فصل ۱

ترسیم هندسی و استدلال

تصویر عنوانی

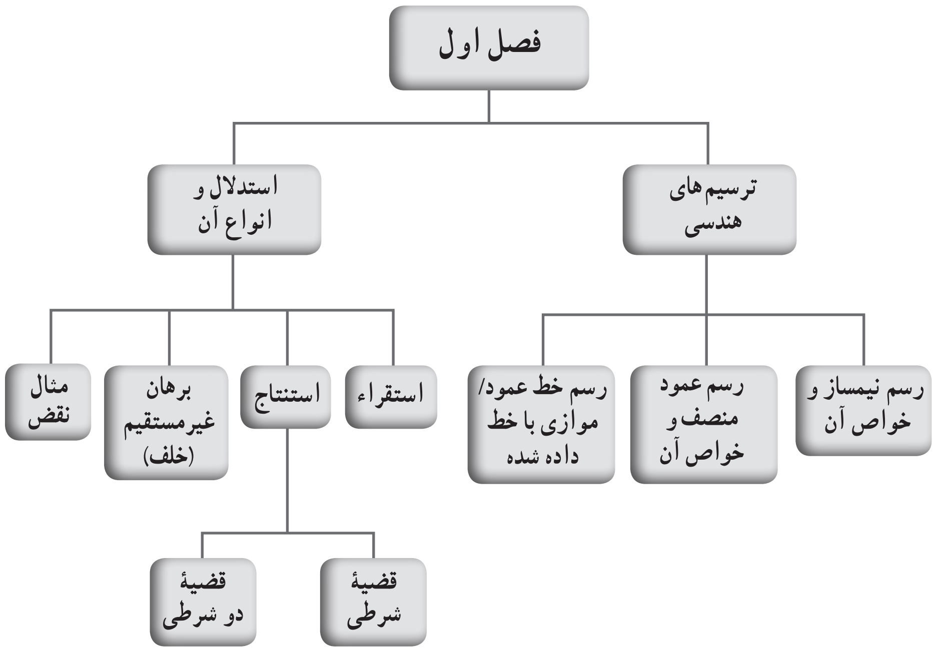
مسئلهٔ تقسیم‌بندی زمین‌های قابل زراعت برای مصارف کشاورزی و گذران زندگی، قدمتی به طول تاریخ بشری دارد.

برخی بر این باورند که شکل‌گیری هندسه به‌طور رسمی به زمانی برمی‌گردد که بر اثر طغیان رود نیل در مصر مرز میان زمین‌های کشاورزی شسته شده و از بین می‌رفت و بازسازی و تقسیم‌بندی مجدد زمین‌ها، مسئله‌ای مناقشه‌برانگیز میان کشاورزان بود.

واژهٔ «هندسه» یا معادل آن «Geometry» که از ترکیب Geo+metry به معنای اندازه‌گیری زمین به‌وجود آمده است، اشاره به این پیدایش تاریخی دارد.

لذا شاید بی‌مناسبت نباشد اگر هندسهٔ دهم با ترسیم‌های هندسی آغاز شده و با روند تاریخی شکل‌گیری این علم، ارتباطی تنگاتنگ یابد.

نقشهٔ مفهومی



نگاه کلی به فصل

ترسیم‌های هندسی بر پایهٔ مفهوم «مکان هندسی» بنا شده است و منظور از آن مجموعه تمام نقاطی از صفحه است که دارای ویژگی مشخصی باشند و هر نقطه از صفحه که دارای آن ویژگی است در مجموعه فوق قرار داشته باشد.

در بخش اول این فصل، بر پایه مفهوم مکان هندسی مجموعه تمام نقاطی که از یک یا دو نقطه و یا یک خط دارای فاصله یکسانی باشند، تعریف شده و این تعاریف، پله نخستین در تعریف نیمساز یک زاویه و عمود منصف یک پاره‌خط و همچنین عکس خاصیت نیمساز و عمود منصف قرار گرفته است.

شروع گام به گام پیشروی با حوصله کتاب درسی در این بخش، زمینه را برای آموزش رسم خط عمود بر یک خط و خط موازی با یک خط فراهم کرده است و با ایجاد فعالیت‌هایی مرحله‌بندی شده مقدمات کشف ویژگی‌های چهارضلعی‌های معروف را توسط دانش‌آموزان در این فصل و ادامه آن در فصل سوم به‌وجود آورده است.

از آنجا که پرداختن به اثبات بدون داشتن درک درستی از روش‌های پذیرفته شده استدلال در ریاضیات و هندسه؛ آموزشی عقیم و نیمه‌کاره است، در بخش دوم این فصل، کتاب درسی با شیب ملایمی به آشناسازی دانش‌آموزان با انواع استدلال و برهان در ریاضی پرداخته و با معرفی مثال نقض به عنوان ابطال‌کننده یک اثبات، پایه‌ای برای آموزش استدلال‌ها در هر کجای هندسه یا ریاضی فراهم آورده است.

درس اول

ترسیم‌های هندسی

اهداف درس اول

۱ آشنایی با روش یافتن مجموعه نقاطی که از یک یا دو نقطه به فاصله مشخصی باشند.
۲ آشنایی با نیمساز یک زاویه به عنوان مجموعه نقاطی که از دو ضلع زاویه به فاصله یکسانی هستند.
۳ مهارت در رسم نیمساز یک زاویه داده شده و درک عکس خاصیت نیمساز
۴ آشنایی با عمودمنصف یک پاره‌خط به عنوان مجموعه نقاطی که از دو سر پاره‌خط به فاصله یکسانی است.
۵ مهارت در رسم عمود منصف یک پاره‌خط دلخواه و و درک عکس خاصیت عمود منصف
۶ روش رسم خطی عمود بر یک خط در نقطه‌ای روی خط یا بیرون خط و تسلط بر آن
۷ روش رسم خطی موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن خط و تسلط بر آن
۸ مهارت در رسم چندضلعی‌ها و یافتن مرکز دایره با داشتن کمانی از دایره

روش تدریس درس اول

پیش از شروع درس مطمئن شوید که تمام دانش‌آموزان ابزار پرگار و خط‌کش به همراه داشته باشند تا از کاسته شدن سرعت تدریس جلوگیری شود.

فعالیت صفحه ۱۰ در سؤال ۱ دایره را به عنوان مجموعه تمام نقاطی که از مرکز دایره به فاصله ثابتی هستند، معرفی می‌کند. برای عمق‌بخشی بیشتر می‌توانید مربعی به مرکز O رسم کنید و این سؤال را مطرح کنید که «چرا پاسخ سؤال۱ این فعالیت، نمی‌تواند این مربع باشد؟»

سؤال۲ پیش‌زمینه‌ای برای آموزش رسم عمود منصف در ادامه این بخش خواهد بود.

سؤال ۳ دو نقطه روی خط d باید به دست آید که این کار با کمان زدن انجام خواهد شد.

حل صحیح این سؤال لازمه اجرای روش رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای بیرون آن خط است.

مقایسه سؤال ۴ با ۲ توسط دانش‌آموزان می‌تواند نتیجه‌ای مفید به همراه داشته باشد. چرا که حاصل انجام هر دو سؤال این فعالیت، خطی عمود بر پاره‌خط ABاست. اما این خط عمود در سؤال ۲، از هر دو طرف پاره‌خط به فاصله یکسان و در سؤال ۴ به یک طرف پاره‌خط نزدیک‌تر است. ادامه پاسخ‌گویی به سؤال ۴، پیش‌زمینه روش رسم مثلثی با داشتن اندازه ۳ ضلع است.

کار در کلاس صفحه ۱۱، مروری بر سؤالات مطرح شده در فعالیت صفحه ۱۰ را دارد. در انجام سؤال ۳ که یک مسئله باز پاسخ (چند جوابی) است، می‌توانید از سطح عددگذاری ساده فراتر رفته و از دانش‌آموزان بخواهید مسئله را به طور جبری و با قرار دادن شرط‌های مناسب برای عبارات جبری، پاسخ دهند. انجام فعالیت پایین صفحه ۱۱، به درک نتیجه «خاصیت نیمساز» می‌رسد و ادامه این فعالیت در صفحه ۱۲ «عکس خاصیت نیمساز» را آموزش می‌دهد. نتیجه دومی که در صفحه ۱۲ قرار دارد، ترکیب خاصیت و عکس خاصیت نیمساز در صورت یک قضیه دو شرطی است. بکوشید این نتیجه با جمله‌بندی صحیح خود دانش‌آموزان تکمیل شود.

فعالیت پایین صفحه ۱۲ روش رسم نیمساز را آموزش می‌دهد. می‌توانید بعد از انجام مرحله به مرحله این فعالیت از یک یا چند دانش‌آموز بخواهید تا روش رسم نیمساز یک زاویه را به طور کلی برای کل کلاس توضیح دهند و جمع‌بندی کنند. برای توسعه این فعالیت می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید تا دهانه پرگار را به قدری باز کنندکه کمان‌های رسم شده با مرکز A و B، یکدیگر را پشت زاویه O قطع کنند و سپس از رأس زاویه و نقطه به وجود آمده خطی بگذرانند و بررسی کنند که آیا باز هم نیمساز زاویه O خواهد بود یا نه و دلیلش را ذکر کنند.

در انجام فعالیت صفحه ۱۳ سؤال ۱ خاصیت عمود منصف را آموزش می‌دهد. می‌توانید قبل از استدلال رسمی، از دانش‌آموزان بخواهید نقطه W را روی عمودمنصف بالا و پایین ببرند و با خط‌کش فاصله آن تا دو سر A و B را اندازه بگیرند.

سؤال ۲ این فعالیت، عکس خاصیت عمود منصف را بیان خواهد کرد و نتیجه ۲ آن را در قالب یک جمله شسته رفته ارائه می‌دهد.

نتیجه‌ای که بعد از این دو نتیجه آمده ترکیب خاصیت عمودمنصف و عکس خاصیت عمود منصف در قالب یک قضیه دو شرطی است.

فعالیت پایین صفحه ۱۳ با رسیدن به این نتیجه که برای مشخص کردن یک خط داشتن ۲ نقطه از آن لازم است، ضرورت داشتن دو نقطه برای رسم عمود منصف یک پاره‌خط را در فعالیت صفحه ۱۴ فراهم می‌کند.

فعالیت بالای صفحه ۱۴ روش رسم عمود منصف پاره‌خط AB را بیان می‌کند. بهتر است کار در کلاسی که بعد از آن آمده است را ابتدا دانش‌آموزان به صورت تک نفری یا در گروه‌های ۳-۴ نفره پاسخ

دهند و سپس از هر گروه یک نماینده، نظر گروه را بیان کرده و در نهایت شما با کمک دانش‌آموزان بر روی نظر کامل‌تر و صحیح‌تر توافق کنید.

کار در کلاس انتهای این صفحه می‌تواند مشابه کار در کلاس قبلی اجرا و حل شود. در فعالیت بالای صفحه ۱۵، برای پاسخ‌گویی به سؤال ۱ می‌توانید نگاهی به سؤال ۳ فعالیت صفحه ۱۰ داشته باشید و یادآوری صورت گیرد.

اجرای دقیق مراحل رسم کمان‌ها، لازمه پاسخ‌گویی صحیح به این فعالیت است. کار در کلاسِ پس از آن، می‌تواند در قالب یک کار گروهی یا انفرادی انجام شود و پس از آن توافق کلی صورت پذیرد.

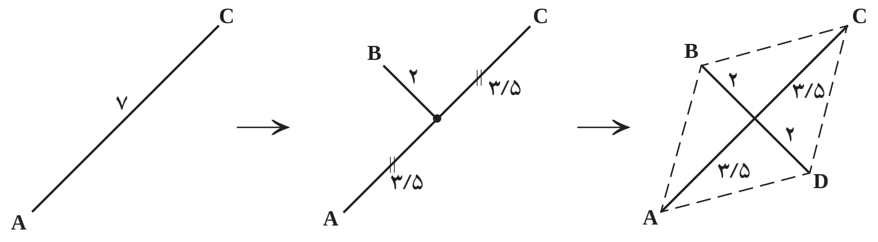
فعالیت وسط صفحه ۱۵، با هدف آموزش رسم خطی موازی با خط d طراحی شده است و روش آن، استفاده از دو عمود متوالی می‌باشد. با توجه به وقت‌گیر بودن این فعالیت، زمان مناسب برای اجرای آن در کلاس را در نظر داشته باشید. کار در کلاس پس از آن می‌تواند با توجه به آنکه دانش‌آموزان روش رسم خطی عمود بر یک خط از نقطه‌ای داده شده روی آن را قبلاً یاد گرفته‌اند به صورت خلاصه‌تر و با پرهیز از بیان جزئیات، حل شود.

فعالیت پایین صفحه ۱۵ که در صفحه ۱۶ نیز ادامه می‌یابد، ترکیبی از مهارت‌های آموخته شده توسط دانش‌آموزان در این فصل را به کار می‌گیرد تا روش رسم مربعی با قطر داده شده را آموزش دهد.

کار در کلاس انتهایی این فصل، با حل گروهی یا انفرادی در کلاس قابل انجام است.

حل تمرین‌های صفحه ۱۶

۱ ابتدا پاره‌خط AC به طول ۷cm را رسم می‌کنیم. سپس از وسط AC و در راستایی غیر از راستای AC، به اندازه ۲cm پاره‌خطی رسم می‌کنیم تا نقطهٔ B به‌دست آید. پاره‌خط رسم شده را از سمت دیگر به اندازه ۲cm امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D به دست آید و شکل کامل شود.



۳ متوازی‌الاضلاع است. زیرا رأس D روی کمانی به مرکز A و شعاع a واقع شده است. پس AD=a و رأس C روی کمانی به مرکز B و شعاع a واقع شده است. پس BC=a همچنین رأس D روی کمانی به مرکز B واقع شده است. پس BD=b و رأس C روی کمانی به مرکز A و شعاع b واقع شده است پس AC=b و چون AD=BC=a و AC=BD=b یعنی اضلاع روبه‌رو دو به دو مساوی‌اند.

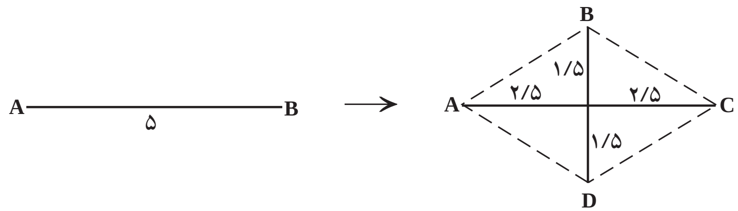
بنابراین داریم :

$$\left.\begin{array}{ll} & BD = AC = b \\ & AD = BC = a \\ \text{مشترک} & AB = AB \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ABC}$$

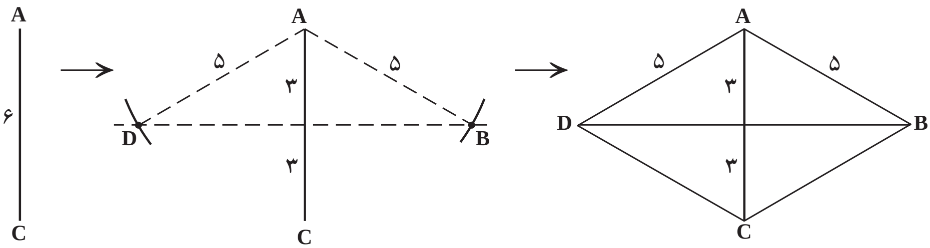
تساوی اجزای متناظر $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$

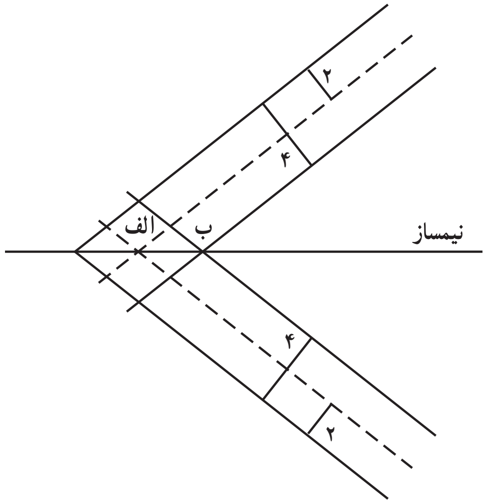
چون $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ ، طبق عکس قضیه خطوط موازی و مورب BD||AC و به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که AD||BC. پس شکل متوازی‌الاضلاع است.

۴ الف) پاره‌خط AC به طول ۵cm را رسم می‌کنیم و از وسط AC و عمود بر آن، به اندازه ۱/۵ cm در دو طرف امتداد می‌دهیم تا نقاط B، D به دست آمده و شکل کامل شود.



ب) ابتدا پاره‌خط AC به طول ۶cm را رسم می‌کنیم. بر وسط AC خط دلخواهی، عمود می‌کنیم. (عمود منصف AC را رسم می‌کنیم) از نقطه A (یا C) به اندازه ۵cm کمان می‌زنیم تا عمود منصف AC را در دو نقطه B و D قطع کند و شکل کامل شود.





۶ الف) خطوطی به موازات دو ضلع زاویه و به فاصله ۲cm از آنها رسم می‌کنیم. محل تقاطع آنها پاسخ مسئله است.

ب) خطوطی به موازات دو ضلع زاویه و به فاصله ۴cm از آنها رسم می‌کنیم. محل تقاطع آنها پاسخ مسئله است.

پ) خطی از دو نقطه به دست آمده در قسمت (الف) و (ب) می‌گذرد. زاویه را نصف می‌کند.

۷ AB وتر دایره است. بنابراین A و B روی محیط دایره‌اند. پس فاصله آنها تا مرکز دایره یعنی OA و OB یکسان است. طبق عکس خاصیت عمود منصف، چون O از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است، پس روی عمود منصف AB واقع شده است.

۸ دو وتر در قوس جلوی محوطه هجده قدم رسم می‌کند و عمود منصف آن دو وتر را ترسیم می‌نماید. محل برخورد دو عمود منصف، مرکز دایره و همان نقطه پنالتی است.

درس دوم

استدلال

اهداف درس دوم

۱ درک اهمیت استدلال و آشنایی با برخی از انواع استدلال‌ها
۲ آشنایی با استدلال استقرایی (صرفاً به منظور حدسیه سازی)
۳ مهارت در استدلال استنتاجی با بررسی اثبات چندین قضیه هندسی شرطی و دوشرطی
۴ آشنایی با گزاره، نقیض گزاره، گزاره شرطی، قضیه‌های شرطی و دو شرطی، عکس قضیه
۵ مهارت در برهان غیرمستقیم (برهان خلف) و مثال نقض با بررسی چندین قضیه و مثال

روش تدریس درس دوم

پیش از ورود به تدریس، درباره اهمیت استدلال در زندگی و قضاوت عادلانه با دانش‌آموزان سخن بگویید و ریاضیات و هندسه را به عنوان علمی بنا شده بر پایه استدلال و منطق، به آنها معرفی کنید.

معرفی استدلال استقرایی در صفحه ۱۸ با یادآوری آموخته‌ها در سال‌های گذشته و مرور آنها،انجام شده است. از آنجا که استدلال استقرایی در علوم انسانی و تجربی(مانند پزشکی) کاربرد داشته و بهره‌گیری از آن در ریاضیات صرفاً به منظور حدسیه‌سازی می‌باشد. می‌توانید چندین مثال پذیرفته شده و صحیح را در کلاس مطرح کنید تا روند شکل‌گیری یک «حدس» در ریاضیات برای دانش‌آموزان آشکار شود. مثلاً :

ــ علی با اندازه‌گیری زوایای درونی مثلث و محاسبه مجموع آنها در ۱۰ مثلث به این نتیجه (حدس) رسید که مجموع زوایای درونی هر مثلث (ممکن است) 180° باشد.

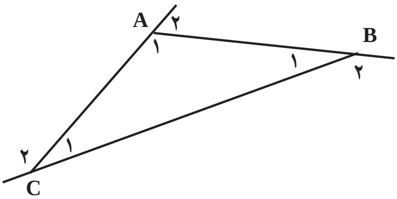
ــ مریم با یافتن نقطه همرسی عمود منصف‌ها در ۱۵ مثلث به این نتیجه (حدس) رسید که نقطه همرسی عمود منصف‌ها (ممکن است) داخل، خارج یا روی مثلث واقع شود.

در ادامه صفحه ۱۸ معرفی استدلال استنتاجی انجام شده است.

به عنوان مثال بیشتر در استدلال استنتاجی نمادین می‌توانید از نمونه زیر استفاده کنید.

قضیه : مجموع زوایای خارجی هر مثلث 360° است.

اثبات :



$$\underbrace{\hat{A}_1+\hat{A}_2}_{180^\circ}+\underbrace{\hat{B}_1+\hat{B}_2}_{180^\circ}+\underbrace{\hat{C}_1+\hat{C}_2}_{180^\circ}=3\times180^\circ=540^\circ$$

$$\underbrace{\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{C}_1}_{\text{مجموع زوایای درونی}=180^\circ}+\underbrace{\hat{A}_2+\hat{B}_2+\hat{C}_2}_{?}=540^\circ$$

$$\hat{A}_2+\hat{B}_2+\hat{C}=540^\circ-180^\circ=360^\circ$$

فعالیت صفحه ۱۹، شامل دو نوع استدلال برای اثبات یک قضیه است.

استدلال پژمان که با بررسی تعدادی چهارضلعی حکم کلی صادر کرده است، از نوع استقرایی و البته غیرقابل تعمیم برای هر چهار ضلعی و لذا غیر قابل اعتماد است.

اما استدلال پیمان از نوع استنتاجی و قابل تعمیم برای هر چهار ضلعی دلخواه است.

مثال پایین صفحه ۱۹ نیازمند درک کامل خاصیت عمود منصف و عکس خاصیت عمود منصف در درس اول همین فصل است. در این مثال، دانش‌آموزان با استدلال استنتاجی همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث دلخواه را ثابت می‌کنند.

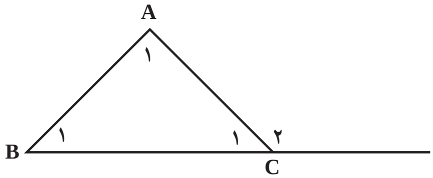
مثال وسط صفحه ۲۰، همرسی ارتفاع‌ها در هر مثلث دلخواه را با کمک تبدیل ارتفاع‌ها به عمود منصف اضلاع مثلث بزرگ‌تری که اضلاع آن دو برابر اضلاع مثلث اولیه است، ثابت می‌کند.

مثال پایین همین صفحه که ادامه آن در صفحه ۲۱ می‌باشد با استفاده از پیش‌دانسته‌های دانش‌آموزان در موضوع خاصیت نیمساز و عکس خاصیت نیمساز، همرسی نیمسازها در هر مثلث دلخواه را ثابت می‌کند.

در هر سه مثال گفته شده، نتیجه به دست‌آمده برای سایر مباحث هندسی دارای اهمیت است. بکوشید این اهمیت را به دانش‌آموزان گوشزد کنید.

فعالیت صفحه ۲۱ همان‌طور که قبلاً اشاره شد استدلال استقرایی را به منظور حدسیه‌سازی به کار برده است و به طرح قضیه‌ای پرداخته که در غالب کتب غیررسمی هندسه به قضیه «ضلع برتر ــ زاویه برتر» معروف است. توجه داریم که عکس این قضیه نیز برقرار می‌باشد. دانش‌آموزان با جداسازی مفروضات و حکم قضیه از میان نوشتار مسئله، در صفحه ۲۲ به اثبات آن می‌پردازند.

دو پیش‌دانسته لازم برای اثبات این قضیه در صفحه ۲۲ آمده است. اولین پیش‌دانسته در مورد مثلث متساوی‌الساقین برای اکثر دانش‌آموزان بدیهی است. دومین پیش‌دانسته می‌تواند به صورت زیر اثبات و



یادآوری گردد :

$C_2=A_1+B_1$

و می‌دانیم اندازه زوایای A_1 و B_1 هر دو عددی مثبت است.

و می‌دانیم اگر از یک طرف تساوی عدد مثبتی را برداریم، آن طرف، کوچک‌تر از طرف دیگر خواهد شد، بنابراین :

$$C_2 = A_1 + B_1 \xrightarrow{A_1>0} C_2 > B_1$$
$$C_2 = A_1 + B_1 \xrightarrow{B_1>0} C_2 > A_1$$

و اثبات تمام است.

روند اثبات در صفحه ۲۲ به این پرسش ختم می‌شود که «چرا می‌توان این موضوع را درباره تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟» پاسخ‌گویی به این پرسش نیازمند توجه دادن دانش‌آموزان به جمله‌ای است که در صفحه قبل، پیش از آغاز استدلال نمادین آورده شده است : «مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.»

توجه به این نکته که در استدلال‌های استنتاجی، اشکال هندسی صرفاً ویژگی بیان شده در مسئله را داشته و غیر از آن ویژگی اضافی دیگری بر آنها تحمیل نشده باشد، جان‌مایه قابلیت تعمیم‌یافتن استدلال‌های استنتاجی می‌باشد.

ذیل همین اثبات کلمه «قضیه» برای اولین بار مطرح می‌شود. بکوشید استفاده مکرر از این واژه، آن را برای دانش‌آموزان کلاس، مأنوس کند.

پاراگراف انتهای صفحه ۲۲ روند شکل‌گیری یک استدلال ریاضی را بیان می‌کند و الگوریتم مهمّی برای سایر نمونه‌های بعدی می‌باشد.

صفحه ۲۳ با تعریف «عکس یک قضیه» و ارائه چند مثال، درس را ادامه می‌دهد.

صرف وقت در این موضوع برای رسیدن به تسلط حداکثری در کلاس حائز اهمیت است. لازم است دانش‌آموزان بتوانند فرض و حکم مسئله را یافته و با جابه‌جایی آنها، عکس قضیه را به وجود آورند. ضمناً عکس قضیه ۱ در صفحه ۲۵ با برهان غیرمستقیم اثبات خواهد شد. صفحه ۲۴ با معرفی گزاره به عنوان «صرفاً و فقط یک جمله خبری» آغاز می‌شود که می‌تواند خبری درست یا نادرست را بدهد. اگرچه تشخیص درستی یا نادرستی آن برای خواننده ممکن نباشد. مثلاً : «در مریخ موجود زنده وجود دارد.»

گزاره مرکب از ترکیب دو یا چند گزاره ساده به وجود می‌آید.

نقیض یک گزاره از نظر درستی یا نادرستی دقیقاً مخالف با گزاره اصلی است. درنگ لازم در این قسمت برای کسب مهارت کافی، الزامی است. نمونه مناسبی که می‌توانید برای تفهیم بیشتر به کار ببرید

گزاره زیر است :

$a \leq \circ \Rightarrow a \not> \circ$: نقیض گزاره $\rightarrow a > \circ$: گزاره

بعضی گزاره‌ها به جای آنکه خبری را به طور مستقیم بیان کنند آن را وابسته به یک شرط می‌کنند که گزاره‌های شرطی نام دارند. مثال‌های بیشتر برای گزاره شرطی (که ممکن است درست یا نادرست باشند) در زیر آمده است.

- اگر $a > \circ$ آنگاه $۲a > \circ$ (درست)
- اگر $a < b$ آنگاه $a^۲ < b^۲$ (نادرست)
- اگر $a < \circ$ آنگاه $a+۱ < ۱$ (درست)

استدلال غیر مستقیم یا برهان خلف، نوعی از استدلال است که با فرض نادرست بودن حکم آغاز می‌شود و به تناقض با یکی از فرض‌های مسئله یا حقایق دانسته شده ریاضی می‌رسد. دانش‌آموزان در سال‌های آینده به این نوع استدلال، نیاز خواهند داشت. مثال‌هایی که در این قسمت مطرح شده است هر دو مورد تناقض را پوشش داده است. مثال اول به تناقض با این حقیقت که «مجموع زوایای درونی هر مثلث ۱۸۰° است» می‌رسد و مثال دوم به تناقض با یکی از مفروضات قضیه می‌رسد.

پیشنهاد می‌شود بعد از پایان اثبات قضیه ۱، دانش‌آموزان برای یک بار هم که شده قضیه ۱ و عکس قضیه۱ و اثبات آنها را در کنار هم دیده و مرور کنند.

صفحه ۲۶ را می‌توان جمع‌بندی یک قضیه شرطی و عکس آن، در قالب «قضیه دو شرطی» دانست. قضیه‌های دو شرطی با نماد «$\leftrightarrow$» نوشته شده و اصطلاح‌های «اگر و تنها اگر» یا «اگر و فقط اگر» برای بیان کلامی آن استفاده می‌شود.

نمونه‌هایی از قضایای دوشرطی به صورت زیر است :

- $a > b \leftrightarrow a+۲ > b+۲$
- $a > \circ \leftrightarrow a^۳ > \circ$
- $\circ < a < b \leftrightarrow -b < -a < \circ$

مثال گفته شده در پایان این قسمت را می‌توانید از طریق برابری مساحت مثلث در هر دو حالت اثبات کنید. برای این کار یک بار مساحت مثلث را از طریق نصف حاصل‌ضرب ارتفاع اولی در ضلع اولی بیابید و بار دیگر از طریق نصف حاصل‌ضرب ارتفاع دومی در ضلع دومی. با توجه به برابری مساحت در هر دو حالت و ایجاد یک تساوی بین دو رابطه، حکم نتیجه خواهد شد.

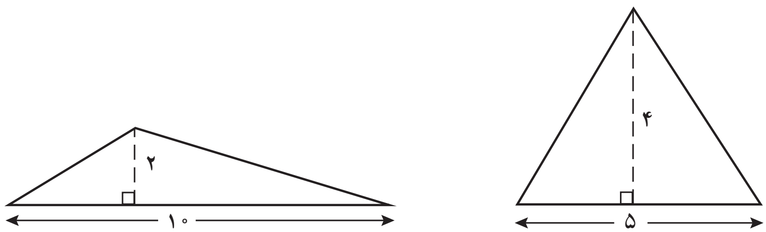
مثال نقض، مثالی است که یک حکم کلی را باطل می‌کند. گاهی اوقات مثال نقض نشان می‌دهد حدسیه‌ای که از طریق استدلال استقرایی به آن رسیده‌ایم نادرست و دارای نمونه‌ای است که در آن حدس کلی صدق نمی‌کند.

حتماً دانش‌آموزان را به این نکته توجه دهید که اگر برای یک حدس یا حکم کلی نتوانستیم مثال نقض بیاوریم دلیل بر درستی آن حدس نیست. ممکن است تلاش بیشتر، ما را به مثال نقض برساند. ضمن آنکه برای اثبات حکم کلی نیازمند استدلال استنتاجی هستیم.

کار در کلاس صفحه ۲۷ با ارائه چند مثال نقض قابل حل است.

سؤال ۱ بدیهی است. برای سؤال ۲، مورد (الف) می‌توانید دو مجموعه نامساوی را مثال بزنید؛ مثلاً A={۱,۲,۳}، B={۳,۴,۵}

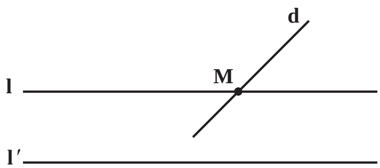
برای مورد (ب) می‌توانید مثلث‌های زیر را در نظر بگیرید :



در هر دو مثلث، مساحت برابر ۱۰ می‌باشد اما واضح است که همنهشت نیستند.

حل تمرین‌های صفحه ۲۷

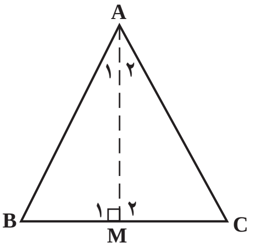
۱ فرض کنیم خط d و دو خط موازی l و ´l را داریم، به طوری که خط d خط l را قطع کرده است. می‌خواهیم ثابت کنیم خط d خط ´l را نیز قطع می‌کند.



با برهان خلف، فرض می‌کنیم خط d خط ´l را قطع نکند. محل تقاطع خطوط d و l را M می‌نامیم. می‌بینیم از نقطه M دو خط d و l عبور کرده‌اند که ´l را قطع نکرده‌اند. یعنی هر دو خط d و l به موازات ´l از نقطه M رسم شده‌اند که این تناقض می‌باشد.

لذا فرض خلف باطل است و حکم ثابت است.

۲ فرض خلف را $\hat{B} = \hat{C}$ در نظر می‌گیریم. اگر نیمساز زاویه A را رسم کنیم $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ می‌باشد. لذا در دو مثلث AMB و AMC خواهیم داشت :



$$\left.\begin{array}{l} A_1 + B + M_1 = 180^\circ \\ A_2 + C + M_2 = 180^\circ \\ A_1 = A_2 \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

اکنون با دانستن اینکه $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ است داریم :

$$\left.\begin{array}{rl} : & \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ \text{AM نیمساز است} : & \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \text{مشترک} : & AM = AM \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{AMB} \cong \overset{\Delta}{AMC} \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزاء}} AB=AC$$

که با فرض مسئله که $AB \neq AC$ در تناقض است و لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۳ الف) نادرست : مثلث قائم‌الزاویه با زوایای 90° و 70° و 20° را در نظر بگیرید.

ب) نادرست : در مثلث قائم‌الزاویه ، از میان ۳ ارتفاع، دو تا از آنها با دو ضلع مثلث برابرند.

۴ هر n ضلعی را با رسم قطرهایش از یکی از رأس‌ها، می‌توان به $n-2$ مثلث تقسیم کرد. چون مجموع زوایای درونی هر مثلث نیز 180° می‌باشد. مجموع زوایای درونی هر n ضلعی، $(n-2)\times 180^\circ$ خواهد شد.

۵ الف) وجود دارد لوزی که مربع نیست.

ب) هر مستطیل یک مربع است.

پ) وجود دارد مثلثی که بیش از یک زاویه قائمه دارد.

ت) چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.

۶ الف) در هر مثلث اگر دو زاویه برابر باشند، دو ضلع روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

$\longleftarrow$ در هر مثلث، دو زاویه با هم برابر است اگر و تنها اگر دو ضلع روبه‌رو به آنها با هم برابر باشند.

ب) اگر یک چهارضلعی، قطرهایش عمود منصف یکدیگر باشند، لوزی است.

$\longleftarrow$ یک چهارضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهایش عمود منصف یکدیگر باشد.

پ) در هر مثلث اگر سه زاویه با هم برابر باشد، آنگاه سه ضلع نیز با هم برابرند.

$\longleftarrow$ در هر مثلث، سه زاویه باهم برابرند اگر و تنها اگر سه ضلع با هم برابر باشند.

ت) اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند، آنگاه شعاع‌های برابر نیز دارند.

$\longleftarrow$ دو دایره، مساحت‌های برابر دارند اگر و تنها اگر شعاع‌های برابر داشته باشند.

فصل ۲

قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

توصیه‌های آموزشی

❑ در برخی از کتاب‌های هندسه یک پاره‌خط را به صورت $\overline{AB}$ و طول آن را به صورت $|AB|$ نمایش می‌دهند. ولی در کتاب هندسهٔ ۱، هم خود پاره‌خط و هم طول آن (برای سادگی کار) به‌صورت AB نمایش داده می‌شوند. در صورت احساس نیاز، معلم می‌تواند اشارهٔ کوتاهی به این موضوع در کلاس نماید.

❑ حتی‌الامکان از گچ یا ماژیک‌های رنگی برای ترسیم شکل‌ها استفاده شود.

❑ مطابق روندی که در کتاب هندسه پیش گرفته شده است، برای تعریف یک موضوع (مثلاً واسطهٔ هندسی) یا بیان برخی از قضایا (مثلاً قضیهٔ تالس یا تعمیم آن) توصیه می‌شود ابتدا طرحی از آن تعریف یا اثبات قضیه، به کمک مطالبی که در درس‌های قبلی فراگرفته شده، بیان شود و سپس آن تعریف یا قضیه به‌طور رسمی بیان و اثبات شوند. این روش باعث می‌شود که دانش‌آموز آن تعریف یا قضیه را راحت‌تر بپذیرد و ابهت و سختی که ممکن است به واسطهٔ اسم آن تعریف یا قضیه برای دانش‌آموز پیش بیاید، کم‌رنگ شود.

❑ اگر شروع یک درس با بیان یک سؤال کاربردی ملموس از آن درس باشد تا احساس نیاز به دانستن مطالب جدید را در دانش‌آموز احیا کند، بسیار مثمرثمر خواهد بود. به‌عنوان مثال برای شروع این فصل می‌توان مسئله محاسبهٔ ارتفاع یک درخت با کمک یک میلهٔ یک متری در یک روز آفتابی را بیان کرد. جواب دادن به این سؤال با ابزار موجود، در دانش‌آموز برای فراگیری مطالب و جواب دادن به این سؤال ایجاد انگیزه می‌کند.

نگاه کلی به فصل

❑ هدف اصلی این فصل آموزش قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها می‌باشد.

چون قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها مستلزم آشنایی با نسبت‌ها و تناسب می‌باشد، درس اول این فصل به آموزش تناسب و ویژگی‌های آن اختصاص یافته است تا دانش‌آموز مقدمات مواجهه با قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها را فرا گرفته باشد. در همین راستا سعی شده است تناسب‌ها در مثلث‌های خاص مثلاً مثلث‌هایی که در یک رأس مشترک هستند و قاعدهٔ مقابل به رأس مشترک آنها روی یک خط راست قرار گرفته، بیان شوند. پس از فراگیری تناسب، در درس دوم قضیهٔ تالس بیان می‌شود و فعالیت‌ها و تمرین‌هایی برای درک بهتر قضیهٔ تالس ارائه می‌شود سپس تعمیم و عکس قضیهٔ تالس بیان و اثبات می‌گردد.

❑ درس سوم اختصاص به تشابه مثلث‌ها دارد. بعد از تعریف تشابه در مثلث، قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها و حالت‌های تشابه دو مثلث در قالب سه قضیهٔ متوالی بیان شده است.در بخش انتهایی درس سوم اثبات قضیهٔ فیثاغورث به کمک تشابه مثلث‌ها آورده شده است. در اثبات تشابه دو مثلث در بسیاری از موارد

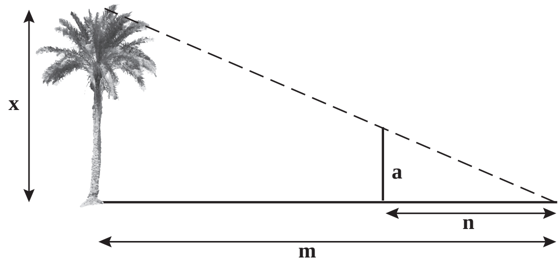
قضیهٔ تالس هم استفاده می‌شود. بنابراین درس دوم این فصل را می‌توان به نوعی پیش‌نیاز درس سوم دانست. پس از فراگیری قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها، در درس چهارم کاربردهایی از این دو موضوع بیان می‌گردد.

ابتدا به کمک قضیهٔ تالس ثابت می‌شود که نیمساز هر زاویهٔ داخلی مثلث ضلع روبه‌روی آن زاویه را به نسبت اندازه‌های اضلاع آن زاویه تقسیم می‌کند. سپس به‌عنوان کاربردی از تشابه مثلث‌ها، نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه بحث می‌شود.

نقشهٔ مفهومی

تصویر عنوانی

در تصویر ابتدای فصل دوم درختی با ارتفاع زیاد نمایش داده شده است که محاسبهٔ ارتفاع آن به‌طور مستقیم امکان‌پذیر نیست. برای محاسبهٔ ارتفاع آن از سایهٔ آن و یک میله با طول مشخص استفاده شده است. بدین صورت که میله روی سایهٔ درخت در ناحیه‌ای قرار داده شده است که انتهای سایهٔ میله و درخت یکسان باشند. با اندازه‌گیری فاصلهٔ انتهای سایه‌ها از میله و درخت و استفاده از قضیهٔ تالس، ارتفاع درخت محاسبه می‌شود.



$$\frac{n}{m} = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{ma}{n}$$

دانستنی‌هایی برای معلم

تالس (Thales) فیلسوف و دانشمند یونانی بود که حدود ۲۶۰۰ سال پیش در شهر میلیتوس یونان (غرب ترکیهٔ امروزی) به دنیا آمد. تالس هم‌عصر کوروش کبیر بوده است. او را به‌عنوان آغازگر فلسفه و علم می‌دانند.

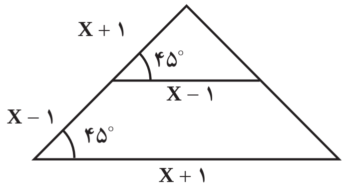
تالس اخترشناس قابلی نیز بوده و توانست خورشیدگرفتگی سال ۵۸۵ قبل از میلاد را پیش‌بینی کند. او توانست با قضیهٔ تالس ارتفاع اهرام مصر را نیز اندازه‌گیری کند. قضایای زیر را به تالس نسبت می‌دهند:

- ❑ قطر دایره آن را نصف می‌کند.
- ❑ زوایای مجاور قاعده در مثلث متساوی‌الساقین برابراند.
- ❑ زوایای متقابل به رأس برابراند.
- ❑ زاویه‌ای که در نیم‌دایره محاط شود، قائمه است.
- ❑ اگر اندازهٔ یک قاعده و زوایای آن داده شده باشند می‌توان مثلث را رسم کرد.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ اگر $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۵}$ باشد حاصل $\frac{۲b-۵}{۲a-۳}$ را به کمک ویژگی‌های تناسب بیابید.

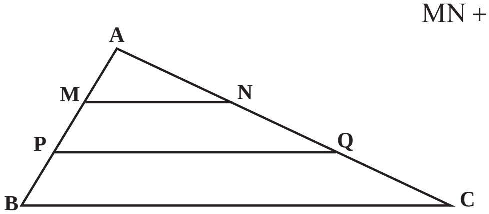
۲ در شکل مقابل مقدار x را بیابید.



۳ نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر ۹ می‌باشد. نسبت محیط مثلث کوچک‌تر به محیط مثلث بزرگ‌تر چقدر است؟

۴ در شکل زیر AM=MP=PB و AN = NQ = QC

ثابت کنید MN + PQ = BC



۵ میانگین هندسی دو عدد برابر ۷ می‌باشد. حاصل‌ضرب آنها چقدر است؟

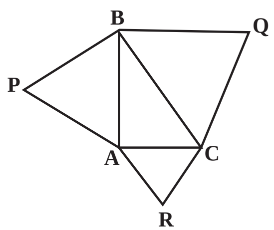
۶ در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر ایجاد می‌کند ۳/۶ و ۶/۴ است. محیط این مثلث را بیابید.

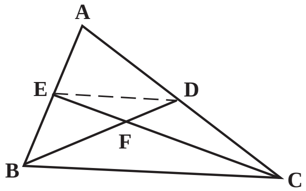
۷ مثلثی به طول اضلاع ۳ و ۵ و ۷ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و x و y متشابه است. اگر $۵ < y$ و x باشند حاصل x+ y را بیابید.

۸ در یک مثلث قائم‌الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث اصلی چند برابر مساحت مثلث جدید است؟

۹ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر بگیرید. اگر سه مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع‌های مثلث ABC مطابق شکل روبه‌رو در نظر بگیریم ثابت کنید :

$$S_{QBC} = S_{PAB} + S_{RAC}$$





۱۰ در شکل روبه‌رو BD و CE دو میانهٔ مثلث هستند. نسبت مساحت مثلث FBC به FED را بیابید.

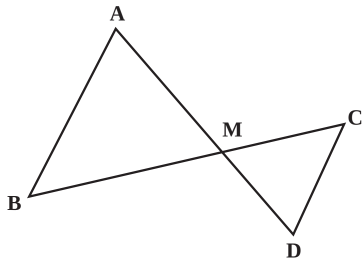
۱۱ اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه برابر ۱۵ و ۸ می‌باشد. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۲۵ باشد مساحت مثلث کوچک‌تر چقدر است؟

۱۲ وسط اضلاع روبه‌رو در یک چهارضلعی دلخواه را به هم وصل می‌کنیم. ثابت کنید این دو پاره‌خط همدیگر را نصف می‌کنند.

۱۳ زاویه‌های خارجی مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب‌اند، اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ داخلی مثلث چقدر است؟

۱۴ در دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ داریم $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = ۲$. اگر AM و $A'M'$ به ترتیب میانه‌های رأس A و A' باشند، نسبت $\frac{S_{ABM}}{S_{A'C'M'}}$ چقدر است؟

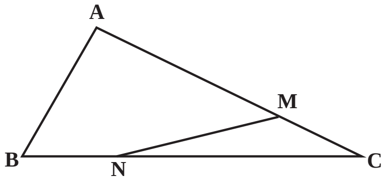
۱۵ در دو مثلث متشابه نسبت بین دو ارتفاع متناظر برابر $\frac{۱}{۴}$ است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر ۵ باشد مساحت مثلث بزرگ‌تر چقدر است؟



۱۶ در شکل روبه‌رو $AB \| CD$ و $\frac{AM}{AD} = $ ، نسبت مساحت مثلث AMB به مثلث CMD چقدر است؟

۱۷ مثلثی با طول اضلاع ۴ و ۶ و $۲\sqrt{۳}$ و مثلث دیگری با طول اضلاع ۹ و $۳\sqrt{۳}$ و ۶ مفروض‌اند. نسبت مساحت مثلث کوچک‌تر به مثلث بزرگ‌تر چقدر است؟

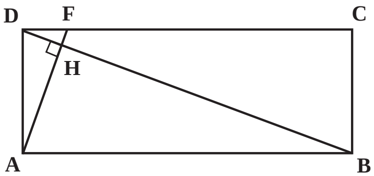
۱۸ یک مثلث را به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم کرده‌ایم، محیط مثلث اولیه چند برابر محیط یکی از مثلث‌های هم‌نهشت می‌باشد؟



۱۹ در شکل مقابل $\frac{CM}{MA}=\frac{BN}{NC}=\frac{۱}{۳}$. نسبت مساحت مثلث ABC به مساحت چهارضلعی AMNB چقدر است؟

۲۰ در مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۲ یک مربع محاط کرده‌ایم. طول ضلع مربع چقدر است؟

۲۱ چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. F نقطه‌ای از ضلع DC است که $AF\perp DB$. اگر AB=۳DA باشد آن گاه DC چند برابر DF است؟



درس اول

نسبت و تناسب در هندسه

اهداف درس اول

۱ درک دقیق و روشن تناسب و ویژگی‌های آن.
۲ فراگیری رابطه بین نسبت طول دو ضلع از مثلث با نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع.
۳ توانایی یافتن نسبت مساحت‌های دو مثلث که دارای یک ارتفاع مساوی هستند.
۴ توانایی تعیین نسبت‌های مساحت‌های دو مثلث که در یک رأس مشترک باشند و قاعدهٔ مقابل آن رأس مشترک در هر دو مثلث روی یک خط مشترک واقع باشند.
۵ درک تساوی مساحت دو مثلث که دارای یک قاعدهٔ مشترک هستند و رأس مقابل به این قاعده در هر دو مثلث، روی خطی موازی قاعدهٔ مشترک واقع باشد.
۶ تعریف واسطهٔ هندسی و توانایی محاسبهٔ آن.

روش تدریس درس اول

❑ هدف فعالیت ۱ این درس بیان کاربردی تناسب می باشد تا دانش‌آموز به اهمیت تناسب در مسائل ریاضی پی ببرد.

❑ در فعالیت ۲ و کار در کلاس‌های صفحهٔ ۳۱ و ۳۲ حالت خاصی از فعالیت ۱ در نظر گرفته شده است که منجر به نتایج جالبی (نتیجهٔ ۱و ۲ و ۳) شده است.

❑ در فعالیت ۲ و کار در کلاس‌های صفحهٔ ۳۱ و ۳۲ نسبت مساحت مثلث‌هایی که ارتفاع‌های یکسان دارند در حالت‌های مختلف به‌دست آمده است.

❑ در فعالیت ۲ وقتی ارتفاع‌ها مساوی‌اند نسبت مساحت‌ها به‌دست آمده است و در کار در کلاس صفحهٔ ۳۱ وقتی ارتفاع‌ها مشترک هستند نسبت مساحت‌ها به‌دست آمده است.

❑ در کار در کلاس صفحهٔ ۳۲ وقتی ارتفاع‌ها مساوی‌اند و قاعده‌ای که ارتفاع‌ها بر آن وارد شده‌اند مشترک هستند نسبت مساحت‌ها به‌دست آمده است.

❑ حال که تناسب تعریف شده است و اهمیت آن در مسائل ریاضی و هندسه مشخص گردیده است لازم است، دانش‌آموزان مهارت محاسبات با تناسب را فراگیرند. در این رابطه معلم می‌تواند با بیان مثال‌ها و تمرین‌های مناسب، ویژگی‌های تناسب را که در صفحهٔ ۳۲ آمده است برای دانش‌آموزان بیان کند.

❑ برای تعریف واسطهٔ هندسی بهتر است معلم قبل از اینکه نامی از واسطهٔ هندسی ببرد، بیان کند که در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ اگر $a=d$ یا $c=b$ باشد چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟ مثلاً فرض کنید $a=d$ پس $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$ که با طرفین وسطین نتیجه می‌شود $a^۲=bc$. در این لحظه بیان کند که «a را واسطهٔ هندسی b و c» می‌نامند.

حل تمرین‌های درس اول

۱

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵} \rightarrow \frac{x+y+z}{۲+۳+۶}=\frac{۳}{۵} \rightarrow x+y+z=\frac{۳۳}{۵}$$

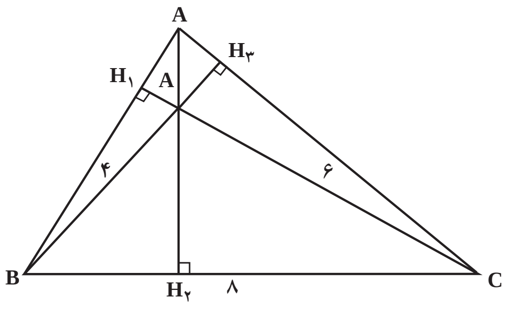
۲ $b=۸$ و $c=۱۰$ و a واسطهٔ هندسی b و c است.

$$a^۲=bc \rightarrow a^۲=۸۰ \rightarrow a=\sqrt{۸۰}$$

۳ چون در هر مثلث نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آنها برابر است بنابراین بلندترین ارتفاع مثلث به کوتاه‌ترین ضلع مثلث یعنی ضلع AB که طول آن ۴ است وارد می‌شود. بنابراین :

$$\frac{AH_۲}{CH_۱}=\frac{AB}{BC} \rightarrow \frac{AH_۲}{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}}=\frac{۴}{۸} \rightarrow AH_۲=\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$\frac{BH_۳}{CH_۱}=\frac{AB}{AC} \rightarrow \frac{BH_۳}{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}}=\frac{۴}{۶} \rightarrow BH_۳=\sqrt{۱۵}$$



۴ رأس A در سه مثلث ACE و ADE و ABD مشترک است و ضلع مقابل رأس A در هر سه مثلث روی یک خط قرار دارد، بنابراین مساحت این سه مثلث متناسب با طول ضلع مقابل به رأس A در آنها می‌باشد پس :

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}}=\frac{EC}{DE} \Rightarrow \frac{۳}{۱}=\frac{EC}{DE} \Rightarrow DE=\frac{۱}{۳}EC$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}}=\frac{EC}{BD} \Rightarrow \frac{۲}{۱}=\frac{EC}{BD} \Rightarrow BD=\frac{۱}{۲}EC$$

بنابراین :

$$\frac{DE}{BD}=\frac{\frac{۱}{۳}EC}{\frac{۱}{۲}EC}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{BC}{DE}=\frac{BD+DE+EC}{\frac{۱}{۳}EC}=\frac{\frac{۱}{۲}EC+\frac{۱}{۳}EC+EC}{\frac{۱}{۳}EC}=\frac{\frac{۱۱}{۶}EC}{\frac{۱}{۳}EC}=\frac{۱۱}{۲}$$

۵ پای ارتفاع وارد بر ضلع BD در مثلث DBC را H می‌نامیم.
چون خط d با پاره‌خط BC موازی است پس مساحت دو مثلث ABC و DBC برابرند.
بنابراین $S_{DBC}=۸^{cm^۲}$
اما داریم :

$$S_{DBC}=\frac{۱}{۲}CH\times BD \Rightarrow ۸=\frac{۱}{۲}CH\times ۶ \Rightarrow CH=\frac{۸}{۳}$$

درس دوم

قضیه تالس

اهداف درس دوم

۱ درک قضیهٔ تالس و توانایی بیان و اثبات آن به کمک تناسب توسط دانش‌آموز
۲ درک تعمیم قضیهٔ تالس و رابطهٔ آن با قضیه تالس
۳ آشنایی دانش‌آموزان با عکس قضیهٔ تالس و روش اثبات آن

روش تدریس درس دوم

مطابق الگوی بیان‌شده در صفحهٔ ۳۴، لازم است که معلم ابتدا تناسب $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ را با استفاده از مطالب درس اول و با همکاری دانش‌آموزان نتیجه بگیرد و بعد قضیه تالس را بیان کند.

کار در کلاس ۱ بیانگر کاربرد قضیهٔ تالس در محاسبه طول برخی از اضلاع مثلث‌ها می‌باشد و در واقع مهارت به‌کار بردن قضیهٔ تالس را بالا می‌برد.

فعالیت ۱ نیز با همین روند ابتدا تعمیم قضیهٔ تالس را بدون ذکر نامی از آن و با کمک دانش‌آموزان اثبات می‌کند و سپس صورت قضیه را بیان می‌دارد. کار در کلاس صفحهٔ ۳۵ نیز برای جا افتادن تعمیم قضیه تالس برای دانش‌آموز بیان شده است. در این لحظه از دانش‌آموز سؤال شود که به نظر شما عکس قضیه تالس درست است؟ و از آنها بخواهیم تا عکس قضیه تالس را بیان کنند و در مورد درستی یا نادرستی آن بحث کنند. سپس عکس قضیه و اثبات آن ارائه شود.

حل تمرین‌های درس دوم

۱ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow \frac{۲}{DB}=\frac{۱}{۰/۵}\rightarrow DB=۱$$

$$\Rightarrow AB=AD+DB=۲+۱=۳$$

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow \frac{۱}{۱/۵}=\frac{DE}{۴}\Rightarrow DE=\frac{۴}{۱/۵}=\frac{۸}{۳}$$

۲ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow \frac{۱}{x}=\frac{۲}{x+۲}\rightarrow ۲x=x+۲\rightarrow x=۲$$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow \frac{۱}{۱+x}=\frac{x-۰/۵}{BC}\overset{x=۲}{\Rightarrow}\frac{۱}{۳}=\frac{۱/۵}{BC}$$

$$\Rightarrow BC=۴/۵$$

۳ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB}\Rightarrow \frac{۹}{x}=\frac{x}{۴}\Rightarrow x^۲=۳۶\Rightarrow x=۶$$

$$\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\Rightarrow \frac{۹}{۹+x}=\frac{۲y-۱}{x+۲}\overset{x=۶}{\Rightarrow}\frac{۹}{۱۵}=\frac{۲y-۱}{۸}$$

$$\Rightarrow ۲y-۱=\frac{۷۲}{۱۵}\Rightarrow y=\frac{۸۷}{۳۰}$$

۴ در مثلث $OA'B'$ چون $AB||A'B'$ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{OA}{OA'}\qquad (۱)$$

در مثلث $OB'C'$ چون $BC||B'C'$ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}\qquad (۲)$$

$$(۱)\text{ و }(۲)\Rightarrow \frac{OA}{OA'}=\frac{OC}{OC'}\qquad (۳)$$

در مثلث $OA'C'$ با توجه به رابطهٔ (۳) و عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود $AC \parallel A'C'$

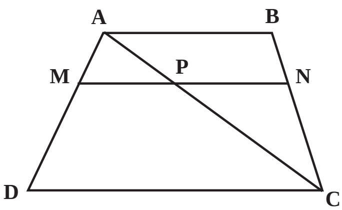
۵ در مثلث ADE چون $BC \parallel DE$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD} \qquad (۱)$$

در مثلث ADF چون $BE \parallel DF$ طبق قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AD}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{AC}{AE}=\frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^{۲}=AC.AF$$



۷ یکی از قطرهای ذوزنقهٔ ABCD مثلاً قطر AC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با پاره‌خط MN را P می‌نامیم. در مثلث ADC چون $MP \parallel DC$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AM}{MD}=\frac{AP}{PC} \qquad (۱)$$

در مثلث ABC چون $PN \parallel AB$ طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{BN}{NC}=\frac{AP}{PC} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$

۸ فرض کنید فاصله توپ از زمین مسابقه برابر x باشد.

طبق اطلاعات صورت مسئله شکل زیر را خواهیم داشت :

چون $DE \parallel BC$ طبق قضیه تالس در مثلث ABC داریم :

$$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۹۰۰}{۱۱۰۰}=\frac{۲۴۳}{x} \Rightarrow x=۲۹۷cm$$

قد این بازیکن ۱۸۰cm است و توپ هم ۳۰cm بالای سر اوست، بنابراین

میزان پرش بازیکن =۲۹۷−۱۸۰−۳۰=۸۷cm

درس سوم

تشابه مثلث‌ها

اهداف درس سوم

۱ دانش‌آموز با مفهوم تشابه دو مثلث و رابطه بین زاویه‌ها و اضلاع دو مثلث متشابه آشنا شود.

۲ آشنایی با قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها و فراگیری حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها و تسلط بر آنها با ارائه مثال‌های مناسب.

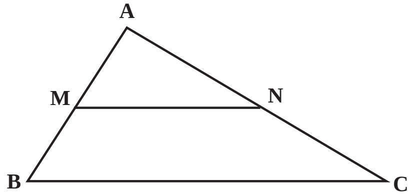
۳ دانش‌آموز بتواند قضیهٔ معروف فیثاغورس را که در گذشته بارها آن را به‌کار برده است به کمک تشابه مثلث‌ها اثبات کند.

۴ دانش‌آموز بتواند رابطه‌های طولی اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه و پاره‌خط‌هایی که توسط ارتفاع وارد بر وتر آن مثلث حاصل می‌شوند را درک و بیان کند.

روش تدریس درس سوم

❑ چون دانش‌آموزان در سال گذشته با مفهوم تشابه آشنا شده‌اند در ابتدای این درس از دانش‌آموزان سؤال شود که تشابه و ویژگی‌های آن چیست؟

پس از بحثی مختصر، تعریف تشابه دو مثلث بیان شود و برای مثال مثلث ABC و پاره‌خط MN که $MN \parallel BC$ رسم شود.



و بررسی شود که دو مثلث AMN و ABC تمام شرایط تعریف تشابه دو مثلث را دارند، بنابراین متشابه هستند سپس صورت قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها بیان شود.

❑ سپس از دانش‌آموزان سؤال شود که آیا برای بیان بررسی تشابه دو مثلث لازم است که هر شش شرط تشابه (یعنی تساوی زاویه‌های متناظر و متناسب بودن اضلاع متناظر) بررسی شود یا برخی از آنها می‌توانند باقی را نتیجه دهند.

❑ سپس بیان شود که جواب مثبت است و در برخی موارد نیاز به بررسی هر شش شرط نیست. مثلاً اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشد آن دو مثلث متشابه هستند و چهار شرط دیگر برقرار خواهند بود، سپس صورت قضیه ۱ بیان شود.

❑ قضایای ۲ و ۳ نیز به همین صورت بیان و اثبات شوند.

مثال صفحه ۴۰ بیانگر یک کاربرد عملی از تشابه مثلث‌ها می‌باشد. و دو مثال صفحه ۴۱ برای افزایش مهارت دانش‌آموزان در به‌کارگیری تشابه مثلث‌ها هستند.

در این لحظه از دانش‌آموزان سؤال شود که آیا رابطه فیثاغورس را که یکی از روابط مهم ریاضی است را به خاطر دارند. و از آنها خواسته شود تا صورت آن را بیان کنند سپس سؤال شود که آیا در مورد اثبات آن تا به حال فکر کرده‌اید. اینک با استفاده از تشابه مثلث‌ها قادر به اثبات این قضیه می‌باشیم. سپس اثبات قضیه با کمک دانش‌آموزان و مرحله به مرحله مطابق کتاب انجام گیرد.

نتیجه وسط صفحه ۴۲ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه هستند که بررسی آنها به دانش‌آموزان واگذار شود.

حل تمرین‌های درس سوم

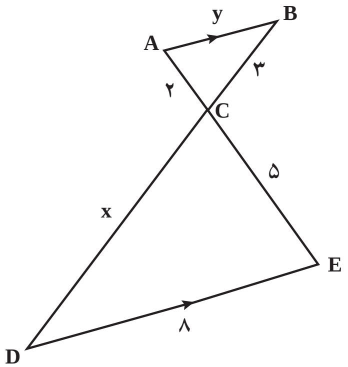
۱ شکل اول :

$$AB || DE \rightarrow \hat{A} = \hat{E} \text{ و } \hat{B} = \hat{D}$$

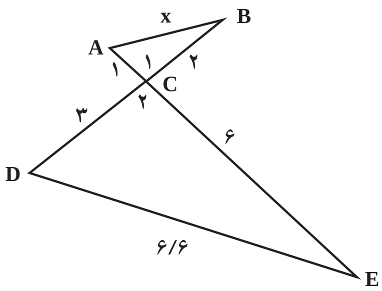
پس دو مثلث ABC و CDE به حالت دو زاویه با هم متشابه هستند. بنابراین

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{y}{۸} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow y = \frac{۱۶}{۵}$$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{x} \Rightarrow x = \frac{۱۵}{۲}$$



شکل دوم :

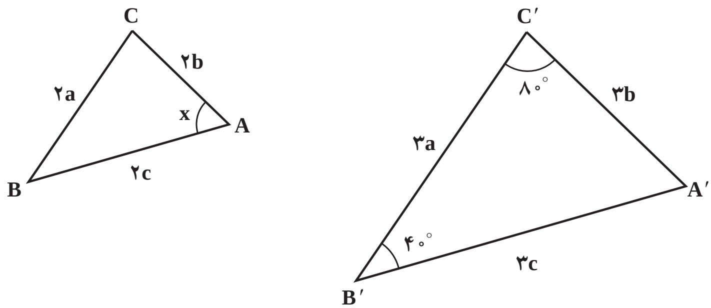


$$\left.\begin{array}{l}\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{CE}=\frac{۱}{۳}\\ \hat{C}_۱=\hat{C}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow$$ دو مثلث ABC و DCE

به حالت دو ضلع متناسب و زاویه بین مساوی، متشابه هستند. بنابراین :

$$\frac{AC}{DC}=\frac{AB}{DE}\Rightarrow\frac{۱}{۳}=\frac{x}{۶/۶}\Rightarrow x=۲/۲$$

شکل سوم :

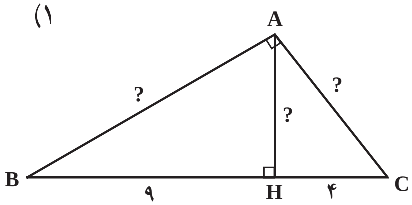


دو مثلث ABC و A´B´C´ به حالت سه ضلع متناسب، $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow$ متشابه هستند. بنابراین زاویه‌های مقابل به اضلاع متناسب، برابرند پس :

$$x=\hat{A}=\hat{A}'=۱۸۰-(۸۰+۴۰)=۶۰^\circ$$

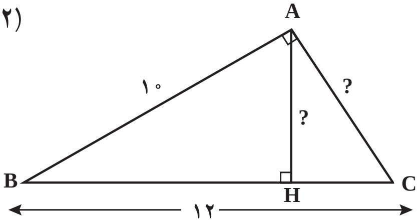
۲

۱)



$$AB^۲=BH\times BC\rightarrow AB^۲=۹\times۱۳=۱۱۷\rightarrow AB=\sqrt{۱۱۷}$$
$$AC^۲=CH\times CB\rightarrow AC^۲=۴\times۱۳=۵۲\rightarrow AC=\sqrt{۵۲}$$
$$AH^۲=BH\times HC=۹\times۴=۳۶\Rightarrow AH=۶$$

۲)

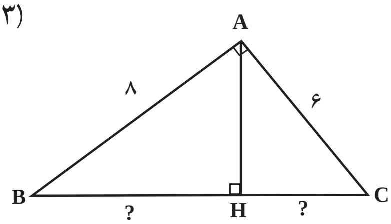


$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۱۰^{۲} = BH \times ۱۲ \Rightarrow BH = \frac{۱۰۰}{۱۲} = \frac{۲۵}{۳} \Rightarrow CH = ۱۲ - \frac{۱۰۰}{۱۲} = \frac{۴۴}{۱۲} = \frac{۱۱}{۳}$$

$$AC^{۲} = CH \times CB = \frac{۱۱}{۳} \times ۱۲ = ۴۴ \Rightarrow AC = \sqrt{۴۴}$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۱۲ = ۱۰ \times \sqrt{۴۴} \Rightarrow AH = \frac{۵\sqrt{۱۱}}{۳}$$

۳)

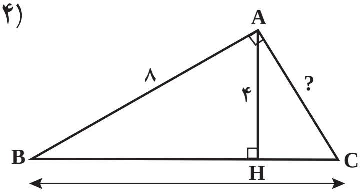


$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \rightarrow BC^{۲} = ۸^{۲} + ۶^{۲} = ۱۰۰ \rightarrow BC = ۱۰$$

$$AB^{۲} = BH \times BC \Rightarrow ۸^{۲} = BH \times ۱۰ \Rightarrow BH = ۶/۴$$

$$CH = BC - BH = ۱۰ - ۶/۴ = ۳/۶$$

۴)



مثلث ABH قائم‌الزاویه است. $\Rightarrow AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow ۸^{۲} = ۴^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow$

$$BH^{۲} = ۴۸ \Rightarrow BH = ۴\sqrt{۳}$$

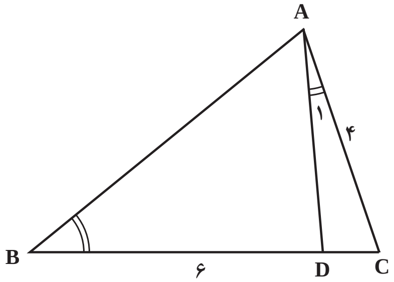
$$AH^{۲} = BH \times HC \Rightarrow ۴^{۲} = (۴\sqrt{۳}) \times HC \Rightarrow HC = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$BC = BH + HC = ۴\sqrt{۳} + \frac{۴\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$$

$$AC^{۲} = BC^{۲} - AB^{۲} = \frac{۲۵۶}{۳} - ۶۴ = \frac{۶۴}{۳}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

۳



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_{۱}=\hat{B}\\ \hat{C}\ \text{مشترک}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ACD}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

بنابراین :

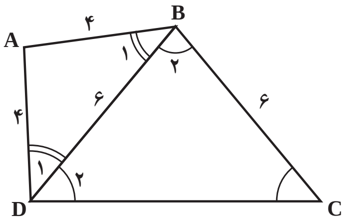
$$\frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}\Rightarrow\frac{DC}{۴}=\frac{۴}{BD+DC}\Rightarrow\frac{DC}{۴}=\frac{۴}{۶+DC}$$

$$\Rightarrow(۶+DC)DC=۱۶\Rightarrow DC^{۲}+۶DC-۱۶=۰$$

$$\Rightarrow(DC+۸)(DC-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}DC=-۸ & \text{غ ق ق}\\ DC=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow BC=BD+DC=۶+۲=۸$$

۴

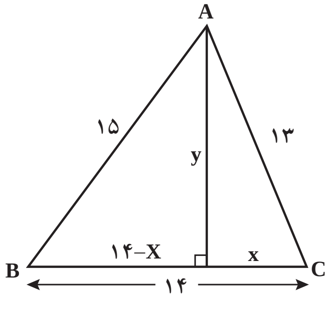


$$\left.\begin{array}{l}BC=BD\Rightarrow\hat{D}_{۲}=\hat{C}\\ AB=AD\Rightarrow\hat{B}_{۱}=\hat{D}_{۱}\\ AB\parallel DC\Rightarrow\hat{B}_{۱}=\hat{D}_{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{B}_{۱}=\hat{C}=\hat{D}_{۱}=\hat{D}_{۲}$$

بنابراین مثلث‌های ABD و BCD به حالت دو زاویه برابر، متشابه هستند. پس

$$\frac{DC}{BD}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{DC}{۶}=\frac{۶}{۴}\Rightarrow DC=۹$$

۵



در مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم :

$$AC^{۲}=AH^{۲}+HC^{۲}$$

$$۱۳^{۲}=x^{۲}+y^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}=۱۶۹ \qquad (۱)$$

در مثلث قائم‌الزاویه AHB داریم :

$$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \Rightarrow ۱۵^۲ = y^۲ + (۱۴-x)^۲$$

$$\Rightarrow y^۲ + ۱۹۸ - ۲۸x + x^۲ = ۲۲۵$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲۸x = ۲۹$$

با توجه به رابطه (۱) داریم :

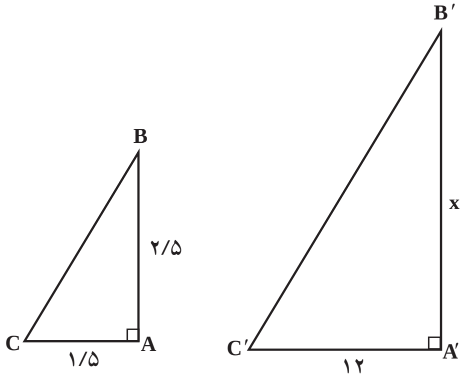
$$۱۶۹ - ۲۸x = ۲۹ \Rightarrow ۲۸x = ۱۴۰ \Rightarrow x = ۵$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow y^۲ = ۱۶۹ - x^۲ = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow y = ۱۲$$

$$\text{مساحت مثلث ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۱۴ = ۸۴$$

۶ الف)زاویه بین هر جسم عمود بر زمین و شعاع تابشی خورشید در یک لحظه مشخص مقداری ثابت است. بنابراین $\hat{B} = \hat{B'}$ بنابراین دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت تساوی دو زاویه متشابه هستند.

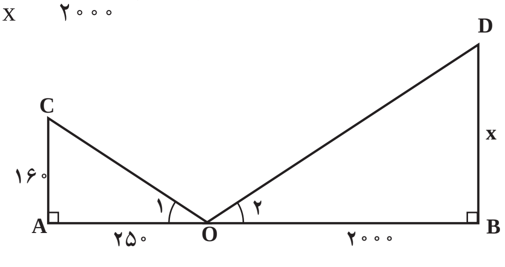


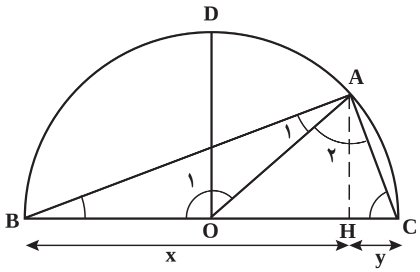
بنابراین :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{۲/۵}{x} = \frac{۱/۵}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۳۰}{۱/۵} = ۲۰m$$

ب) می‌دانیم زاویهٔ تابش و انعکاس یکسان می‌باشند. بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ بنابراین دو مثلث AOC و DOB متشابه هستند (به حالت تساوی دو زاویه) بنابراین :

$$\frac{AC}{BD} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \frac{۱۶۰}{x} = \frac{۲۵۰}{۲۰۰۰} \Rightarrow x = ۱۲۸۰cm = ۱۲/۸m$$





۷ الف) چون زاویهٔ A یک زاویه محاطی مقابل به کمان ۱۸۰° درجه است بنابراین $\hat{A} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$

ب) مطابق شکل واضح است که $OD \geq AH$

پ) در مثلث قائم‌الزاویه ABC طبق روابط طولی داریم :

$$AH^۲ = CH \times HB = xy \Rightarrow AH = \sqrt{xy}$$

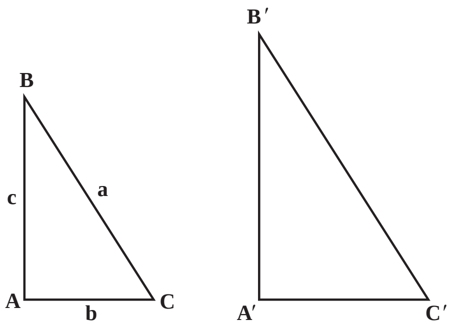
از طرفی OD برابر شعاع دایره است پس BC دو برابر OD است بنابراین

$$x + y = ۲OD \Rightarrow OD = \frac{x+y}{۲}$$

و با توجه به قسمت (ب) داریم :

$$\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$$

ت) بله. مطابق قسمت (پ) این نامساوی صحیح است و بیان می‌دارد که میانگین حسابی دو عدد مثبت، بزرگ‌تر یا مساوی میانگین هندسی آنها است.



۸ الف) اگر a و b و c طول اضلاع یک مثلث باشند و $a^۲ = b^۲ + c^۲$ باشد آن‌گاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

ب) دو پاره‌خط $A'B'$ و $A'C'$ را که بر هم عمود هستند و $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ هستند را رسم می‌کنیم.

B' و C' را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه $A'B'C'$ حاصل شود.

طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ داریم :

$$(B'C')^۲ = (A'B')^۲ + (A'C')^۲ = (AB)^۲ + (AC)^۲ = c^۲ + b^۲$$

اما طبق صورت مسئله (قسمت الف) داریم $a^۲ = b^۲ + c^۲$ بنابراین :

$$B'C'^۲ = a^۲ \Rightarrow B'C' = a \Rightarrow B'C' = BC$$

پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت تساوی سه ضلع هم‌نهشت هستند. بنابراین مثلث ABC نیز قائم‌الزاویه است.

ج) یک مثلث قائم‌الزاویه است، اگر و تنها اگر مربع ضلع بزرگ‌تر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر باشد.