

فصل ۳

تابع

نگاه کلی به فصل

این فصل شامل ۴ درس است. دانش‌آموزان در این کتاب برای اولین بار با مفهوم تابع، ضابطه جبری تابع و توابع درجه دوم و رسم آنها آشنا می‌شوند.

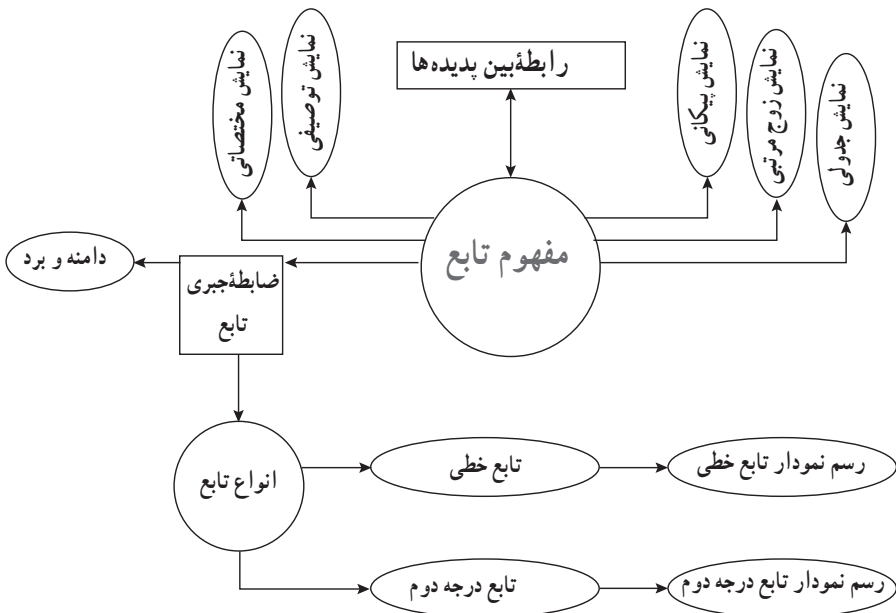
درس اول از این فصل در ابتدا به معرفی رابطه بین پدیده‌های مختلف در دنیای واقعی می‌پردازد و رابطه بین پدیده‌ها در جهان طبیعت را به عنوان ارتباط بین دو متغیر مختلف معرفی می‌کند. سپس به رابطه خطی از کتاب نهم اشاره کرده و به مفهوم تابع می‌پردازد.

درس دوم رابطه بین x به عنوان متغیر مستقل و y به عنوان متغیر وابسته را با یک قانون یا ضابطه معرفی می‌کند و در ادامه دامنه و برد معرفی شده و مورد بررسی قرار می‌گیرد.

درس سوم ضمن یادآوری رابطه خطی کتاب نهم با مشخص کردن نقاط در صفحه محورهای مختصات و قرار گرفتن نقاط در یک راستا در کنار هم به معرفی تابع خطی و رسم نمودار آن می‌پردازد.

درس چهارم با معرفی تابع درجه دوم و رسم آن به کمک جدول و نقطه‌یابی و پیدا کردن مختصات رأس سهمی، به معادله محور تقارن و مسائل کاربردی این نوع تابع اشاره دارد.

نقشه مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

تابع یکی از مهم‌ترین مفاهیم ریاضی است که در علوم دیگر نیز نقش بسزایی ایفا می‌کند. در کتاب‌های مختلف برای معرفی تابع روش‌های گوناگونی به کار گرفته می‌شود که البته همه آنها اهداف خود را دنبال می‌کنند. در هر حال مفهوم تابع منحصربه‌فرد است اما ابزار معرفی آن متفاوت است. در این کتاب مفهوم تابع با ارتباط بین پدیده‌های مختلف بررسی گردیده است.

تاریخچه تابع: تاریخچه تابع نسبتاً کوتاه است. کلانین در سال (۱۶۴۲-۱۵۶۴) اولین اشاره به وابستگی بین دو کمیت را به گالیله نسبت داد. در سال ۱۶۷۳ در نسخه خطی لایپ نیتز لغت تابع استفاده شد. او در سال ۱۷۱۴ این لغت را برای کمیت‌های وابسته به یک متغیر استفاده کرد. نماد $f(x)$ توسط اوایلر (Euler) در سال ۱۷۳۴ معرفی شد.

در سال ۱۹۳۰، N. Luzin ریاضی‌دان مشهور روسی دربارهٔ تابع نوشت:

مفهوم تابع یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضیات مدرن است. این مفهوم به یکباره به وجود نیامده است بلکه از دو قرن پیش ابتدا از دل یک مباحثه روی یک سری پیام ارتعاشی به وجود آمده و به مرور دستخوش تغییرات عمیقی شده است. از آن زمان تاکنون این مفهوم عمیق‌تر شده و به‌طور پیوسته رشد کرده است. امروزه در خود علم ریاضی نیز تابع و مفهوم آن زیربنای شکل‌گیری بسیاری از مفاهیم و موضوعات اساسی ریاضی همچون حد، پیوستگی، مشتق، انتگرال و غیره است.

منابع دانستنی‌هایی برای معلم

۱ سایت واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف بخش مقالات علمی، پژوهشی و منابع پشتیبان کتاب‌های جدیدالتألیف

۲ M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford university press, 1972

۳ N. Luzin, function, Mathematical Evolutions, 2002

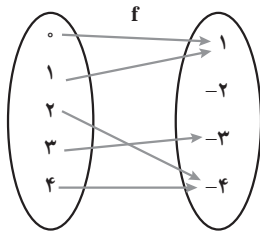
نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ برای هریک از روابط زیر نموداری رسم کنید. کدام یک تابع است؟

الف) $f = \{(1,0), (0,1), (2,0)\}$ پ) $h = \{(x,y) \mid 5y-3=0\}$

ب) $g = \{(x,y) \mid 3x-1=0\}$ ت) $k = \{(x,y) \mid |y|=2\}$

۲ مقادیر x و y را چنان بیابید که دو زوج مرتب $(3, x-y)$ و $(1, x)$ با هم مساوی باشند.



۳ تابع f به صورت نمودار پیکانی رسم شده است.

الف) تابع را به صورت مجموعه زوج مرتب نمایش دهید.

ب) دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

پ) نمودار مختصاتی تابع را رسم کنید.

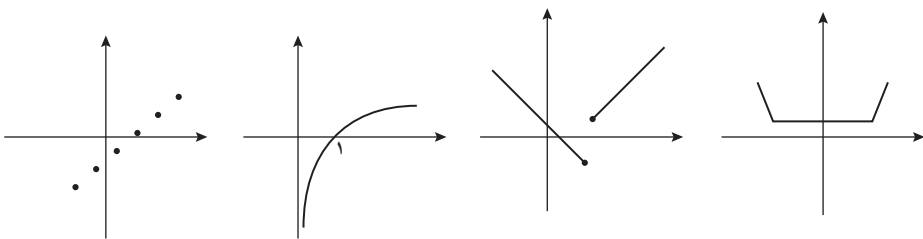
۴ تابع $f = \{(x,y) \mid y=2x-1, x \in \mathbb{N}, x < 4\}$ مفروض است.

الف) دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

ب) نمودار تابع را رسم کنید.

۵ تابع $f = \{(x,y) \mid x^2 + (y-1)^2 = 0\}$ را به صورت زوج مرتب نمایش داده و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.

۶ کدام یک از نمودارهای زیر، تابع است؟



۷ تابع $f = \{(x,y) \mid y=2x-1, 0 \leq x \leq 5\}$ مفروض است.

الف) قانون تابع را به صورت توصیفی بنویسید.

ب) نمودار تابع را رسم کنید و به کمک نمودار، دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

۸ اگر داشته باشیم: $f(1)=2, f(2)=4, f(3)=6, \dots$ قانون تابع f را به صورت توصیفی بیان کنید.

۹ مختصات چند نقطه از تابع $f = \{(x,y) \mid y=3\}$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

۱۰ کدام یک از روابط زیر تابع است؟

(الف) رابطه بین هر انسان با اثر انگشت او

(ب) رابطه بین هر شخص با شماره تلفن همراه او

(پ) رابطه بین درجه حرارت ها در فصول مختلف و نوع پوشش افراد

(ت) رابطه ساختمان مولکولی DNA با انسان ها

۱۱ نمودار توابع درجه دوم زیر را رسم کنید. در هر یک مختصات رأس، معادله محور تقارن و مقادیر

ماکزیمم و مینیمم سهمی را مشخص کنید.

(الف) $y = (x+1)^2 + 3$

(ب) $y = -3x^2 + 4x - 1$

(پ) $y = x^2 + 2x + 1$

(ت) $y = -x^2 + 2x - 1$

۱۲ جدول زیر نرخ سود سپرده یک ساله بانک ها در ده سال کشورمان را نشان می دهد.

ت بر حسب سال	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳
نرخ سود بر حسب درصد	۱۳	۱۴	۱۷	۱۶	۱۲	۱۴	۱۷	۱۷	۲۳/۵	۲۲

(الف) متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنید.

(ب) آیا داده های جدول یک تابع را مشخص می کند؟ چرا؟

۱۳ شمعی به طول ۱۰ سانتی متر را روشن کرده ایم. اگر این شمع در هر دقیقه ۵/۰ سانتی متر کوتاه تر

شود، (الف) رابطه بین زمان (بر حسب دقیقه) و طول شمع (بر حسب سانتی متر) را به صورت ریاضی بنویسید.

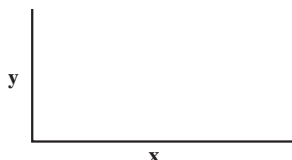
(ب) متغیر مستقل و وابسته را مشخص کنید. (ج) چه زمانی طول شمع به صفر می رسد؟

۱۴ زمینی به شکل مستطیل داریم که مطابق شکل سه طرف آن را با نرده ای به طول ۱۲۰ متر محصور

کرده ایم.

(الف) مساحت زمین را بر حسب طول زمین (x) بنویسید.

(ب) مختصات نقطه ماکزیمم تابع مساحت را به دست آورید.



۱۵ تابع سود یک کارخانه ساخت ماشین آلات کشاورزی به صورت زیر است :

$$p(x) = -1000 + 500x - 2x^2 \text{ که در آن } a \text{ تعداد کالای روزانه است.}$$

ماکزیم سود روزانه این کارخانه را تعیین کنید.

۱۶ فرض کنید تابع هزینه تولید x کالا $C(x) = 20x - 1000$ و قیمت فروش یک کالا $10 - x$ باشد،

الف) تابع سود را بیابید.

ب) ماکزیم سود را ترسیم کنید.

* ۱۷ ثابت کنید مختصات رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ است.

ابزار فناوریانه

معلمین عزیز می توانند از نرم افزار Cacogebra برای آموزش رسم نمودارهای تابع خطی و تابع درجه

دوم بهره گیرند.

معرفی منابع

۱ www.study.com/academy/Lesson

۲ www.shsu.edu/kws006/precalculus

۳ www.wmueller.com/precalculus/function

۴ [www.cut-the-knot.org/Do-you-know/function ex.](http://www.cut-the-knot.org/Do-you-know/function-ex)

۵ تابع، احمد قندهاری، حمیدرضا امیری/ انتشارات مدرسه

مفهوم تابع

اهداف درس اول

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند :

- ۱ درک مفهوم رابطه بین دو کمیت
- ۲ آشنایی با متغیرهای مستقل و وابسته و درک رابطه بین آنها
- ۳ آشنایی با تعریف زوج مرتب
- ۴ درک مفهوم تابع
- ۵ آشنایی با نمایش‌های مختلف تابع (توصیفی، جدولی، ...)

ابزار مورد نیاز

- ۱ صفحه شطرنجی
- ۲ خط‌کش

روش تدریس درس اول

درس اول با یادآوری رابطه خطی شروع شده و ضمن آن با آوردن چند مثال به متغیر مستقل و وابسته اشاره می‌گردد.

اولین فعالیت این درس صفحه ۵۶ جهت آشنا کردن دانش‌آموزان با مفهوم ارتباط بین دو کمیت و همچنین مفهوم متغیر مستقل و وابسته آورده شده است. هدف دیگر آشنایی دانش‌آموزان با رابطه غیرخطی است که به شکل جدولی این رابطه نیز توجه شده است. در این فعالیت رابطه بین متغیرهای مساحت و شعاع و نیز محیط و شعاع که برای دانش‌آموزان رابطه‌های آشنا و ملموس هستند، بررسی شده است.

در ادامه با معرفی زوج مرتب به فعالیت دوم می‌پردازد که هدف آن آشنایی دانش‌آموزان با شکل زوج مرتبی متغیرهای x, y و درک ارتباط بین آنها است.

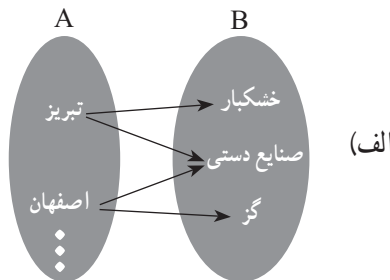
در این فعالیت دانش‌آموزان به صورتی غیرمستقیم و بدون اشاره به مفهوم و تعریف تابع با قرار دادن x در معادله داده شده مقدار تابع را که همان y باشد به دست می‌آورند.

اولین کار در کلاس در صفحه ۵۷ کتاب با تمرین جای‌گذاری مقادیر x در رابطه خطی و تکمیل جدول، نمودار پیکانی مطرح شده و در ادامه، نمایش مختصاتی این رابطه‌ها مورد توجه قرار می‌گیرد.

فعالیت صفحه ۵۹ با توجه به مفهوم تابع هدف‌گذاری شده است. هدف این فعالیت تشخیص توابع از بین رابطه‌های داده شده با نمایش‌های مختلف است.

دانش‌آموز در نمایش پیکانی باید توجه داشته باشد که اگر از عضوی در مجموعه اول بیش از یک پیکان خارج شود با تعریف تابع در تناقض است و همچنین اگر در نمایش زوج مرتبی در یک مجموعه دو زوج مرتب پیدا کند که مؤلفه‌های اول آنها برابر و مؤلفه‌های دوم نابرابر باشند باز هم با تعریف تابع تناقض ایجاد شده است و در نهایت در نمودار مختصاتی یک رابطه اگر دو نقطه با طول‌های مساوی و عرض‌های نابرابر پیدا کند همین تناقض ایجاد شده و آن نمودار مربوط به یک تابع نمی‌باشد.

در قسمت ۴ این فعالیت، دانش‌آموز باید با توصیف داده شده و به کمک تعریف تابع، تابع بودن یا نبودن هر رابطه را تشخیص دهد. در این قسمت می‌تواند در مواردی با رسم نمودار پیکانی این موضوع را به درستی تشخیص دهد:



(ب) واضح است که هر نفر دقیقاً یک تاریخ تولد دارد.

(پ) شهرهایی مانند تهران یا اصفهان بیش از یک نماینده در مجلس شورای اسلامی دارند.

(ت) در این توصیف مشخص است که قبله همه مسلمانان، کعبه است و از هر مسلمان فقط یک پیکان خارج شده که البته می‌دانیم این تابع نوعی تابع ثابت است.

و برای تثبیت مطلب بلافاصله کار در کلاس صفحه ۶۱ با همان هدف فعالیت قبلی مطرح گردیده است. همچنین نمایش‌های مختلف یک تابع کنار هم و مقایسه آنها و تبدیل نمایش‌ها به یکدیگر از اهداف دیگر این کار در کلاس بوده و به درک بیشتر دانش‌آموزان کمک شایانی می‌کند.

توصیه‌های آموزشی

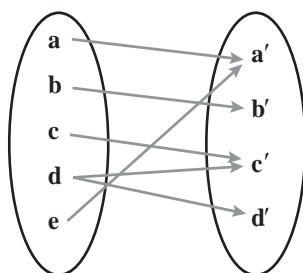
- ۱ در ورود به مطلب باید به روابط بین پدیده‌های مختلف اشاره کرد و مفهوم تابع به کمک آن بیان شود و به هیچ عنوان تعریف تابع با استفاده از مفهوم حاصل ضرب دکارتی مطرح نگردد.
- ۲ تعریف زوج مرتب به صورت دوتایی (x, y) که رابطه ترتیب روی آنها تعریف شده باشد، بیان شود.
- ۳ با توجه به مفهوم تابع در نمودار پیکانی توجه داشته باشید که از مجموعه اول حتماً باید پیکان خارج شود و تنها یک پیکان خارج شود.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

- ۱ معمولاً دانش‌آموزان زوج مرتب (a, b) و (b, a) را مساوی فرض می‌کنند بهتر است با رسم نمودار چند نقطه در صفحه مختصات این کج‌فهمی مورد توجه قرار گیرد و یادآوری شود که تنها وقتی $a=b$ باشد این دو با هم مساوی‌اند.
- ۲ به مرتب بودن (x, y) توجه نمی‌کنند و اکثراً مؤلفه اول از راست را x فرض می‌کنند.

حل تمرین‌های درس اول

- ۱ نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟



حل: حذف d از مجموعه سمت چپ یا حذف d' از مجموعه سمت راست

۲ اگر A مجموعه‌ای سه عضوی و B مجموعه‌ای ۲ عضوی فرض شود، سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف کنید.

حل : $A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2\}$

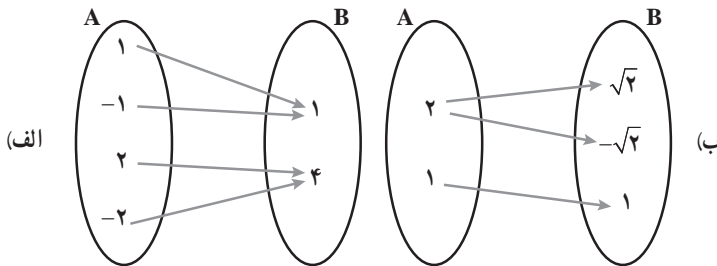
$$f = \{(a, b)(b, 1)(c, 1)\} \quad h = \{(a, 2)(b, 1)(c, 2)\} \quad g = \{(a, 1)(b, 2)(c, 1)\}$$

۳ در رابطه زیر، جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\} \Rightarrow f = \{(2, 3)(2, 5)(3, 1)(4, 2)\}$$

توجه دارید که تمرین‌های ۲ و ۳ باز پاسخ بوده و دانش‌آموزان جواب‌های درست و مختلفی می‌توانند برای این تمرین‌ها بیابند.

۴ کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



(الف) تابع هست

(ب) تابع نیست زیرا از ۲، دو پیکان خارج شده است.

(پ) تابع نیست زیرا مؤلفه اول ۲ برابر تکرار شده است. $f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$

(ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می‌دهد.

(ث) تابع هست زیرا هر شخصی دقیقاً یک کد ملی دارد.

۵ اگر رابطه f تابع باشد، در این صورت حاصل $x^2 + y^2$ را به دست آورید. (مجموعه f را پس از محاسبه x و y بنویسید.)

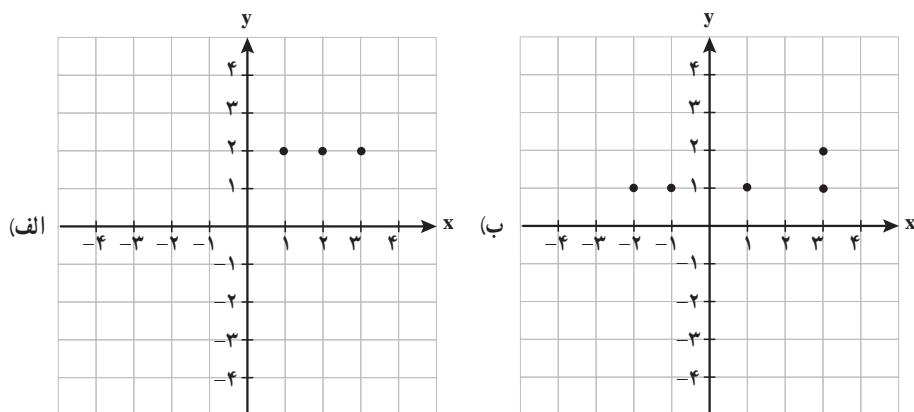
حل :

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 1$$

$$f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$$

$$f = \{(2, 4)(5, 2)(3, 4)\}$$

۶ نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می‌کند؟



نمودار الف تابع هست.

حل: نمودار ب تابع نیست،

خواندنی

توابع در شاخه‌های علوم مختلف کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم‌گیری‌های اقتصادی استفاده می‌شود و یا در فیزیک، هنگامی که می‌خواهیم رابطه بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً هنگامی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیرهای دیگر است، از توابع استفاده می‌شود.

توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملکرد در نظر گرفته می‌شوند و کاری را بر روی ورودی‌های خود انجام می‌دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل‌سازی ساختمان داده‌ها و تأثیرات الگوریتم می‌بینیم.