

فصل ١

مجموعه، الگو و دنباله

رویکرد کلی کتاب

روح کلی حاکم بر این فصل و همین‌طور سایر فصل‌های کتاب آن است که دانش‌آموز خود در فرایند ساخت دانش درگیر شود. هیچ فرمول آماده‌ای به‌طور مستقیم عرضه نشده است؛ بلکه فعالیت‌ها طرّاحی شده‌اند که دانش‌آموزان عزیز با انجام آنها، خودشان به فرمول یا رابطه مورد نظر دست یابند. در تألیف کتاب سعی شده است علاوه بر استانداردهای محتوایی، تا حد امکان استانداردهای فرایندی زیر نیز در کانون توجه باشند:

۱ مسائل باز پاسخ: در بخش‌های مختلف هر درس، یعنی «فعالیت»، «کار در کلاس» و «تمرین»ها تکالیفی یافت می‌شوند که جواب منحصر به فرد ندارند. ممکن است به تعداد تمام دانش‌آموزان برای چنین سوّالی پاسخ وجود داشته باشد و همگی آنها نیز درست باشند.

۲ حل مسئله و طرح مسئله: علاوه بر اینکه در قسمت‌های مختلف کتاب، مسائلی برای حل دانش‌آموزان وجود دارد، همچنین در موارد مختلفی از دانش‌آموزان خواسته شده است که خودشان مسائلی را در موضوع مورد بحث طرح نمایند.

۳ ارتباط و اتصال موضوعی: مطالب ارائه شده در این کتاب، علاوه بر آنکه با کتاب ریاضی سال نهم مرتبط است و در ادامه مطالب آن می‌باشد. همچنین کتاب حاضر ارتباطاتی با سایر دروس دانش‌آموزان هم برقرار کرده است. در جاهای مختلف کتاب می‌توان مطالبی درباره جغرافیا، فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، تاریخ و دیگر دروس یافت که مفاهیم ریاضی در بستر این موضوعات طرح شده‌اند.

۴ بازنمایی‌های چندگانه: بسیاری از مفاهیم ریاضی را می‌توان از منظرهای مختلفی مورد توجه قرار داد. به عنوان مثال، تابع را می‌توان از دیدگاه مجموعه‌ای، نموداری، جدولی و ... مورد مطالعه قرار داد. این مطلب که دانش‌آموز بتواند از چندین زاویه مختلف یک مفهوم ریاضی را ببیند و بتواند بین بازنمایی‌های مختلف حرکت کند، نشان‌دهنده قوت آموزش و معنادار بودن یادگیری او خواهد بود. این موضوع در کتاب حاضر مورد توجه بوده و به عنوان مثال، یک مفهوم خاص ریاضی، هم از منظر جبری و هم از دیدگاه هندسی مورد بررسی واقع شده است.

۵ توجه به بدفهمی‌های احتمالی دانش‌آموزان: در سال‌های اخیر، تحقیقات فراوانی بر روی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در ریاضیات صورت گرفته است. اشتباهی که ناشی از بدفهمی دانش‌آموز نسبت به موضوع باشد، نمی‌تواند ناشی از خطای محاسباتی، خستگی دانش‌آموز یا بی‌دقتی او باشد؛ بلکه چنین اشتباهی معمولاً در نتیجه یک قانون غلط است که در ذهن دانش‌آموز وجود دارد. به همین دلیل است که به این گونه اشتباهات، اشتباهات نظام‌دار نیز گفته می‌شود.

نخستین گام برای از بین بردن یا حداقل کاهش دادن این بدفهمی ها آن است که آنها را شناسایی کنیم و فراگیر بودن آنها در بین دانش آموزان را به رسمیت بشناسیم. در گام بعدی باید شرایطی را برای دانش آموز فراهم کنیم که او در مواجهه با تکالیف و موارد مناسب بتواند قانون غلط موجود در ذهن خود را حذف، جایگزین، یا اصلاح نماید. چنین ملاحظاتی در بخش های مختلف کتاب مد نظر بوده است؛ به این صورت که بدفهمی های رایج برجسته شده اند تا در تقابل با شکل درست آنها موجب تأمل و تفکر دانش آموز گردند.

۶ گفتمان ریاضی: در یک تدریس، هر چقدر بتوان دانش آموزان را به صحبت کردن و بحث نمودن وادار کرد، آن تدریس اثربخش تر خواهد بود. این مطلب که دانش آموزان نظرات دوستان خود را مورد نقد قرار دهند، یا اینکه بتوانند از نظرات خودشان در مقابل دیگران به طور مستدل و منطقی دفاع کنند، یکی از اهداف مهم آموزش ریاضی است. در قسمت های مختلف این کتاب، از دانش آموزان خواسته شده است تا با دوستان خود در موضوعات مورد نظر و از آن جمله در مورد مسائل باز پاسخ بحث کنند و جواب های خود را با یکدیگر مقایسه کنند. طبیعی است که هدایت این بحث ها و گفتمان ریاضی بر عهدهٔ معلمان عزیز خواهد بود.

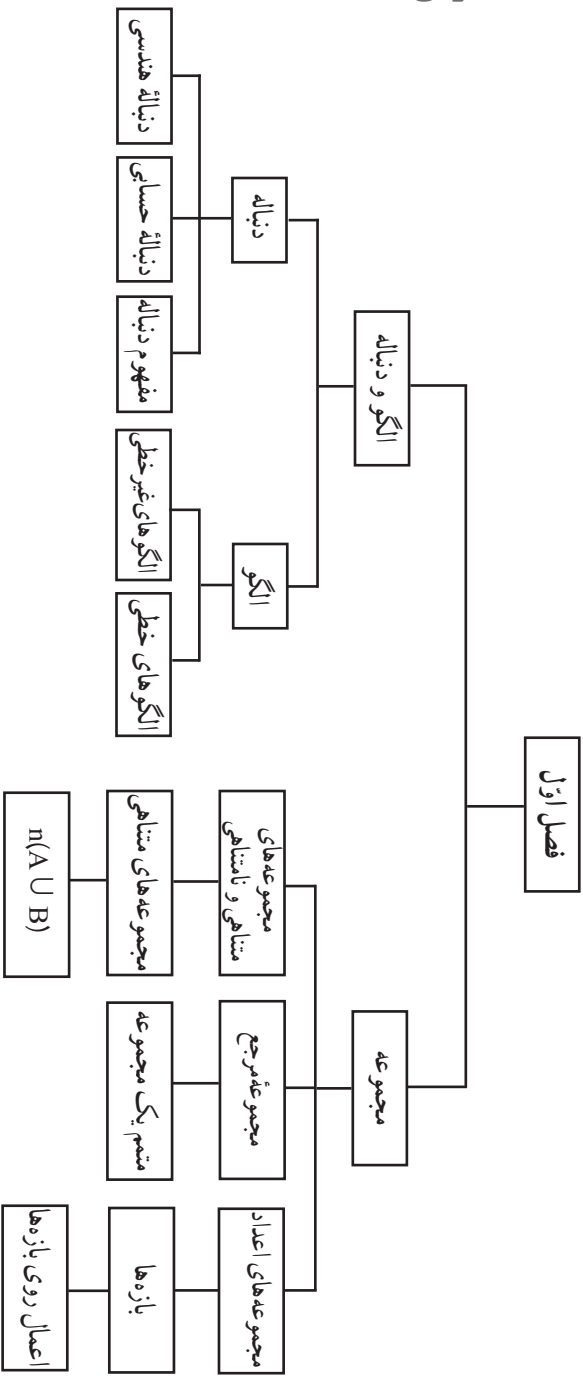
۷ اثبات و استدلال: اثبات و استدلال بخش جدانشدنی از آموزش ریاضی هستند. در اینجا به هیچ وجه تأکید بر اثبات صوری نیست و بیشتر استدلال شهودی مد نظر است. هدف دیگر آن است که دانش آموزان ضرورت اثبات و استدلال برای یک حکم ریاضی را درک نمایند.

نگاه کلی به فصل

دانش آموزان در کلاس نهم برای اولین بار با مفهوم مجموعه آشنا شده اند. در فصل های بعدی کتاب حاضر، مطالبی از مفهوم مجموعه مورد نظر است که در کتاب نهم به آنها پرداخته نشده است؛ لذا دو درس اول فصل حاضر، به این پیش نیازها اختصاص دارد. مطالبی مانند بازه های اعداد حقیقی، مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه، مجموعه های متناهی و نامتناهی و همچنین اصل شمول و عدم شمول در این دو درس مورد بحث واقع شده اند.

دو درس بعدی این فصل، در ارتباط با مفهوم الگو و دنباله است. الگویابی و الگوسازی، موضوعاتی هستند که دانش آموزان از کلاس اول ابتدایی با آنها سر و کار داشته اند. در واقع درس سوم در ادامهٔ مطالبی است که دانش آموزان در پایه های قبل در این زمینه مطالعه کرده اند. دنباله هم در انتهای درس سوم مطرح شده است و درس چهارم به دنباله های حسابی و هندسی اختصاص دارد.

نقشه مفهومی



نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

- (الف) مجموعه اعضای خانواده شما
 (ب) مجموعه نقاط روی محور x ها
 (پ) مجموعه مثلث‌های قائم‌الزاویه
 (ت) $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
 (ج) بازه $(\frac{1}{10}, \frac{2}{10})$
 (چ) مجموعه جواب‌های حقیقی معادله $2x - 1 = 0$
 (ح) مجموعه جواب‌های حقیقی نامعادله $2x - 1 \geq 0$
 (خ) مجموعه شماره‌های طبیعی عدد ۴۸

۲ مثال‌هایی برای مجموعه‌های خواسته شده ارائه کنید.

- (الف) یک مجموعه غیر عددی متناهی
 (ب) یک مجموعه عددی متناهی
 (پ) یک مجموعه غیر عددی نامتناهی
 (ت) یک مجموعه عددی نامتناهی
 ۳ فرض کنیم \mathbb{N} مجموعه مرجع باشد و $A = \{3n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{3n - 2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
 (الف) A و B را با نمایش اعضای آنها بنویسید.

(ب) A' و B' را مشخص کنید.

(پ) $(A \cup B)'$ را ابتدا با نمایش اعضای آن و سپس با بیان ویژگی مشترک اعضای آن بنویسید.

۴ مجموعه‌های خواسته شده را با هاشور زدن در نمودار ون مشخص کنید.

(الف) $(A \cap B)'$ (ب) $A' \cup B'$ (پ) $A - B$ (ت) $A \cap B'$

۵ فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ مجموعه مرجع بوده و A و B و C به ترتیب، مجموعه شامل عددهای اول، مضرب‌های ۳ و اعداد یک رقمی از U باشند.

(الف) A و B و C را با نمایش اعضای هر یک از آنها مشخص کنید.

(ب) $A - B$ و $A \cap B'$ را مشخص کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶ برای مجموعه زیر، دو مجموعه مرجع دلخواه بنویسید و در هر حالت، متمم A را مشخص کنید.

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

۷ در پرتاب یک تاس، مجموعه شامل تمام حالت‌های ممکن در مورد عدد رو شده را بنویسید.

آیا این مجموعه را می‌توان به عنوان یک مجموعه مرجع در نظر گرفت؟

۸ اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، مطلوب است متمم هر یک از مجموعه‌های زیر:

$$(الف) A = [5, +\infty) \quad (ب) B = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$$

۹ دو مجموعه متناهی دلخواه مثل A و B مثال بزنید و درستی رابطه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ را برای آنها بررسی کنید.

۱۰ در یک نظرسنجی از ۸۰ خانواده، اطلاعات زیر حاصل شده است:

– ۲۰ خانواده فقط کامپیوتر شخصی دارند،

– ۳۵ خانواده فقط لپ تاپ دارند،

– ۱۰ خانواده نه کامپیوتر شخصی دارند و نه لپ تاپ.

چه تعدادی از این خانواده‌ها هم دارای کامپیوتر شخصی هستند و هم لپ تاپ؟
۱۱ شکل‌های زیر را در نظر بگیرید.



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

الف) در شکل چهلم چند دایره وجود دارد؟

ب) در شکل n ام چند دایره وجود دارد؟

پ) آیا حالتی وجود دارد که شامل ۵۵ دایره باشد؟ اگر هست، شماره آن شکل چند است؟

۱۲ شکل زیر را در نظر بگیرید.

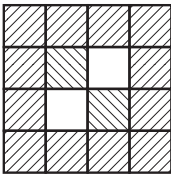
الف) مربع ۱۰×۱۰ شامل چند کاشی تیره خواهد بود؟

ب) مربع ۱۰۰×۱۰۰ شامل چند کاشی تیره خواهد بود؟

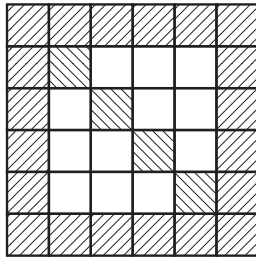
پ) مربع $n \times n$ شامل چند کاشی تیره خواهد بود؟ ($n \geq ۴$)

ت) آیا مربعی هست که در آن ۹۴ کاشی تیره به کار رفته باشد؟ اگر هست، ابعاد آن را بیابید.

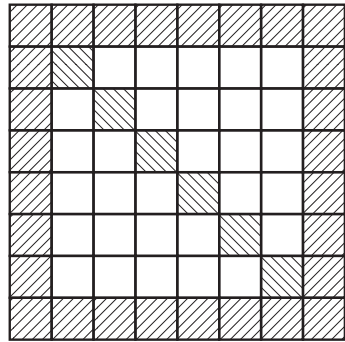
ث) آیا الگوی حاصل یک الگوی خطی است؟ چرا؟



مربع ۴×۴ دارای ۱۴ کاشی تیره

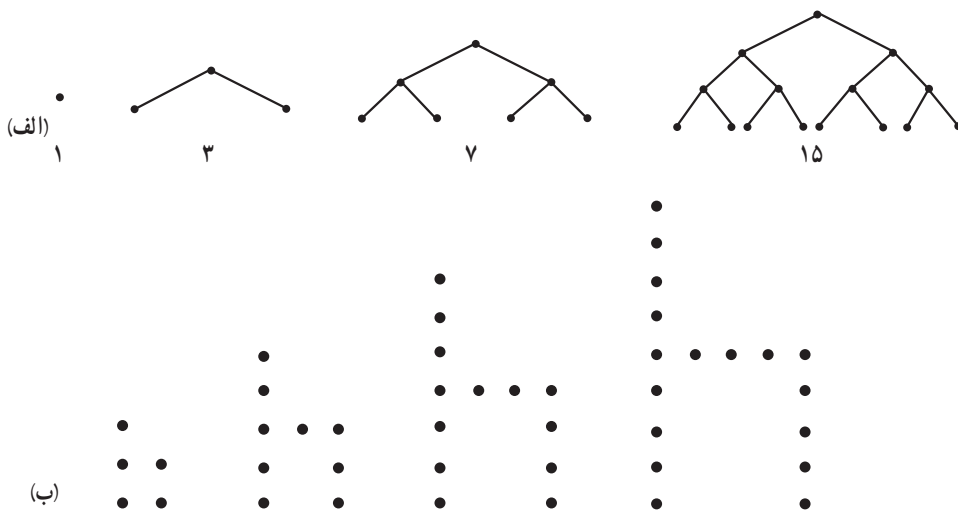


مربع ۶×۶ دارای ۲۴ کاشی تیره

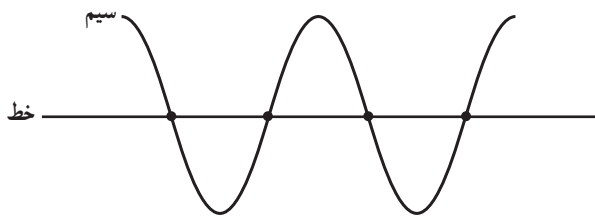


مربع ۸×۸ دارای ۳۴ کاشی تیره

۱۳ در الگوهای زیر، جمله n ام را به دست آورید.



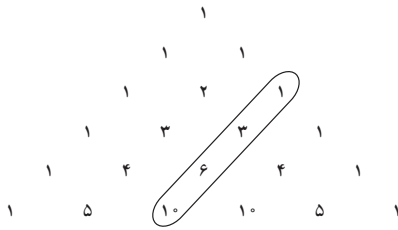
۱۴ یک خط افقی، قطعه سیمی را در چهار نقطه قطع کرده است و آن را به پنج قسمت، مطابق شکل زیر تقسیم کرده است. اگر به جای یک خط، ۱۹ خط موازی این سیم را طوری قطع کند که هر یک از آنها چهار نقطه اشتراک با سیم داشته باشند، آن گاه سیم مزبور در مجموع به چند قطعه تقسیم می شود؟



۱۵ چهار جمله اول هر یک از دنباله های با جمله عمومی زیر را بنویسید.

(الف) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (ب) $b_n = \frac{2^n}{n+1}$ (پ) $C_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ (ت) $d_n = 2^n - n^2$

۱۶ آیا دنباله $2, 4, 6, 8, \dots$ همان مجموعه $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ است؟ توضیح دهید.



۱۷ الف) الگوی به کار رفته در مثلث زیر را توضیح دهید.

ب) یک دنباله را در این مثلث مشخص کرده‌ایم (دنباله اعداد مثلثی). شما سه دنباله دلخواه دیگر را مشخص نمایید.

.....

۱۸ الگوی زیر را در نظر بگیرید.

$$1^2 + 1 = 2^2 - 2$$

$$2^2 + 2 = 3^2 - 3$$

$$3^2 + 3 = 4^2 - 4$$

$$4^2 + 4 = 5^2 - 5$$

.....

الف) دو سطر بعدی را در این الگو بنویسید. آیا تساوی‌ها برقرارند؟

ب) سطر n ام این الگو را با نمادهای جبری بنویسید و درستی آن را ثابت کنید.

۱۹ در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید و جمله عمومی را بیابید.

... و ۳۸ و ۲۳ و ۱۲ و ۵ (الف)

... و ۶۱ و ۴۲ و ۲۷ و ۱۶ (ب)

... و ۲۰ و ۱۲ و ۶ و ۲ و ۰ (پ)

... و ۲۴ و ۱۵ و ۸ و ۳ و ۰ (ت)

... و ۲۶ و ۱۷ و ۱۰ و ۵ و ۲ (ث)

۲۰ دنباله زیر را در نظر بگیرید.

-۷، ۱، ۹، ۱۷، ۲۵، ...

الف) جمله پنجاهم آن را محاسبه کنید.

ب) چندمین جمله آن برابر ۷۹۳ است؟

۲۱ جملات پنجم و نهم یک دنباله حسابی به ترتیب ۳۰ و ۵۸ هستند. جمله چندم این دنباله عدد ۱۰۰ است؟

۲۲ در یک دنباله حسابی جمله اول عدد ۱ است. قدر نسبت آن را طوری بیابید که جمله دهم دنباله، برابر

عدد 100° شود.

۲۳ اگر a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند؛ یعنی b واسطه حسابی بین a و c باشد، آن گاه مقدار b را بر حسب a و c به دست آورید.

۲۴ اگر $\frac{x}{y}$ ، $x+2$ و $2x-11$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، x را بیابید.

۲۵ بین 9 و 61 سه واسطه حسابی درج کنید.

۲۶ در یک دنباله حسابی $t_4 - t_1 = 14$ و $t_{13} + t_4 = 88$ می باشد. دنباله را مشخص کنید.

۲۷ مجموع زوایای داخلی مثلث 180° ، چهارضلعی 360° ، پنج ضلعی 540° می باشد. اگر این الگو با همین روند ادامه پیدا کند، الف) مجموع زوایای داخلی یک 12 ضلعی چند درجه خواهد بود؟
ب) مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی چند درجه است؟

۲۸ اگر زاویه های یک مثلث تشکیل دنباله حسابی دهند، ثابت کنید که یکی از زاویه های آن باید 60° باشد.

۲۹ زاویه های یک پنج ضلعی محدب تشکیل دنباله حسابی می دهند.

الف) اگر زاویه ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، زاویه وسط چند درجه است؟

ب) اگر کوچک ترین زاویه 40° درجه باشد، اندازه سایر زاویه ها را به دست آورید.

۳۰ در ردیف اول یک استادیوم ورزشی 15 صندلی، در ردیف دوم 19 و در ردیف سوم 23 صندلی می باشد. اگر تعداد صندلی ها به همین منوال افزایش یابد، در ردیف 25 چند صندلی وجود خواهد داشت؟

۳۱ دنباله هندسی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) جمله یازدهم آن را به دست آورید.

ب) چندمین جمله آن برابر $\frac{3}{456}$ می باشد؟

۳۲ جمله چندم دنباله زیر برابر 1024 می باشد؟

$$\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

۳۳ در یک دنباله هندسی حاصل ضرب سه جمله اول برابر 27 و مجموع آنها برابر 13 می باشد. دنباله را مشخص کنید. مسئله چند جواب دارد؟

۳۴ یک دنباله هندسی بنویسید که در آن هر دو جمله متوالی قرینه یکدیگر باشند.

۳۵ الف) یک دنباله هندسی دلخواه بنویسید و قدر نسبت آن را مشخص نمایید.

ب) تمام جملات دنباله مذکور را معکوس کنید و نشان دهید که دنباله حاصل نیز یک دنباله هندسی است.

پ) قدر نسبت دنباله حاصل چه ارتباطی با قدر نسبت دنباله اصلی دارد؟

ت) به طور کلی اگر a ، b و c سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، ثابت کنید اعداد $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ نیز تشکیل دنباله هندسی می دهند.

۳۶ الف) دو دنباله هندسی دلخواه مثال بزنید.

ب) نشان دهید حاصل $\frac{t_3 t_9}{t_6^2}$ در مورد جملات هر کدام از دنباله‌های فوق برابر ۱ می‌باشد.

پ) برای یک دنباله هندسی در حالت کلی ثابت کنید $t_3 t_9 = t_6^2$

ت) آیا می‌توانید حالت کلی تری از این رابطه را نوشته و آن را ثابت کنید؟

۳۷ فرض کنید آب یک استخر در هر ساعت ده درصد گرم‌تر شود. اگر دمای فعلی آب 5° درجه باشد، پس از هشت ساعت دمای آن چند درجه خواهد بود؟

۳۸ شهری ۱۰۰۰۰۰۰ نفر جمعیت دارد. فرض کنید نرخ رشد جمعیت در این شهر سه درصد باشد.

الف) جمعیت این شهر را پس از گذشت یک، دو، سه، چهار و پنج سال پیش‌بینی کنید و در یک جدول بنویسید.

ب) اگر نرخ رشد سه درصد برای جمعیت این شهر ثابت بماند، پس از گذشت n سال، جمعیت شهر از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پ) هر گاه جمعیت این شهر را در سال‌های متوالی بنویسیم، دنباله حاصل چه نوع دنباله‌ای خواهد بود؟

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

اهداف

- یادآوری مختصر از مجموعه‌های مختلف اعداد
- آشنایی با مفهوم بازه‌های اعداد حقیقی و اعمال بر روی آنها
- آشنایی با مفهوم مجموعه متناهی و مجموعه نامتناهی

روش تدریس

این درس با یادآوری مجموعه‌های اعداد شروع شده است که دانش‌آموزان از سال‌های قبل با آنها آشنا هستند. کار در کلاس صفحه ۲ با همین هدف طراحی شده است. توصیه می‌شود فرصت کافی در اختیار دانش‌آموزان قرار گیرد تا آنها با پرداختن به قسمت‌های مختلف این «کاردر کلاس» بتوانند مطالب گذشته را به یاد آورند.

بازه‌ها اولین موضوع جدیدی است که در کتاب آمده است و آموزش آن باید متکی بر فعالیت دانش‌آموز باشد. در ابتدای مبحث از دانش‌آموزان خواسته شده است که اعضای یک مجموعه (جواب یک نامعادله) را روی محور با رنگ کردن مشخص نمایند. حتی تعریف بازه‌ها نیز در فعالیت‌های صفحه ۳ و ۴ بر عهده دانش‌آموزان گذاشته شده است. بعد از یک مثال حل شده، در «کار در کلاس» صفحه ۵ تکالیف متنوعی آمده است که دانش‌آموزان باید در کلاس انجام دهند.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی پس از انجام یک فعالیت توسط دانش‌آموزان تعریف شده است. سپس در کار در کلاس صفحه ۶ مثال‌های متنوعی از مجموعه‌ها آمده است که باید دانش‌آموزان متناهی یا نامتناهی بودن آنها را مشخص کنند. این قسمت ظرفیت آن را دارد که دانش‌آموزان در مورد مثال‌های طرح شده پژوهش‌هایی را انجام دهند و در کلاس ارائه نمایند؛ نمونه‌هایی از آن در حاشیه‌های صفحه ۶ و ۷ آمده است. به علاوه برخی از سؤالات باز پاسخ هم در این قسمت آمده است. با انجام فعالیت صفحه ۷، دانش‌آموزان به نامتناهی بودن Q و برخی زیرمجموعه‌های آن براساس آنچه در کلاس نهم یاد گرفته‌اند، پی می‌برند.

متمم یک مجموعه

اهداف

- معرفی مفهوم مجموعه مرجع
- معرفی مفهوم متمم یک مجموعه
- آشنایی با مفهوم دو مجموعه جدا از هم
- آشنایی با اصل شمول و عدم شمول

روش تدریس

این درس با یک مثال ملموس از دنیای واقعی آغاز می‌شود و با بحث در مورد مجموعه کتاب‌های خطی و مجموعه کتاب‌های چاپی یک کتابخانه، مفاهیمی مثل مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه معرفی می‌شود. توصیه می‌شود در کلاس از دانش‌آموزان خواسته شود تا مثال‌های دیگری از این دست ارائه کنند. فعالیت صفحه ۸، نقش مجموعه مرجع در معرفی یک مجموعه برجسته شده است. در کار در کلاس صفحه ۹ مثال‌های گوناگونی از دنیای واقعی و ریاضی وجود دارد که دانش‌آموزان با انجام آنها می‌توانند مفهوم مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه را بهتر درک کنند و به نتایج جدیدی هم برسند.

در مورد تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه متناهی، فعالیتی در صفحه ۱۰ آمده است. در گام اول، دانش‌آموزان حاصل $n(A \cup B)$ را برای دو مجموعه جدا از هم محاسبه می‌کنند. در قسمت دوم، حاصل آن را در حالت کلی به دست می‌آورند و سپس در کار در کلاس صفحه ۱۱ از آنها خواسته می‌شود تا مثال‌های مختلفی را در این زمینه حل کنند. نکته مهم آن است که در این مثال‌ها هم کاربرد فرمول دیده می‌شود و هم استفاده از نمودار ون. در واقع این دو ابزار، هیچ‌کدام بر دیگری ارجحیت ندارند و در این درس، از هر دو روش استفاده شده است. در قسمت سوم «کار در کلاس» مورد بحث، دانش‌آموزان به کمک مثال و نمودار ون به طور شهودی به این نتیجه می‌رسند که اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B' \subseteq A'$ خواهد بود.

توصیه آموزشی

دانش‌آموزان را محدود و مجبور به استفاده از روشی خاص در حل تکالیف نکنیم و به آنها اجازه دهیم تا روش حل مورد علاقه خود را به کار برند.

الگو و دنباله

درس سوم

اهداف

- آشنایی با متغیرهای اندیس‌دار
- توانایی تعمیم در الگوهای مختلف
- توانایی تشخیص الگوهای خطی و غیرخطی
- آشنایی با مفهوم دنباله‌اعداد
- ارتقای تفکر تصویری
- مرتبط کردن الگوهای هندسی و عددی به یکدیگر

روش تدریس

برای مبحث الگو، مقدمه‌ای در حاشیه صفحه ۱۴ آمده و در آنجا تعریفی از الگو داده شده است. درس با یک مثال از الگویی آشنا برای دانش‌آموزان آغاز می‌شود. دو هدف برای این مثال مورد نظر است. اول آنکه در حین حل این مثال، دانش‌آموزان با متغیرهای اندیس‌دار آشنا شوند؛ چرا که در ادامه موضوع از این نمادگذاری با هدف سهولت کار استفاده شده است. دوم اینکه دانش‌آموزان توانایی تعمیم پیدا کنند و بتوانند

جمله عمومی برخی الگوها را به دست آورند. در اینجا نیز تأکید بر راه حل های چندگانه است و دانش آموزان آزادند تا از هر روشی دست به تعمیم زده و جمله عمومی را بیابند.

در صفحه ۱۶ الگوی خطی تعریف می شود و علت نام گذاری آنها با این اسم نیز به اندازه ای توضیح داده می شود که این موضوع به کتاب ریاضی نهم و قسمت معادله خط از آن کتاب متصل شود. پس از آن با ارائه یک مثال حل شده به کار در کلاس صفحه ۱۷ می رسیم که در آن یک الگوی خطی مورد کنکاش قرار می گیرد.

مثال های ارائه شده در مورد الگوهای غیرخطی این درس، همگی مربوط به الگوهای درجه دوم هستند. این بخش با فعالیت صفحه ۱۷ آغاز می شود که در آن یک الگوی هندسی غیرخطی از دو زاویه مورد توجه قرار گرفته و جمله عمومی آن به دست می آید.

مفهوم دنباله در انتهای این درس ارائه شده و در کاردر کلاس صفحه ۱۹ تقریباً به تفصیل به آن پرداخته شده است. در اینجا دنباله های متنوعی ذکر شده است تا دانش آموزان جملات بعدی آنها را بنویسند و در برخی موارد جمله عمومی دنباله ها را حدس بزنند. در پایان این درس، دانش آموزان فرمول مجموع $1+2+3+\dots+n$ را به دست می آورند.

در تمرین های این درس، هم الگوهای خطی و هم الگوهای غیرخطی دیده می شوند. در مورد تمرین های ۳ و ۴ صفحه ۲۰ که در آنها خواسته شده است تا به دنباله های داده شده الگوهای هندسی مناسبی نظیر شوند، احتمالاً دانش آموزان، نیازمند کمک معلم باشند؛ زیرا در متن درس، عکس این روند مورد توجه بوده است.

توصیه آموزشی

کار حل یک مسئله نباید با به دست آمدن جواب آخر آن تمام شده تلقی گردد. بهتر است دانش آموزان بیاموزند که درستی جواب حاصل را بررسی نمایند. همان طور که در مثال حل شده صفحه ۱۶ این کار انجام پذیرفته است. در این مثال، پس از به دست آمدن جمله اول و قدر نسبت دنباله، جملات دنباله نوشته شده اند تا دانش آموزان به وضوح ببینند که جمله چهارم و دهم دنباله همان گونه که در فرض مسئله آمده بود به ترتیب ۱۷ و ۴۱ هستند.

دنباله‌های حسابی و هندسی

درس چهارم

اهداف

- تشخیص و شناسایی دنباله‌های حسابی
- به دست آوردن جمله عمومی دنباله حسابی
- تشخیص ارتباط بین الگوهای خطی و دنباله‌های حسابی
- آشنایی با دنباله هندسی
- به دست آوردن جمله عمومی دنباله هندسی
- یافتن نمونه‌هایی از دنباله‌های حسابی و هندسی در برخی پدیده‌های دنیای واقعی

روش تدریس

درس با ایجاد ارتباط با درس قبل آغاز می‌شود. به این معنا که الگوهای خطی که دانش‌آموزان در درس سوم با آنها آشنا شده‌اند، در این درس دنباله حسابی نامیده شده است. در فعالیت صفحه ۲۱ که مربوط به سال‌های برگزاری مسابقات المپیک در هزاره سوم میلادی می‌باشد، دانش‌آموزان هدایت می‌شوند تا به ساختار جمله عمومی دنباله حسابی در حالت کلی دست یابند.

کار در کلاس صفحه ۲۲ شامل مثال‌های مختلفی از دنباله حسابی است تا دانش‌آموزان در به دست آوردن قدر نسبت و جمله عمومی دنباله‌های حسابی کاملاً ورزیده شوند. نکته حائز اهمیت در اینجا آن است که به ارتباط بین دنباله‌های حسابی و الگوهای خطی تأکید گردد؛ به این معنا که مثلاً در یافتن جمله عمومی دنباله‌ای مثل $5, 9, 13, 17, \dots$ وقتی دانش‌آموز تشخیص می‌دهد که قدرنسبت برابر ۴ است، باید بلافاصله نتیجه بگیرد که جمله عمومی آن به شکل $t_n = 4n + \square$ می‌باشد و با مقایسه آن با جمله اول دنباله به راحتی به جواب $t_n = 4n + 1$ دست یابد. به عبارت دیگر لزومی ندارد که دانش‌آموز را مجبور کنیم تا حتماً از فرمول جمله عمومی دنباله حسابی یعنی $t_n = t_1 + (n-1)d$ استفاده کند. این مطلب در مثال ابتدای

صفحه ۲۳ نیز مورد توجه بوده است و مثال مزبور به هر دو روش، حل شده است تا دانش‌آموزان روش مطلوب خود را برگزینند.

همچنین در صفحه ۲۲ یک مثال کاربردی در ارتباط با انتخاب اپراتور تلفن همراه مناسب آمده است که توصیه می‌شود در تدریس روزانه خود مثال‌هایی از این دست، سهم بیشتری داشته باشند؛ چرا که این‌گونه مثال‌ها برای دانش‌آموزان ملموس‌ترند و به همین دلیل آنها مفاهیم ریاضی نهفته در این مثال‌ها را بهتر فرا می‌گیرند.

کار در کلاس صفحه ۲۳ به واسطه حسابی مربوط می‌شود که این موضوع با مثال‌های متعددی شرح داده شده است. بسیاری از پژوهشگران معتقدند که توجه دادن دانش‌آموزان به ریشه‌های تاریخی مفاهیم ریاضی، می‌تواند انگیزه آنها را در مطالعه این مفاهیم افزایش دهد. در این راستا تمرین ۶ صفحه ۲۴، از پایروس رایند انتخاب شده است.

دنباله هندسی نیز با یک مسئله روزمره؛ یعنی نحوه انتشار ویروس آنفلوآنزا آغاز می‌شود و دانش‌آموزان در طی فعالیت صفحه ۲۵ به ساختار جمله عمومی دنباله هندسی دست می‌یابند. کار در کلاس صفحه ۲۶ از یک طرف به برخی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد دنباله هندسی پرداخته است و از طرف دیگر به موضوع نحوه درج واسطه هندسی بین دو عدد.

تمرین‌های صفحه ۲۷ نیز متنوع اند. به عنوان مثال، تمرین ۷ این صفحه در ارتباط با تعداد تلفات جاده‌ای کشور است که با وجود میزان بالای آن خوشبختانه در یک دهه گذشته سیر نزولی داشته است. توصیه می‌شود دانش‌آموزان تشویق شوند تا با دقت در پیرامون خود، چنین مسائلی را که مرتبط با مفاهیم درسی آنهاست بیابند و در کلاس طرح نمایند.

حل تمرین‌های صفحه ۷

۱ فرض کنید U مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

$$V = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

U یک مجموعه نامتناهی است.

پ) یک زیر مجموعه متناهی از U بنویسید.

زیر مجموعه‌های مختلفی می‌توان ارائه کرد؛ به عنوان مثال: $A = \{10, 20, 40, 100\}$

ت) دو زیر مجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید، به طوری که $C \subseteq D$

مثال‌های مختلفی می‌توان نوشت از جمله:

$$C = \{2^0, 4^0, 6^0, 8^0, \dots\}$$

$$D = \{1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \dots\}$$

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی

ب) مجموعه شماره‌های طبیعی عدد ۳۶. متناهی

پ) بازه $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$. نامتناهی

ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$ در واقع A برابر مجموعه تهی و لذا متناهی است.

ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی.

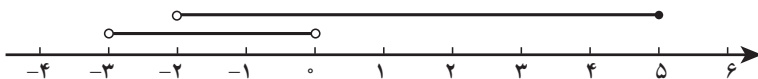
۳ دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد.

مجموعه‌های متفاوتی می‌توان مثال زد: مانند $\{1\} = [1, +\infty) \cap [0, 1]$

۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

با توجه به شکل

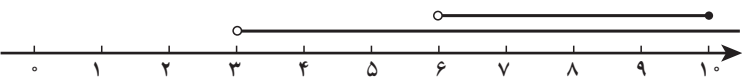
$$(-3, 0) \cap (-2, 5] = (-3, 0]$$



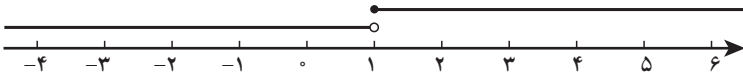
$$(-\infty, 6] \cap (2, 9) = (2, 6]$$



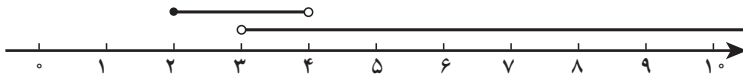
$$(3, +\infty) \cap (6, 10] = (6, 10]$$



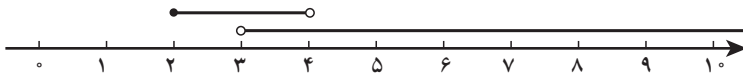
ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}$



ث) $(3, +\infty) - [2, 4) = [4, +\infty)$

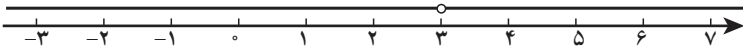


ج) $[2, 4) - (3, +\infty) = [2, 3]$



۵ مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

$$\mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$



۶ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن گاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ A مجموعه‌ای

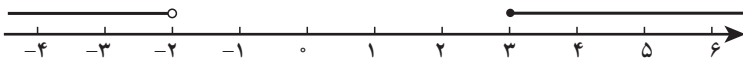
متناهی خواهد بود.

حل تمرین‌های صفحه ۱۲

۱ \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی

محور نشان دهید.

الف) $A = [-2, 3) \Rightarrow A' = (-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$



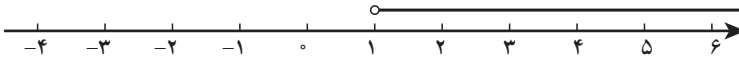
ب) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow B = \mathbb{R} - \mathbb{W}$



پ) $C = (0, +\infty) \Rightarrow C' = (-\infty, 0]$



ت) $D = (-\infty, 1] \Rightarrow D' = (1, +\infty)$



۲ \mathbb{N} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

مثال‌های مختلفی می‌توان ارائه کرد؛ به عنوان مثال:

$$A = \{1, 3, 5, 7, \dots\} \Rightarrow A' = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

$$B = \{5, 6, 7, 8, 9, \dots\} \Rightarrow B' = \{1, 2, 3, 4\}$$

مثال‌های زیادی وجود دارد؛ مثلاً:

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

هر زیر مجموعه متناهی و دلخواه از \mathbb{N} مانند C را در نظر بگیریم حتماً C' نامتناهی خواهد شد. به

عنوان نمونه

$$C = \{1, 2, 3, \dots, 1000000\} \Rightarrow C' = \{1000001, 1000002, 1000003, \dots\}$$

۳ اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$$

روش دوم: استفاده از نمودار ون

۴ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ،

$$n(B) = 40 \text{ و } n(A \cap B) = 20 \text{ مطلوب است محاسبه عبارت‌های زیر:}$$

در نمودار ون، دو مجموعه A و B سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم می‌کنند. اگر از ناحیه

مربوط به $A \cap B$ شروع کنیم و عدد مربوط به آن را که 20 می‌باشد بنویسیم، نمودار زیر را خواهیم داشت

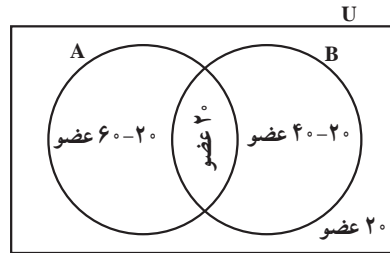
که به کمک آن می‌توان جواب تمام قسمت‌های این تمرین را به دست آورد.

الف) $n(A \cup B) = 40 + 20 + 20 = 80$

ب) $n(A \cap B') = 60 - 20 = 40$

پ) $n(A' \cap B) = 40 - 20 = 20$

ت) $n(A' \cap B') = 20$



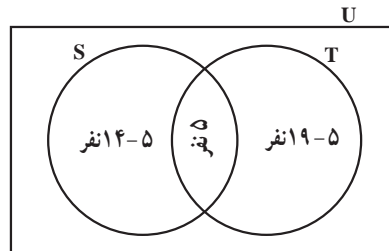
روش دوم: استفاده از فرمول

۵ در یک کلاس ۳۱ نفری تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است (الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند. (ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

الف) $n(S - T) = n(S) - n(S \cap T) = 14 - 5 = 9$

ب) $n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T)$
 $= 14 + 19 - 5$
 $= 28$

$n[(S \cup T)'] = 31 - 28 = 3$



۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۷۵ نفر شان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت، از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند؟

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند؟

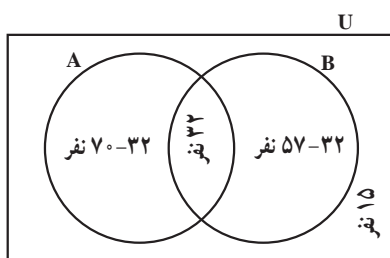
در نمودار ون با شروع از قسمت $(A \cap B)$ و نوشتن تعداد عضوهای هر قسمت، نمودار زیر به دست می‌آید که به کمک آن می‌توان به تمام قسمت‌های تمرین پاسخ داد.

الف) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 70 + 57 - 32 = 95$

ب) $n(A - B) = 70 - 32 = 38$

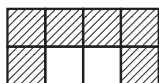
پ) $n(A - B) + n(B - A) = (70 - 32) + (57 - 32) = 38 + 25 = 63$

ت) $n[(A \cup B)'] = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$

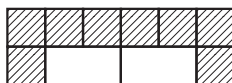


حل تمرین‌های صفحه ۲۰

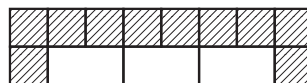
۱ به الگوی زیر توجه کنید.



۶ کاشی تیره، ۱ کاشی سفید



۸ کاشی تیره، ۲ کاشی سفید



۱۰ کاشی تیره، ۳ کاشی سفید

- الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره آن را مشخص کنید.
 ب) تعداد کاشی‌های تیره را در هر مرحله به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.
 پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.
 ت) برای 100 کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟
 ث) آیا در این الگو، شکلی وجود دارد که شامل 50 کاشی تیره باشد؟ اگر هست تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟

الف) ۱۲ کاشی تیره

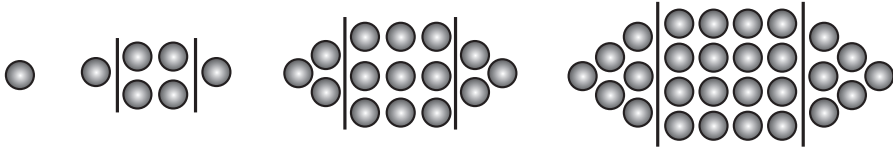
ب) ۱۸ و ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶

پ) $t_n = 2n + 4$

ت) $t_{100} = 2(100) + 4 = 204$

ث) $t_5 = 50 \rightarrow 2n + 4 = 50 \rightarrow 2n = 46 \rightarrow n = 23$

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



۱ نقطه

۶ نقطه

۱۵ نقطه

شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

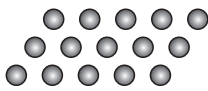
الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

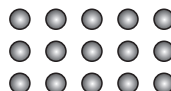
پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

الف) ۱, ۶, ۱۵, ۲۸, ۴۵, ۶۶, ...

ب) مثلاً شکل (۳) را می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد.



معادل شکل (۳)



معادل شکل (۴)

$$t_3 = 3(3+2)$$

$$t_4 = 4(4+3)$$

$$t_5 = 5(5+4)$$

.....

با ادامه این روند، خواهیم داشت:

$$t_n = n[n + (n-1)]$$

$$t_n = n(2n-1)$$

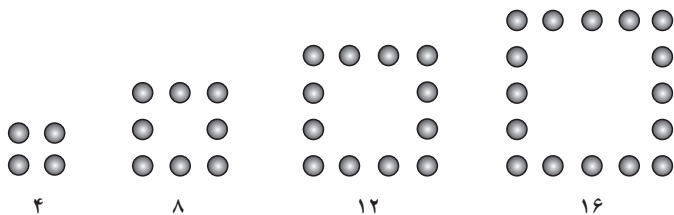
$$t_n = 2n^2 - n$$

روش دوم ب: هر شکل مجموع یک عدد مربعی و دو برابر عدد مثلی ماقبل آن است.

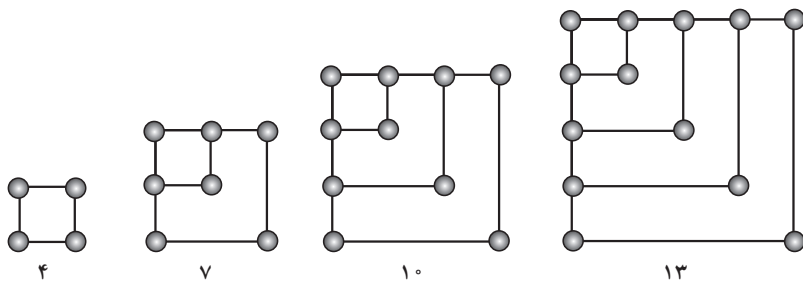
پ) $t_{10} = 2(10)^2 - 10 = 190$

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

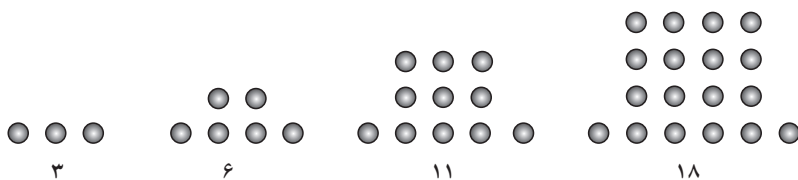
الف) $a_n = 4n$



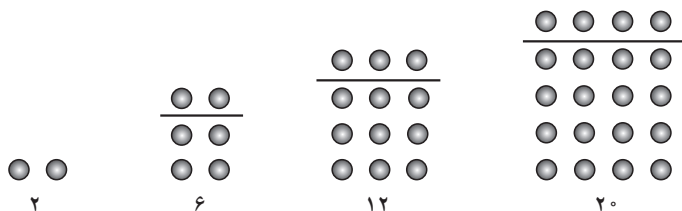
ب) $b_n = 3n + 1$



پ) $c_n = n^2 + 2$

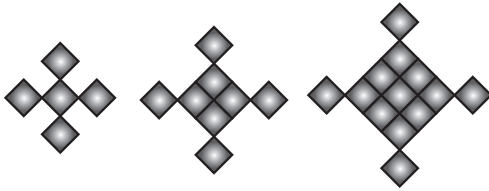


ت) $d_n = n^2 + n$



توجه: برای هر قسمت می توان الگوهای هندسی مختلفی ارائه کرد که موارد بالا به عنوان نمونه ارائه شده اند.

۴ برای دنباله های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن، جمله عمومی هر دنباله را بیابید.
 الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots \Rightarrow (1+4), (4+4), (9+4), (16+4), \dots$



$$(1)^2 + 4$$

$$2^2 + 4$$

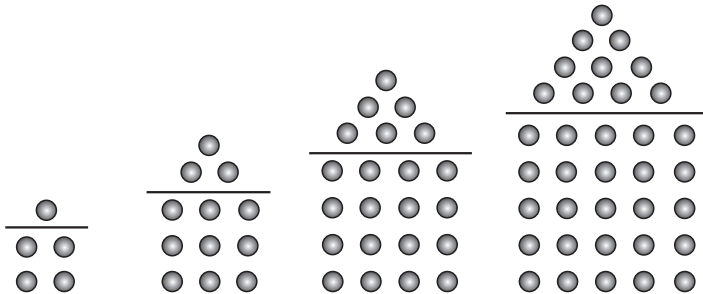
$$3^2 + 4 \dots \dots \dots$$

$$\Rightarrow t_n = n^2 + 4$$

در هر دو قسمت اگر هر جمله دنباله را به صورت مجموع یک عدد مربع کامل با عددی دیگر بنویسیم، جمله عمومی آن را می توانیم راحت تر بیابیم.

ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

$\Rightarrow (4+1), (9+3), (16+6), (25+10), \dots$ (مجموع یک عدد مربعی و یک عدد مثلثی)



$$(1+1)^2 + 1$$

$$(3+1)^2 + 3$$

$$(6+1)^2 + 6$$

$$(10+1)^2 + 10 \Rightarrow t_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (n+1) \left[(n+1) + \frac{n}{2} \right]$$

$$t_n = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

حل تمرین های صفحه ۲۴

۱ از بین دنباله های زیر، دنباله های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت جمله بیست و یکم را بیابید.

الف) $3, 10, 17, 24, \dots$ $t_{21} = t_1 + 20d = 3 + 20(7) = 143$

دنباله حسابی نیست $1, 2, 4, 8, \dots$ (ب)

پ) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$ $t_{21} = t_1 + 20d = \sqrt{3} + 20(\sqrt{3}) = 21\sqrt{3}$

ت) $10, 7, 4, 1, \dots$ $t_{21} = t_1 + 20d = 10 + 20(-3) = -50$

ث) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$ $t_{21} = t_1 + 20d = \frac{2}{5} + 20(\frac{1}{5}) = 4\frac{2}{5}$

ج) $2, 2, 2, 2, \dots$ $t_{21} = 2 \Rightarrow$ دنباله حسابی با قدرنسبت $d = 0$ می‌باشد

۲ در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب 20° و 56° است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

تفاضل

$$\begin{cases} t_3 = 20^\circ \\ t_7 = 56^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 20^\circ \\ t_1 + 6d = 56^\circ \end{cases} \Rightarrow 4d = 36 \rightarrow \boxed{d = 9}, \boxed{t_1 = 2}$$

دنباله $2, 11, \underset{t_3}{20}, 29, 38, 47, \underset{t_7}{56}, 65, \dots$

۳ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

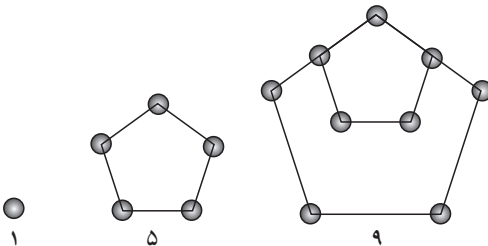
$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 3 \\ t_4 + t_5 + t_6 = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 3 \\ (t_1 + 3d) + (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) = 39 \end{cases}$$

تفاضل

$$\begin{cases} 3t_1 + 3d = 3 \\ 3t_1 + 12d = 39 \end{cases} \Rightarrow 9d = 36 \Rightarrow \boxed{d = 4}, \boxed{t_1 = -3}$$

دنباله: $-3, 1, 5, 9, 13, 17$

۴ الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.
 ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.



پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است؟

الف) $۱, ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, \dots$

دنباله حاصل یک دنباله حسابی است

ب) $t_n = t_1 + (n-1)d = 1 + (n-1)(4) \Rightarrow t_n = 4n - 3$

پ) $t_n = 397 \Rightarrow 4n - 3 = 397 \Rightarrow 4n = 400 \Rightarrow n = 100$

۵ الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

ب) واسطه حسابی بین ۲° و ۳° چه عددی است؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

الف) $t_3 = 11 \Rightarrow \boxed{x}, 11, 5$ دنباله حسابی

$$t_1 + 2d = 11$$

$$5 + 2d = 11 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow x = 8$$

ب) $t_3 = 30 \Rightarrow \boxed{x}, 30, 2$ دنباله حسابی

پ) واسطه حسابی بین دو عدد a و c برابر است با $\frac{a+c}{2}$.

۶ مسئله زیر در پایروس را بنده آمده است. آن را حل کنید.

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و

یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد».

مجموع برابر 100 $\rightarrow 5x = 100 \rightarrow x = 20$

سهم‌ها: $(x-2d), (x-d), x, (x+d), (x+2d)$

$$\frac{1}{3} [x + (x+d) + (x+2d)] = (x-2d) + (x-d) \rightarrow x+d = 2x-3d$$

$$\Rightarrow 4d = x \xrightarrow{x=20} d = 5 \Rightarrow \text{سهم‌ها } 10, 15, 20, 25, 30$$

حل تمرین‌های صفحه ۲۷

۱ از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدرنسبت آنها را بنویسید.

الف) $r = 4$ دنباله هندسی است $۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, \dots$

ب) دنباله هندسی نیست $\Rightarrow \frac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \neq \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

سهم‌ها: $۲\sqrt{5}, ۴\sqrt{5}, ۶\sqrt{5}, ۸\sqrt{5}, \dots$

پ) $r = \frac{-1}{4}$ دنباله هندسی است $۱, \frac{-1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$

ت) $r = 1$ دنباله هندسی است $۵, ۵, ۵, ۵, \dots$

۲ چند دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{4}{5}$ می توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

به هر تعداد دلخواه می توانیم دنباله هندسی با قدرت نسبت $\frac{4}{5}$ بنویسیم. هر عدد حقیقی غیر صفر را می توان به عنوان جمله اول در نظر گرفت به عنوان مثال:

$$1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \frac{64}{125}, \dots$$

$$-1, \frac{-4}{5}, \frac{-16}{25}, \frac{-64}{125}, \dots$$

۳ درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.

(الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

(ب) دنباله ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

(الف) نادرست است؛ به عنوان مثال، دنباله زیر نمونه ای است از دنباله ای که نه حسابی است و نه هندسی.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

(ب) نادرست است؛ به عنوان مثال، دنباله ثابت زیر هم دنباله ای حسابی با قدرنسبت $d=0$ محسوب

می شود و هم دنباله ای هندسی با قدرنسبت $r=1$

$$9, 9, 9, 9, \dots$$

در واقع هر دنباله ثابت غیر صفر، دنباله ای است که هم حسابی و هم هندسی محسوب می شود.

۴ علی دو چرخه ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دو چرخه دست دوم در هر

سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

(الف) اگر او بعد از سه سال قصد فروش دو چرخه اش را داشته باشد، به چه قیمتی می تواند آن را بفروشد؟

(ب) قیمت دو چرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه ای به دست می آید؟

(الف) توجه داریم که چون $t_1 = 500000$ لذا برای یافتن قیمت دو چرخه بعد از گذشت سه سال باید قیمت

دو چرخه در آغاز سال چهارم یعنی t_4 را محاسبه کنیم.

$$t_4 = t_1 r^3 = 500000 \left(\frac{80}{100} \right)^3 = 500000 \left(\frac{64}{125} \right) = 256000$$

(ب) $t_{n+1} = t_1 r^n = 500000 \left(\frac{80}{100} \right)^n$

روش دوم : می توانیم قیمت دوچرخه پس از یک سال را t_1 در نظر بگیریم.

$$t_1 = 400000$$

$$\text{الف) } t_3 = t_1 r^2 = 400000 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 400000 \left(\frac{16}{25}\right) = 256000$$

$$\text{ب) } t_n = t_1 r^{n-1} = 400000 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

۵ حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.

$$2, 4, 8, \dots$$

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{1+2+3+\dots+20} = 2^{\frac{20(20+1)}{2}} = 2^{210}$$

۶ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} t_6 = 96 \\ t_3 = 12 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_6}{t_3} = \frac{96}{12} \Rightarrow \frac{t_1 r^5}{t_1 r^2} = 8 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$t_3 = 12 \Rightarrow t_1 r^2 = 12 \Rightarrow t_1 (2)^2 = 12 \Rightarrow t_1 = 3$$

$$\text{دنباله : } 3, 6, \underset{t_3}{12}, 24, 48, \underset{t_6}{96}, 192, \dots$$

۷ بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جاده ای از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور به همین سرعت کاهش یابند، الف) پیش بینی می شود در هر یک از سال های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم وطن های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

ب) اعداد حاصل، چه دنباله ای تشکیل می دهند؟

حل الف)

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۶۵۸۴	۱۵۷۵۵	۱۴۹۶۷	۱۴۲۱۹	۱۳۵۰۸	۱۲۸۳۲	۱۲۱۹۱

حل ب) دنباله هندسی با قدرنسبت $r = \frac{4}{5}$ است.