فصل ۳

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

نگاه کلی به فصل

هدف‌های این فصل را می‌توان به اختصار چنین بیان کرد :

- همان‌گونه که توان اعداد را در آغاز برای توان‌های طبیعی عددهای ۲ و ۳ تعریف می‌کنیم و سپس این مفهوم را برای توان n ام تعمیم می‌دهیم؛ ریشهٔ عددها در سال سوم برای عددهای ۲ و ۳ تعریف شده است و لذا آن را به سایر عددهای طبیعی، ریشهٔ چهارم، ریشهٔ پنجم، ... و به‌طورکلی ریشهٔ nام باید تعمیم داد. یادآوری می‌شود که فرایند تعمیم یکی ازروش‌های اساسی توسعه و تکامل ریاضیات در همهٔ شاخه‌های آن است.

- در این فصل، مفهوم توان رابه توان‌های کسری نیز گسترش می‌دهیم. البته هدف نهایی تعریف توان حقیقی اعداد است، لکن به دلایل فنی در سطح فعلی به توان‌های حقیقی نپرداخته‌ایم. مفهوم توان حقیقی پیش‌نیاز تعریف تابع نهایی است.

توابع نهایی نیز در بررسی پدیده‌هایی که مشمول رشد و زوال هستند به‌طور طبیعی وارد بحث می‌شوند. پدیده‌های طبیعی غالباً دچار تغییرات‌اند و این تغییرات یا در قالب رشد صورت می‌پذیرد، یا از الگوی زوال پیروی می‌کند. وقتی یک جامعه باکتری در محیطی مناسب قرار گیرد، به شدّت رشد می کند، همچنین اگر مقداری مواد رادیواکتیو را در نظر بگیریم، این مقدار ثابت نمی‌ماند و دستخوش زوال شده وبه مواد سبک‌تر تجزیه می‌گردد.

گرچه توان حقیقی برای اعداد گنگ به دلایل آموزشی گفته نمی‌شود، لکن باید در نظر داشت که در عمل وقتی با یک عدد گنگ سر و کار داریم، آن را با یک تقریب مناسب گویا کرده و با عدد تقریب‌شده گویا کار می‌کنیم؛ لذا اگر پرسش شود که مثلاً $۳^{\sqrt{۲}}$ چه عددی است، هرگاه $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ در نظر بگیریم، این توان به‌آسانی به توان گویا تبدیل می‌شود :

$$۳^{\sqrt{۲}} = ۳^{۱/۴} = ۳^{\frac{۱۴}{۱۰}} = ۳^{\frac{۷}{۵}} = \sqrt[۵]{۳^{۷}}$$

اعداد گنگ فقط در محاسبات ریاضیات محض مطرح‌اند، هر عدد گنگ، تا هررقم اعشار که بسط داده شود، در واقع با یک عدد گویا تقریب می‌گردد.

دانش‌آموزان پس از مطالعه و کار روی این فصل باید بتوانند :

- مفهوم ریشه را برای هر عدد طبیعی مانند ۴> ۵، ۶ و در نهایت مفهوم کلی آن را برای n به درستی تعریف کنند.

● رابطه ریشه و توان را به‌عنوان دوعمل معکوس، شناخته و هر رابطه ریشه‌ای را به یک رابطه توانی و رابطه توانی را به یک تساوی ریشه‌ای تبدیل کنند.

● از ماشین‌حساب برای محاسبهٔ ریشه و توان‌ها استفاده کنند.

● دریابند که عددهای مثبت دارای دو ریشهٔ قرینه برای فرجه‌های زوج بوده، لکن ریشهٔ فرد ندارند.

● توان گویا را برای هر عدد مثبت برحسب ریشه تعریف کنند.

● قواعد سادهٔ ریشه‌گیری را بیان کنند :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$$

● قواعد سادهٔ توان‌های گویا را بیان کنند.

$$a^r a^s=a^{r+s} \qquad (a^r)^s=a^{rs}$$

● با ضرب و جمع عبارت‌های جبری به‌راحتی کار کنند و اتحادها را به‌عنوان تساوی‌های بین عبارت‌های جبری، که همواره برقرارند، بشناسند.

● اتحادهای مکعب مجموع (تفاضل) را بیان کنند.

● تجزیهٔ عبارت‌های a^n+b^n و a^n-b^n را به حاصل‌ضرب دو عامل انجام دهند.

● برخی مخرج‌های گنگ عبارت‌های جبری را با ضرب در عبارت مناسب گویا کنند.

● از اتحادها برای محاسبهٔ ذهنی برخی ضرب‌های عددی استفاده کنند؛ مانند :

$$۱۱\times۱۳=(۱۲-۱)(۱۲+۱)=۱۴۳$$

$$۱۴\times۱۶=(۱۵-۱)(۱۵+۱)=۲۲۴$$

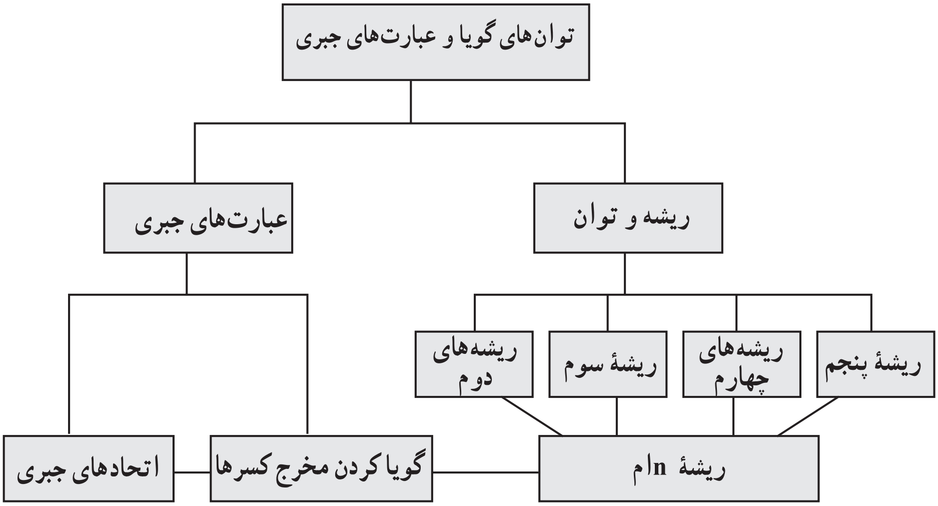
● دریابند که توان‌های عددهای بزرگ‌تر از واحد به سرعت افزایش می‌یابد.

درحالی‌که توان‌های عددهای کوچک‌تر از واحد به سرعت کاهش می‌یابد.

مثلاً به محاسبه $(۰/۹۸)^n$ و $(۱/۰۲)^n$ بپردازند.

(برای مقادیر n)؛ به زبان فنی‌تر تابع $a^x(a>۱)$ صعودی و تابع $a^x(a<۱)$ نزولی است، لکن نامی از تابع برده نشود.

نقشهٔ مفهومی


توان‌های گویا و عبارت‌های جبری
عبارت‌های جبری
ریشه و توان
ریشه‌های دوم
ریشهٔ سوم
ریشه‌های چهارم
ریشهٔ پنجم
اتحادهای جبری
گویا کردن مخرج کسرها
ریشهٔ nام

درس اوّل

ریشه و توان

روش تدریس

هدف فعالیت، تعمیق مفهوم ریشه و توان و مرور آن از سال نهم است. فعالیت این ایده را مطرح می‌سازد که ریشه و توان مفاهیم معکوس یکدیگرند و این فرایند با مفهوم ریشه‌گیری در سطوح بالاتر علمی هماهنگی و انطباق دارد. وقتی $-۲۷=(-۳)^۳$ یعنی ۲۷− توان سوم ۳− است، با ریشه‌گیری سوم از ۲۷− به عدد ۳− برمی گردیم.

$$\sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$$

در جدول این مفهوم به‌عنوان فعالیت شمارهٔ ۲ تمرین شده است. در جایی عدد داده شده است و ریشهٔ سوم آن را دانش‌آموزان در زیر آن عدد می‌نویسند و در جاهایی ریشهٔ سوم داده شده است و عدد را از راه توان رساندن به‌دست می‌آورند. برای محاسبهٔ ریشهٔ سوم برخی اعداد، ریشهٔ سوم تقریبی که دانش‌آموز به دست می‌آورد کفایت می کند :

$\sqrt[۳]{۲۰}\simeq ۲/۷$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۲۰}\simeq ۲/۶$

و یا $\qquad$ $\sqrt[۳]{۲۰۰۰}\simeq ۱۳$ $\qquad$ $\sqrt[۳]{۲۰۰۰}\simeq ۱/۲۵$

باید توجه داشت وقتی مقدار تقریبی یک محاسبه مورد نظر است، هم تقریب کاهشی و هم تقریب افزایشی **مورد قبول** می‌باشد؛ زیرا نوع تقریب مشخص نشده است.

○ در ادامهٔ هدف کار در کلاس، که به شکل گفتمان مطرح شده است، این واقعیت است که ما در ریاضیات، وقتی ریشهٔ دقیق یک عدد مورد نظرمان است، به ناچار باید از نماد رادیکال استفاده کنیم.

$\sqrt[۳]{۲۵}$ یعنی مقدار دقیق ریشهٔ سوم ۲۵ و آن عددی است که وقتی به توان ۳ برسد برابر ۲۵ است. اما در عمل با مقدارهای تقریبی آن کار می‌کنیم.

در ادامه ریشهٔ چهارم تعریف شده است دانش‌آموزان با تکمیل تعریف، باید به مفهوم‌سازی بپردازند : هر عدد مثبت دو ریشه چهارم دارد که قرینهٔ یکدیگرند. عددهای منفی ریشهٔ چهارم ندارند. در ادامه به‌عنوان تمرین کلاسی از دانش‌آموزان خواسته شده تا ضمن تکمیل جدول‌های

صفحهٔ ۵۱ به محاسبهٔ ریشه‌های چهارم و پنجم بپردازند.

عدد	۱۶	۶۲۵	۱۰,۰۰۰	۳۱۲۵
ریشه‌های چهارم	۲و−۲	۵و−۵	۱۰و−۱۰	$5\sqrt[4]{5}$ و $-5\sqrt[4]{5}$

عدد	−۳۲	۱۵۶۲۵	۷۱	−۲۴۳	−۱	$-۱۰^{۵}$	۱۹
ریشهٔ پنجم	−۲	۵	۲/۵	−۳	−۱	−۱۰	۱/۵

تنها عددهایی که ریشهٔ پنجم آنها با خودشان برابر است ۱، ۱− و ۰ هستند. محاسبه کنید :

$$\sqrt[۵]{-۳۲}=-۲ \qquad \sqrt[۵]{\frac{۱}{۱۰۰,۰۰۰}}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۳۲}=-۰/۲ \qquad \sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}}=\frac{۱}{۲}$$

هر عدد مثبت یا منفی یک ریشهٔ پنجم دارد. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد، ریشهٔ پنجم آن منفی است.

روش : باید دانش‌آموزان را یاری کرد که خودشان کادر را تکمیل کنند. می‌توانند با مشاورهٔ همدیگر پرسش‌ها را پاسخ دهند.

حلّ تمرین‌های برگزیدهٔ صفحهٔ ۵۱

۱

$-۶<-\sqrt{۳۵}<-۵ \qquad ۴<\sqrt{۲۰}<۵ \qquad \sqrt{۱۶}=۴$

$۲<\sqrt[۳]{۲۰}<۳ \qquad \sqrt[۳]{-۸}=-۲ \qquad ۸<\sqrt{۷۵}<۹$

$\sqrt[۴]{۱۶}=۲ \qquad ۶<\sqrt[۳]{۲۵۰}<۷ \qquad -۵<\sqrt[۳]{-۹۰}<-۴$

$۷<\sqrt[۴]{۴۰۰}<۸ \qquad -۴<-\sqrt[۴]{۱۲۰}<-۳ \qquad -۳<-\sqrt[۴]{۲۰}<-۲$

$۳<\sqrt[۵]{۴۰۰}<۴ \qquad \sqrt[۵]{-۳۲}=-۲ \qquad \sqrt[۵]{۱}=۱$

درس دوم

ریشهٔ n ام

روش تدریس

هدف، تعمیم کلی مفهوم ریشه است. در ریاضیات وقتی فرایند یا عملی را برای اعداد ...و ۴ و ۳ و ۲ تعریف می‌کنیم، معمولاً برای همهٔ اعداد طبیعی آن را گسترش می‌دهیم؛ لذا ناچاریم با متغیر n کار کنیم.

کار تدریس ضمن یک فعالیت آموزشی شروع می‌شود. ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ در جدول آمده و از دانش‌آموزان خواسته می‌شود جدول را کامل کنند.

...	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
...	$\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt{64}=8$ $-\sqrt{64}=-8$

داریم : $\sqrt[6]{64}=2$ و $-\sqrt[6]{64}=-2$

از دانش‌آموزان خواسته شود که با ذکر ریشهٔ هفتم و هشتم ۶۴، به عنوان عددهایی که وقتی به توان هفت یا هشت می‌رسند، برابر ۶۴ شوند مفهوم ریشه را تعمیم دهند. بعد به‌جای هفت و هشت با n سخن بگویند! مانند ریشه‌های دوم و چهارم متوجه باشند که اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند. و جدول بعدی را کامل کنند.

تعریف کلی مفهوم در ذیل صفحهٔ ۵۴ آمده است. در صفحهٔ ۵۵ با تکمیل جدول مفهوم‌سازی تعمیق می‌گردد. برخی موارد آن، جهت راهنمایی نوشته شده‌اند. درس ضمن کار در کلاس (تمرین‌های کلاسی) ادامه می‌یابد.

در فعالیت بعدی (صفحهٔ ۵۵) برخی قواعد ریشه ذکر شده‌اند. الهام‌بخش آن قواعدی است که برای ریشه‌های دوم و سوم از سال قبل آموخته‌اند.

ـ با ساختن مثال‌های عددی به قاعده برسند.

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

ـ هدف فعالیت بعدی (صفحهٔ ۵۷) آن است که از راه تجربی دریابند که تساوی

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

برای وقتی که n زوج است، همواره برقرار نیست

$$\sqrt[۴]{(-۲)^۴}\neq -۲$$

و رسیدن به این نکته است که

$$\sqrt[n]{a^n}=|a| \qquad (\text{n زوج})$$

$$\sqrt[n]{a^n}=a \qquad (\text{n فرد})$$

حلّ تمرین‌های برگزیدهٔ صفحهٔ ۵۸

۱ $\sqrt{۰/۲۵}=\sqrt[۳]{۰/۱۲۵}$ $\qquad (۰/۵)^۲>(۰/۵)^۳$

اگر $۰<a<۱$، $\sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}$ $\qquad a^۲>a^۳$

۳ هرگاه $\sqrt[n]{a}=b$، طبق تعریف ریشه $b^n=a$؛ در نتیجه $(\sqrt[n]{a})^a=a$.

۵

$$\sqrt[۵]{۲^{-۵}}=۲^{\frac{-۵}{۵}}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt[۷]{\frac{۱}{۱۲۸}}=\sqrt[۷]{\frac{۱}{۲^۷}}=(\frac{۱}{۲^۷})^{\frac{۱}{۷}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\sqrt[۴]{۳^{-۴}}=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$$

۶ n=۳ برقرار است. n=۴ ، a و b را مثبت بگیرید. برقرار است.

ب) n=۴ ، a و b را منفی بگیرید $\sqrt[۴]{\frac{-۲}{-۳۲}}$ با معنا است و برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد، حال آنکه $\sqrt[۴]{-۲}$ و $\sqrt[۴]{-۳۲}$ بی‌معنا هستند.

درس سوم

توان‌های گویا

روش تدریس

درس با یک فعالیت که ضمن گفتمان دو نفر انجام می‌شود، شروع می‌شود. این پرسش مطرح می‌شود که توان $\frac{۱}{۲}$ عدد ۲ (پس از نیم ساعت کشت) چه عددی می‌تواند باشد. نتیجه می‌شود که هرگاه قرار دهیم $۲^{\frac{۱}{۲}} = b$ ، باید $b = \sqrt{۲}$ باشد.

پس از آن برای هر عدد، توان کسری تعریف می‌شود :

هرگاه $a > ۰$ و n عددی طبیعی باشد، $a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$

توجه داشته باشید که در این سطح باید همواره a مثبت فرض شود. ما در اینجا توان کسری عددهای منفی را تعریف نمی‌کنیم؛ گرچه در ریاضیات عالی چنین امری ممکن می‌باشد.

تعمیم : وقتی کسر، یک کسر دلخواه مانند $\frac{m}{n}$ باشد.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

لذا توان کسری در حالت کلی تعریف شده است.

درس با فعالیت‌های کلاسی ادامه می‌یابد.

به دانش‌آموزان فرصت داده می‌شود تا این فعالیت‌ها را به کمک یکدیگر حل کنند. دبیر برای نمونه برخی را پاسخ می‌دهد تا مطمئن شود دانش‌آموزان موضوع درس را آموخته‌اند.

در همین صفحه (صفحهٔ ۶۰) قواعد توان، برای توان‌های گویا، ذکر شده‌اند که عیناً همانند این قواعد برای توان‌های طبیعی‌اند.

$$(ab)^r = a^r b^r \quad , \quad a^r \times a^s = a^{r+s} \quad , \quad (a^r)^s = a^{rs}$$

به دانش‌آموزان فرصت داده شود تمرین‌های کلاسی صفحهٔ ۶۱ را مانند نمونه‌ها حل کنند.

هدف فعالیت این صفحه که به‌صورت گفتمان است، هدایت دانش‌آموزان به اینکه تساوی $\sqrt[n]{a^n}=a$ همواره برقرار نیست و اینکه وقتی n زوج است:

$$\sqrt[n]{a^n}=|a|$$

حلّ تمرین‌های برگزیدهٔ صفحهٔ ۶۳

۱

$$۵^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۵} \qquad ۱۶^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۱۶}$$

$$(۴^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۲}{۳}}=۴^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۴} \qquad ۴^{\frac{۳}{۷}}=\sqrt[۷]{۴^۳}$$

$$۴^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۱۶} \qquad ۵^{\frac{۲}{۷}}=\sqrt[۷]{۲۵}$$

$$۳۲^{-\frac{۱}{۵}}=\frac{۱}{۳۲^{\frac{۱}{۵}}}=\frac{۱}{۲} \qquad ۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۲}{۳}}=۳^{\frac{۲}{۶}}=\sqrt[۳]{۳}$$

$$۱۷^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۱۷^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۷}} \qquad ۳۲^{\frac{۲}{۵}}=\sqrt[۵]{۳۲^۲}$$

۲ $\sqrt[۷]{a}=a^{\frac{۱}{۷}}$ $\qquad \sqrt[۵]{a^۴}=a^{\frac{۴}{۵}}$ $\qquad \sqrt[n]{a^۲}=a^{\frac{۲}{n}}$

۳ تساوی زیر برقرار است:

$$\sqrt[kn]{a^{km}}=a^{\frac{km}{kn}}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

۴ هدف رسیدن به این قاعده از راه آزمون‌های عددی است. (s و r گویا و a مثبت) $\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

۵

$$\sqrt{\sqrt{۸۱}}=\sqrt[۴]{۸۱}=۳ \qquad \sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}}=\sqrt[۶]{۶۴}=۲ \qquad \sqrt[۳]{\sqrt{۵}}=\sqrt[۶]{۵}$$

درس چهارم

عبارت‌های جبری

روش تدریس

هدف، تعمیم درس مشابه از کلاس نهم است. ابتدا مفهوم اتحاد و عبارت جبری را یادآوری کنید. دانش‌آموزان را وادار کنید که اتحادهایی را که یاد گرفته‌اند مرور کرده و به **زبان فارسی** نیز بیان کنند :

(۱) $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(۲) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

ضمن فعالیت کلاسی، این اتحادها را تعمیم دهید :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (\qquad\qquad)(a+b)\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

b را به b− تبدیل می‌کنند :

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

توجه کنند که جملات یک در میان با علامت مثبت و منفی ظاهر می‌شوند. به دانش‌آموزان گفته می‌شود که ضرب دو جمله‌ای در چند جمله‌ای (یا چندجمله‌ای در چندجمله‌ای) جمله به جمله انجام می‌شود؛ هر جملهٔ اوّلی در همه جملات دیگری :

تمرین کنند :

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\ldots+b^{n-1})=\ldots$$

ــ جملات قرینه حذف شده و به‌دست می‌آید :

$$= a^n+b^n$$

مشابهاً

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1}) = a^n-b^n$$

با مثال‌های عددی (مقدار مشخص برای n) کار ادامه می‌یابد. می‌توانید در همین مرحله مفاهیم تجزیه و عامل (شمارنده) را توضیح دهید. وقتی یک اتحاد را از طرف دوم، شکل مختصر آن بنویسیم؛ مانند :

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$$

گوییم عبارت سمت چپ به حاصل‌ضرب دو عامل سمت راست تجزیه شده است. هریک از این دو پرانتز را یک **عامل** (شمارنده) a^n-b^n می‌نامیم. عیناً مانند تجزیهٔ اعداد طبیعی به شمارنده‌ها. البته ممکن است عبارتی تجزیه نشود، مگر به حاصل‌ضرب خودش در عدد ۱

$$x^2+y^2=(x^2+y^2)\times 1 \qquad 17=17\times 1$$

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

برخی عبارت‌ها عیناً مانند اتحادها نیستند، لکن با اندک تأمل و تفکری می‌توان از اتحادها برای تجزیهٔ آنها استفاده کرد؛ مانند مثال‌های **۱** و **۲** ص**۶۴**. واژهٔ مضرب در عبارت‌های جبری همانند مضرب در حساب اعداد است. وقتی عبارتی را به عبارت‌های با درجه کوچک‌تر تجزیه می‌کنیم، گوییم آن عبارت **مضرب** عبارت‌های به‌دست آمده می‌باشد.

دانش‌آموزان را وادار کنید که عبارت‌سازی کنند. مانند آنکه سه عبارت بسازند که مضرب a+b و یا مضرب a−b باشند.

تعریف عبارت گویا در صفحهٔ ۶۶ آمده است. عبارت‌های الف و ب این صفحه گویا و ب و ت گنگ هستند.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

مخرج کسر، با ضرب صورت و مخرج در عبارت مناسب، گویا شده است.

$$\frac{2}{\sqrt{x}+1}=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

پس مخرج مشترک سه کسر $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ و $\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ و $\frac{3}{x-1}$ عبارت $x-1$ است.

تمرین‌های صفحهٔ ۶۷ برای آشنایی و ممارست دانش‌آموزان در گویا کردن مخرج‌ها می‌باشند که با راهنمایی دبیران محترم، در صورت لزوم، انجام می‌دهند.

حلّ تمرین‌های برگزیدهٔ صفحهٔ ۶۷

۱

$$x^6-y^6=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$$

$$= (x-y)(x^{۲}+xy+y^{۲})(x+y)(x^{۲}-xy+y^{۲})$$

$x^{۲}+y^{۲}$ تجزیه نمی‌شود.

۲

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}} = \frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^{۲}}}{(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y})(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^{۲}})}$$

$$= \frac{\alpha}{x-y}$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-۲} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{۸}} = \frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{۸x}+\sqrt[۳]{۶۴}}{(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{۸})(\sqrt[۳]{x^{۲}}-\sqrt[۳]{۸x}+\sqrt[۳]{۶۴})} = \frac{\alpha}{x-۸}$$

(ت)

$$\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}+\frac{۲}{\sqrt{x}+۱}-\frac{۵x}{x-۱} = \frac{\sqrt{x}+۱}{x-۱}+\frac{۲(\sqrt{x}-۱)}{x-۱}-\frac{۵x}{x-۱}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+۱+۲\sqrt{x}-۲-۵x}{x-۱} = \frac{۳\sqrt{x}-۵x-۱}{x-۱}$$

$۱۰۵^{۲}=۱۰۰^{۲}+۱۰۰۰+۲۵$ (ذهنی)

$=۱۱۰۲۵$

$۹۹^{۲}=(۱۰۰-۱)^{۲}=۱۰,۰۰۰-۲۰۰+۱$ (ذهنی)

$=۹۸۰۱$

$$\frac{۱}{x-۱}+\frac{\sqrt{x}+۱}{x-۱}+\frac{\sqrt[۴]{x^{۳}}+\sqrt[۴]{x^{۲}}+\sqrt[۴]{x}+۱}{x-۱}+\frac{\sqrt[۸]{x^{۷}}+\sqrt[۸]{x^{۶}}+\sqrt[۸]{x^{۵}}+\sqrt[۸]{x^{۴}}+\sqrt[۸]{x^{۳}}+\sqrt[۸]{x^{۲}}+\sqrt[۸]{x}+۱}{x-۱}$$

الگوها :

$$x-۱ = (\sqrt[۴]{x}-۱)(\sqrt[۴]{x^{۳}}+\sqrt[۴]{x^{۲}}+\sqrt[۴]{x}+۱)$$

$$a^{۴}+b^{۴}=(a-b)(a^{۳}+a^{۲}b+ab^{۲}+b)$$

$$a^{۸}-b^{۸}=(a-b)(a^{۷}+a^{۶}b+a^{۵}b^{۲}+a^{۴}b^{۳}+a^{۳}b^{۴}+a^{۲}b^{۵}+ab^{۶}+b^{۷})$$