

بخش اول

فصل ششم

ترکیب دو تابع

هدف کلی

آموزش مفهوم ترکیب دو یا چند تابع و کاربردهای آن در حل مسائل

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فرآگیر پس از پایان این فصل بتواند:

- ۱- ضابطه‌ی fog و gof را با داشتن ضابطه‌ی f و g بنویسد.
- ۲- مقدار تابع‌های fog و gof را در بعضی از نقطه‌های دامنه‌اش تعریف کند.
- ۳- مسائل مربوط به کاربرد ترکیب تابع‌ها را حل کند.

پیش آزمون (۶)

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون

۱- اگر $f(x) = x^4 + 4$ و $g(x) = 3x - 1$ مطلوب است

محاسبه‌ی :

(الف) $f(g(1))$ و $g(f(1))$

(ب) $g(f(3))$ و $f(g(3))$

(پ) $g(f(2))$ و $f(g(4))$

۲- اگر $f(x) = 3x$ و $g(x) = \frac{1}{3}x$ ضابطه‌ی fog و fog تعیین کنید :

را بنویسید.

۳- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ تعیین کنید :

(الف) $f(g(x))$

(ب) $g(f(x))$

۴- اگر $f(x) = 1 - x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ تعیین کنید :

(الف) R_f و D_f

(ب) R_g و D_g

(پ) D_{fog} و D_{gof}

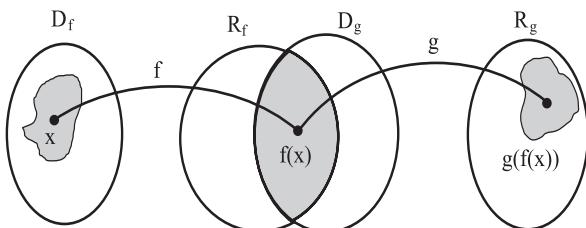
۶-۱- ترکیب دو تابع

فرض کنید f و g دو تابع حقیقی باشند به طوری که اشتراک برد تابع f ، یعنی R_f ، و دامنهٔ تابع g ، یعنی D_g ، تهی نباشد.
یعنی،

$$R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

ترکیب تابع g با f را با gof نشان می‌دهند و با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنند:

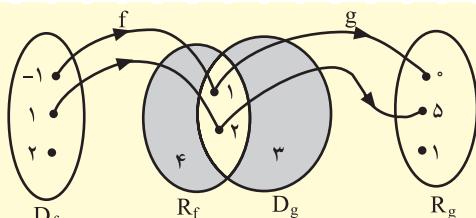
$$(gof)(x) = g(f(x))$$



شکل ۱-۹۱

شکل ۱-۹۱ نشان می‌دهد که تابع gof فقط به ازای x ‌های قابل تعریف است که $f(x)$ به دامنهٔ تابع g تعلق داشته باشد.

۱-۶-۱- مثال‌های حل شده



شکل ۱-۹۲

۱) فرض کنید $f = \{(1, 2), (-1, 1), (2, 4)\}$ و $g = \{(1, 0), (2, 5), (3, 1)\}$ با توجه به شکل ۱-۹۲ دامنه و برد gof نوشته شده‌اند.

$$D_{gof} = \{1, -1\}, \quad R_{gof} = \{0, 5\}$$

حل ۲: با توجه به این که برای هر عدد حقیقی x

$$f(x) = x^2 + 1 > 0$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)}$$

$$= \sqrt{x^2 + 1}.$$

۲) فرض کنید $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، ضابطهٔ

gof را بنویسید.

حل ۳:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 1$$

$$= \frac{1-x}{x}.$$

۳) فرض کنید $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ ، ضابطهٔ

fog را بنویسید.

تمرین ۱۰۱

ضابطه‌ی fog و gof را تعیین کنید.

$$\cdot g(x) = \sqrt{x-1} \quad f(x) = x^2 + 1$$

ضابطه‌ی fog و gof را تعیین کنید.

$$7\text{--} \text{فرض کنید } f^n = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^n. \text{ ضابطه‌ی}$$

f^n را در هریک از حالات زیر تعیین کنید. (تمرین (الف) برای راهنمایی حل شده است).

$$1\text{--} \text{اگر } f(t), f(2), f(1) \text{ آن‌گاه } f(x) = x^2 + 2x$$

$f(\sqrt{t})$ و $f(2t+1)$ را تعیین کنید.

$$2\text{--} \text{فرض کنید } f(x) = x + 2 \text{ و } g(x) = x^2.$$

? $fog = gof$ را حساب کنید. آیا

۳- ضابطه‌ی fog و gof را در هریک از حالات زیر حساب

کنید.

$$(الف) f(x) = 2x, \quad g(x) = 1 - 3x$$

$$(ب) f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1$$

$$(پ) f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2$$

$$(ت) f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

$$(الف) f(x) = x + 1 \Rightarrow f'(x) = f(f(x))$$

$$= f(x) + 1 = x + 1 + 1 = x + 2$$

$$f''(x) = f(f'(x)) = f'(x) + 1$$

$$= (x + 2) + 1 = x + 3 \Rightarrow f^n(x) = x + n.$$

$$(ب) f(x) = 2x$$

$$(پ) f(x) = x^2.$$

۴- فرض کنید I تابع همانی با ضابطه‌ی $x = I(x)$ باشد.

اگر f تابع دلخواهی باشد $I \circ f$ و $f \circ I$ چه تابعی هستند؟

$$5\text{--} \text{فرض کنید } f(x) = 2x + 1 \text{ و } g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

۱۶-۱- بازی و ریاضی

(۱) تابع f بر مجموعه‌ی عددهای حسابی، یعنی

$W = N \cup \{0\}$ ، به صورت زیر تعریف شده است :

$$f(n) = (n^2), \quad (n \in W)$$

مقدارهای $f(n) = (f \circ f)(n) = (fof)(n)$ را بدست آورید (برای

دلخواه).

برای کمک به شما مقدار f^2 برای چند عدد در رویه روش حساب شده است. دیده می‌شود که مقدارهای $(x)^2$ متعلق به مجموعه‌ی زیر است :

$$A = \{0, 1, 5, 6\}.$$

آیا هر عدد دلخواه n متعلق به W اختیار شود

(چرا؟) $(fof)(n) \in A$

$$345 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow f^2(345) = 5$$

$$297 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 1$$

$$340 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0$$

$$228 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 6$$

$$16 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 6$$

$$12 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 6$$

$$23 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 1$$

$$71 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$54 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 6$$

$$9 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$252 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 36 \Rightarrow f^3(252) = 36$$

$$100 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0$$

$$45 \xrightarrow{f} 25 \xrightarrow{f} 25 \xrightarrow{f} 25$$

$$17 \xrightarrow{f} 49 \xrightarrow{f} 81 \xrightarrow{f} 1$$

$$93 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 81 \xrightarrow{f} 1$$

$$146 \xrightarrow{f} 36 \xrightarrow{f} 36 \xrightarrow{f} 36$$

$$21 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$74 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 36 \xrightarrow{f} 36$$

$$98 \xrightarrow{f} 64 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 36$$

$$109 \xrightarrow{f} 81 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

۲) تابع f بر مجموعه‌ی عددهای حسابی به صورت زیر

تعریف شده است :

$$f(n) = (n)^3, \quad (n \in W)$$

آیا به ازای هر عدد n از W به $f^3(n) = (f \circ f \circ f)(n)$

مجموعه‌ی زیر تعلق دارد؟ چرا؟

$$B = \{0, 1, 25, 36\}$$

در مقابل $(n)^3$ برای چند n حساب شده است.

۳) فرض کنید $n = 284576$ ؛ در رابطه با این عدد سه

عدد دیگر می‌توان نوشت :

$$(تعداد رکم‌های عدد n) = 6$$

$$(تعداد رکم‌های زوج n) = 4$$

$$(تعداد رکم‌های فرد n) = 2$$

اینک تابع f را بر مجموعه‌ی عددهای طبیعی چنین تعریف

می‌کیم :

$$f(n) = \overline{RZF}$$

(یعنی $f(n)$ عدد حاصل از کنار هم گذاشتن سه

عدد Z ، R و F است).

بنابراین، $f(284576) = 642, f^3(284576) = 642, f^3, f^3, \dots$ را حساب

کنید تا وقتی که به عدد ثابتی برسید. این عدد ثابت چیست؟

حالا به مثال‌های رو به رو توجه کنید.

آیا برای هر عدد طبیعی n ، اگر فرایند بالا را روی آن

انجام دهیم، درنهایت به عدد ۳۱۲ می‌رسیم؟ [۱۱]

امتحان کنید!

$$284576 \xrightarrow{f} 642 \xrightarrow{f} 330 \xrightarrow{f} 312 \xrightarrow{f} 312$$

$$249 \xrightarrow{f} 321 \xrightarrow{f} 312$$

$$201389732564 \xrightarrow{f} 1266 \xrightarrow{f} 431 \xrightarrow{f} 312$$

$$25 \xrightarrow{f} 211 \xrightarrow{f} 312$$

$$9 \xrightarrow{f} 101 \xrightarrow{f} 312$$

$$88 \xrightarrow{f} 220 \xrightarrow{f} 330 \xrightarrow{f} 312$$

$$2 \xrightarrow{f} 110 \xrightarrow{f} 312$$

آزمون پایانی (۶)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

و $f(f(x))$ را تعیین کنید.

۲- اگر $g(x) = \sqrt{2-x}$ و $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

حساب کنید :

الف) $g(f(1))$ و $f(g(2))$

ب) $g(f(x))$ و $f(g(x))$

پ) آیا برای هر x , $g(f(x)) = f(g(x))$ است؟

۳- فرض کنید $x \neq 1$ و $f(x) = x^2 + 5x$

الف) D_g و R_f را تعیین کنید.

ب) D_{fog} را حساب کنید.

پ) $(fog)(x)$ را بنویسید.

۴- اگر $g(x) = \sin x$ و $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ کدامیک از

مقدارهای $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ را می‌توان تعیین کرد؟ چرا؟

۵- فرض کنید :

$f(x) = \frac{1}{x}$ و $(x \neq 0)$

اگر n عددی طبیعی باشد $f^n(x)$ را تعیین کنید.

تمرین‌های تکمیلی بخش اول

- ۸- کدام مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟
 الف) $\{(2,5), (3,-1), (4,6), (-2,2)\}$
 ب) $\{(-1,3), (2,4), (3,2), (-2,7), (2,6)\}$

۹- کدام، ضابطه‌ی یک تابع است؟

الف) $y + x^2 - 4 = 0$

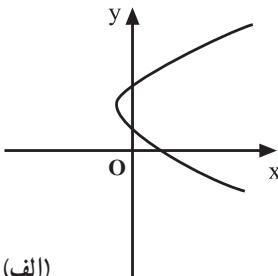
ب) $y^2 + x - 4 = 0$

پ) $|y| = x + 3$

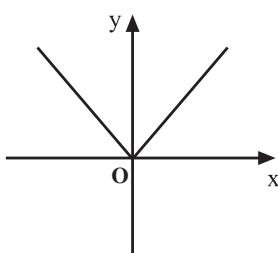
ت) $y = |x| - 2$

۱۰- کدام شکل، نمودار یک تابع را مشخص می‌کند؟

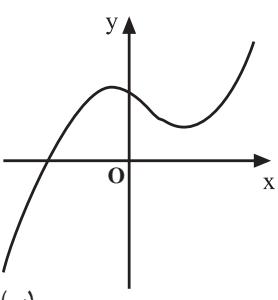
شکل ۱-۹۳.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۱-۹۳

۱- نقطه‌های نظیر $\frac{\sqrt{2}}{3}$ و $\sqrt{3}$ را روی یک محور اعداد

حقیقی مشخص کنید (روش انجام کار را شرح دهید).

۲- الف) نقطه‌های A(۳,۴) و B(۱,۲) و C(۵,۲) را

در یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید.

ب) نوع مثلث ABC را تعیین کنید.

پ) مختصات نقطه‌ی A'، وسط ضلع BC، را به دست

آورید.

ت) طول میانه‌ی AA' از این مثلث را حساب کنید.

۳- مقادارهای a و b را چنان بیابید که دو نقطه

M'(a+2, 3b) و M(b-1, 1-a) نسبت به محور x ها قرینه‌ی یکدیگر باشند. سپس مختصات این دو نقطه را حساب کنید.

۴- آیا نقطه‌ی A(2m-1, m) می‌تواند بر نقطه B(2, -3)

منطبق باشد؟ چرا؟

۵- هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آنها

را به صورت مجموعه و نماد بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز نشان دهید.

الف) $1 < -2x + 3 < 9$

ب) $\frac{x+2}{3} > \frac{1-x}{2}$

۶- اگر $A = [-3, 4]$ و $B = [2, 5]$ باشد، بازه‌های زیر

را تعیین کنید.

الف) $A \cap B$

ب) $A \cup B$

پ) $A - B$

۷- ولتاژ ورودی یک ترانسفورمر 230° ولت و ولتاژ

خروجی آن $11/5$ ولت است. ثابت این ترانسفورمر را تعیین کنید.

۱۱- تابع $y = -x^3 + 4x$ داده شده است.

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) آیا نقطه‌ی $A(2, 4)$ روی این نمودار است؟

پ) مقدار m را چنان باید که نقطه‌ی $(1, 2m)$ روی

نمودار این تابع باشد.

$$g(f(\sqrt{2}))$$

$$f(3) \times g\left(\frac{1}{3}\right)$$

را تعیین کنید.

۱۲- اگر $f(x) = ax^3 + 3x - a$ باشد، مقدار a را چنان

باید که $f(2) = 8$ باشد.

۱۳- نمودار هریک از تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱۶- اگر $f(x) = \sqrt{2x}$ و $g(x) = x^3 - 1$ باشد، ضابطه‌ی

$(gof)(x)$ را تعیین کنید.

$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad x \in [0, 2\pi]$$

۱۴- دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

$$y = -2x^3 + x \quad (\text{الف})$$

$$y = \frac{3x}{x^2 - 1} \quad (\text{ب})$$

$$y = \sin 2x \quad (\text{پ})$$

$$y = \sqrt{5x + x^3} \quad (\text{ت})$$