ۲۰۰(۳۰۰۰) - \frac{۱}{۳۰}(۳۰۰۰)^{۲}$$
$$= ۶۰۰۰۰۰ - ۳۰۰۰۰۰$$
$$= ۳۰۰۰۰۰$$

بیشترین درآمد برحسب تومان $\qquad R(۳۰۰۰) = ۳۰۰۰۰۰$

امّا آیا این مقدار درآمد، سود را ماکزیمم خواهد کرد؟ به بررسی این سؤال می‌پردازیم.

۴ــ۴ــ۲ــ ماکزیمم کردن سود: با توجه به هدف شرکت ماکزیمم کردن تابع سود

هزینه ــ درآمد = سود

[1] $P(x) = R(x) - C(x)$

مورد نظر است. برای این کار، با استفاده از رابطه‌ی (۲) می‌توان نوشت :

$$P(x) = (۲۰۰x - \frac{x^{۲}}{۳۰}) - (۷۲۰۰۰ + ۶۰x)$$

$$= \frac{-x^{۲}}{۳۰} + ۱۴۰x - ۷۲۰۰۰$$

که تابعی درجه دوم است. در نتیجه، با توجه به علامت ضریب $x^{۲}$، تابع دارای ماکزیممی است که همواره در رأس سهمی اتفاق می‌افتد بنابراین :

$$\text{طول رأس سهمی} : \; x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-(۱۴۰)}{۲(-\frac{۱}{۳۰})} = \frac{۷۰}{\frac{۱}{۳۰}}$$

$$\boxed{x = ۲۱۰۰}$$

$$P \text{ ماکزیمم } \; P(۲۱۰۰) = \frac{-(۲۱۰۰)^{۲}}{۳۰} + ۱۴۰(۲۱۰۰) - ۷۲۰۰۰$$

$$= \frac{-۴۴۱۰۰۰۰}{۳۰} + ۲۹۴۰۰۰ - ۷۲۰۰۰$$
$$= -۱۴۷۰۰۰ + ۲۲۲۰۰۰ = ۷۵۰۰۰$$

۱ــ Profit

بیشترین سود برحسب تومان	ماکزیمم $P(x) = ۷۵۰۰۰$

هم‌چنین، شرکت باید قیمت فروش هر واحد کالا را به گونه‌ای تعیین کند تا سود ماکزیمم گردد. با استفاده از معادله‌ی (۴) می‌توان قیمت هر واحد کالا را به‌دست آورد :

$$P(۲۱۰۰) = ۲۰۰ - \frac{۱}{۳۰}(۲۱۰۰)$$

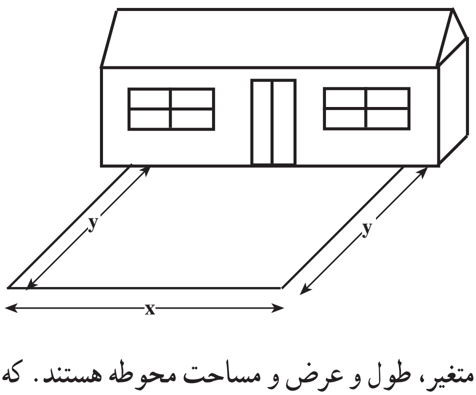
$$= ۲۰۰ - ۷۰ =$$

قیمت هر واحد کالا برحسب تومان $=۱۳۰$

تمرین: در حالت اول که درآمد ماکزیمم بود، سود را محاسبه کنید وآن را با سود ماکزیمم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

فعالیت ۴ــ۸

جنگلبانی می‌خواهد محوطه‌ی مستطیل شکلی جلوی محل سکونت خود بسازد. برای این منظور، مقدار ۱۰۰ مترمربع سیم توری به ارتفاع یک متر برای حصارکشی سه طرف محوطه در اختیار دارد. طول و عرض محوطه‌ی مستطیل شکل را چگونه انتخاب کند تا مساحت محصور شده ماکزیمم شود؟ برای حل این مسأله، می‌توان از شکل فرضی زیر کمک گرفت :



شکل ۹ــ مسأله جنگلبان

کمیّت‌های متغیر، طول و عرض و مساحت محوطه هستند. که آن‌ها را به ترتیب x ، y و A نامگذاری می‌کنیم. سپس رابطه‌ی بین متغیرها را بررسی می‌کنیم. چون جنگلبان فقط ۱۰۰ مترمربع سیم توری دارد، پس محیط محوطه مورد نظر او ۱۰۰ متر است :

$y + x + y = ۱۰۰ =$ **محیط محوطه**

یا

(۱) $\qquad ۱۰۰ = x + ۲y$

رابطه‌ی دیگری که بین متغیرها وجود دارد مربوط به مساحت محوطه است. چون محوطه مستطیل شکل است پس :

(۲) $\qquad A = x.y$

از رابطه‌ی (۱)، x را بر حسب متغیر y به‌دست آورده و در رابطه‌ی (۲) جایگزین می‌کنیم

$x = ۱۰۰ - ۲y$

و اگر رابطه‌ی اخیر را در (۲) جایگزین کنیم داریم

$A = (۱۰۰ - ۲y)y$

$= ۱۰۰y - ۲y^۲$

بنابراین

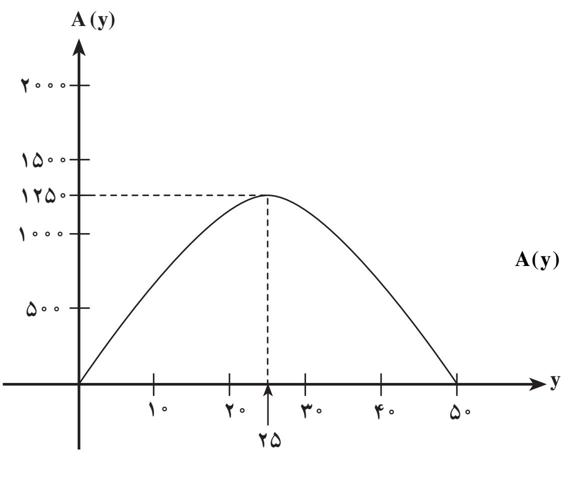
$A(y) = ۱۰۰y - ۲y^۲$

چون هدف پیدا کردن طول و عرض محوطه به طریقی است که مساحت ماکزیمم شود، در نتیجه باید ماکزیمم تابع

$A(y) = ۱۰۰y - ۲y^۲$

را به‌دست آورد.

تابع $A(y)$ در $y = ۵۰$ و $y = ۰$ مساوی صفر می‌شود (این مقادیر را خودتان به‌دست آورید)



شکل ۱۰ــ نمودار تابع $A(y) = ۱۰۰y - ۲y^۲$

رأس سهمی نقطه‌ی ماکزیمم تابع است. چون

$$\text{طول رأس سهمی} : y = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱۰۰}{۲(-۲)} = ۲۵$$

پس مقدار ماکزیمم تابع برابر است با :

$$A(۲۵) = ۱۰۰(۲۵) - ۲(۲۵)^۲$$
$$= ۲۵۰۰ - ۱۲۵۰$$
$$= ۱۲۵۰ \ \text{مترمربع}$$

مسائل

۱ــ هرگاه در یک جریب زمین ($۴۰۴۷m^۲$) ، ۲۰، درخت گردو با فاصله‌ی مساوی از هم کاشته شوند، پس از رشد کافی در یک سال از هر درخت ۶۰ کیلوگرم گردو برداشت خواهد شد. برای هر درخت اضافی که کاشته شود، ۲ کیلوگرم از میانگین سالانه محصول درختان کم می‌گردد. برای به‌دست آوردن بیشترین محصول گردو در هر جریب چند درخت اضافه باید کاشته شود؟ در این صورت چه‌قدر محصول گردو برداشت می‌شود؟

۲ــ یک شرکت x واحد کالا در هفته تولید کرده و به فروش می‌رساند. تابع هزینه و تابع تقاضای هفتگی با معادلات زیر داده شده است :

$$\text{تابع هزینه} : C(x) = ۵۰۰۰ + ۲x$$
$$\text{تابع تقاضا} : x = ۱۰۰۰ - ۱۰P$$

الف) چند واحد کالا تولید کند و با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین درآمد به‌دست آید؟

ب) چند واحد کالا تولید کند و با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین سود به‌دست آید؟

پ) آیا بیشترین سود زمانی رُخ می‌دهد که درآمد هم ماکزیمم گردد؟

۳ــ **یک ویژگی از اعداد حقیقی:** بعضی از اعداد کوچک‌تر از مربع خودشان هستند مثلاً ۲ کوچک‌تر از $۴ = ۲^۲$ است و بعضی از اعداد بزرگ‌تر از مربع خودشان هستند مانند $\frac{۱}{۹}$ ، $\frac{۱}{۳}$ و اعداد صفر و یک برابر مربع خودشان می‌باشند. ولی هر عدد حقیقی بین صفر و یک همواره از مربع خودش کوچک‌تر است. عددی بین ۰ و ۱ بیابید که اختلافش با مربع آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۴ــ **جعبه‌ی درباز:** یک کارخانه ساخت وسایل بسته‌بندی می‌خواهد جعبه‌های درباز بسازد. ورقه‌هایی که در اختیار کارخانه است ۱۸×۱۸ می‌باشد. می‌خواهیم ابعاد جعبه‌ها را طوری تعیین

کنیم که بیشترین حجم را داشته باشند. برای این کار چند برگ کاغذ شطرنجی ۱۸×۱۸ تهیه کنید و هر بار یک مربع به ضلع ۱، ۲ و ... واحد از چهار گوشه‌ی کاغذ بردارید و کناره‌ها را تا کنید سپس حجم را با شمارش تعداد مکعب‌هایی که در آن جا می‌گیرد و یا با روش محاسبه‌ی حجم مکعب، محاسبه کنید و در جدول زیر بنویسید.

الف) حجم ماکزیمم چه‌قدر است؟ ابعاد مربوط به حجم ماکزیمم چه‌قدر است؟

جدول (۷)

ضلع مربع بریده‌شده	۱	۲	۳
حجم			

ب) اگر طول ضلع مربع بریده شده را x بگیریم اندازه‌ی ابعاد جعبه چه‌قدر است؟

پ) حجم را برحسب x بیان کنید. تابع از درجه‌ی چند است؟

ت) نقاط جدول را روی یک دستگاه مختصات رسم کرده و آن‌ها را با منحنی هموراى به هم وصل کنید.