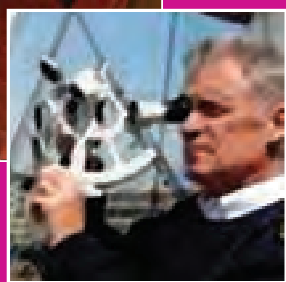
فصل ششم

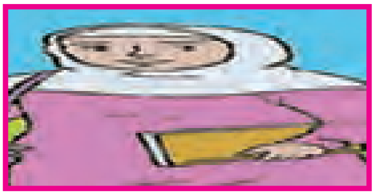
نسبت‌های مثلثاتی

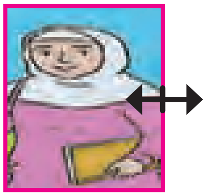


زاویـه‌یاب دریایی، ابزاری است که از آن برای اندازه‌گیری زاویهٔ بین خورشید یا ستارگان دیگر با افق، استفاده می‌شود. از طریق این اندازه‌گیری و به کمک مثلثات، مکان کشتی را تعیین می‌کنند. در صورتی که به طور افقی مورد استفاده قرار گیرد، برای اندازه‌گیری زاویهٔ بین دو شیء در ساحل (یا دریا) نیز به‌کار می‌رود.

۶ــ۱ــ تشابه

یکی از دوستان علاقهٔ زیادی به عکس‌های خودش دارد. دلش می‌خواهد هر جا که بتواند عکس‌های خودش را ببیند! چند روز پیش که خانه‌شان رفته بودم، دیدم کمی در فکر است. از او پرسیدم به چه فکر می‌کند. عکسی از خودش در تعطیلات گذشته را نشان داد و گفت: چون از آن عکس خوشش آمده است، سعی کرده به کمک رایانه آن را به اندازه‌ای بزرگ کند که روی جلد کتابچه‌ای که سفرنامه‌هایش را در آن می‌نویسد، بچسباند. این‌بار به نظرم آمد که ابتکار خوبی بود. پرسیدم مشکل چیست؟ نتیجهٔ کارش را نشان داد. با توجه به مکان فلش، خودتان حدس بزنید مشکل چه بود!





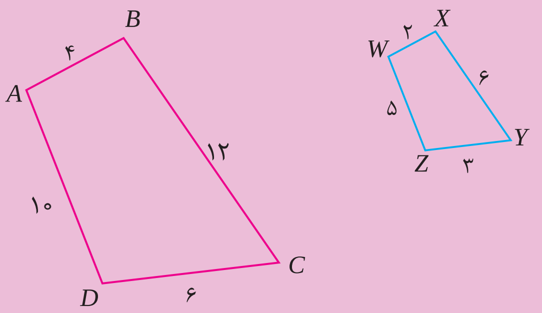
گفتم: می‌توانم کمکت کنم. یک فعالیت می‌گویم. بعد از انجام آن متوجه می‌شوی مشکلت چیست؟

گفت: تو هم دبیر ریاضی شدی؟!

دیدم راست می‌گوید. چقدر از دبیر ریاضی‌ام تأثیر گرفته‌ام. ولی او چون خیلی مشتاق بود عکسش را بزرگ کند، قبول کرد تا فعالیتی را که به او می‌گویم انجام دهد.

فعالیت ۱

دو شکل متشابه رو‌به‌رو را در نظر بگیرید.



۱) نسبت اضلاع متناظر را بنویسید.

....

۲) هر یک از اضلاع $ABCD$ چند برابر اضلاع متناظرش در $WXYZ$ است؟

....

۳) هر یک از اضلاع $WXYZ$ چند برابر اضلاع متناظرش در $ABCD$ است؟

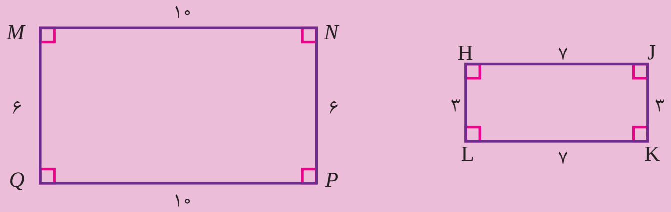
....

۴) نسبت اضلاع $ABCD$ به $WXYZ$ را با نسبت اضلاع $WXYZ$ به $ABCD$ مقایسه کنید.

....

۵) در شکل های زیر، نسبت اضلاع را بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟

....



فعالیت بالا نشان می‌دهد وقتی دو شکل متشابه هستند، نسبت بزرگ شدن یا کوچک شدن اضلاع یکی

به اضلاع متناظر دیگری را می‌توان با یک عدد بیان کرد. به طور مثال در فعالیت ۱ داریم:

$$\frac{AB}{WX}=\frac{BC}{XY}=\frac{CD}{YZ}=\frac{AD}{WZ}=k$$

یا

$$\frac{WX}{AB}=\frac{XY}{BC}=\frac{YZ}{CD}=\frac{WZ}{AD}=k'$$

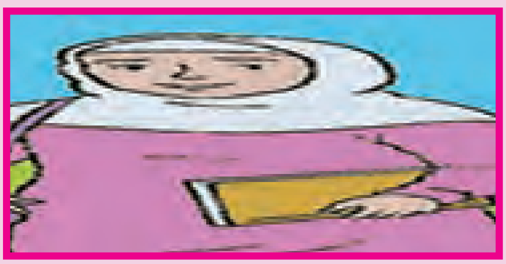
در این صورت می‌گوییم: چهارضلعی $ABCD$ نسبت به چهارضلعی $WXYZ$ با ضریب k بزرگ شده است و آن را **بزرگ‌نمایی با ضریب $k>1$** می‌نامیم، یا چهارضلعی $WXYZ$ نسبت به چهارضلعی $ABCD$ با ضریب k کوچک شده است و آن را **بزرگ‌نمایی با ضریب $0<k<1$** می‌نامیم.

کاردرکلاس ۱

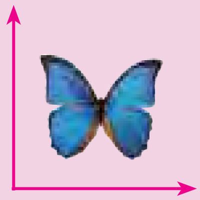
۱) نسبت اضلاع را برای دو شکل زیر بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟

....

....



۲) تصویر زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۱

الف) اگر عرض هر نقطه روی شکل (۱) را ثابت نگه داشته و طول نقاط آن را ۳ برابر کنیم، کدام شکل به‌دست می‌آید؟چرا؟

....

ب) کدام شکل را می‌توان با ۳ برابرکردن عرض نقاط و ثابت نگه‌داشتن طول نقاط شکل (۱) به‌دست آورد؟

....

پ) در کدام شکل، طول و عرض تمام نقاط ۳ برابر طول و عرض تمام نقاط متناظر در شکل (۱) است؟

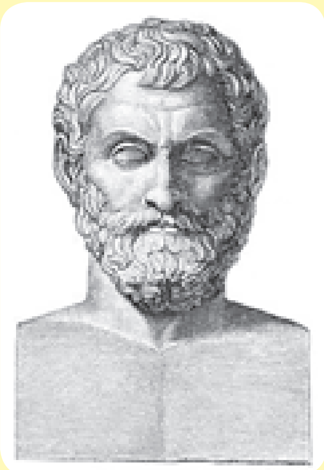
....

در ادامه، داستان زیر از تالس را برایش تعریف کردم.

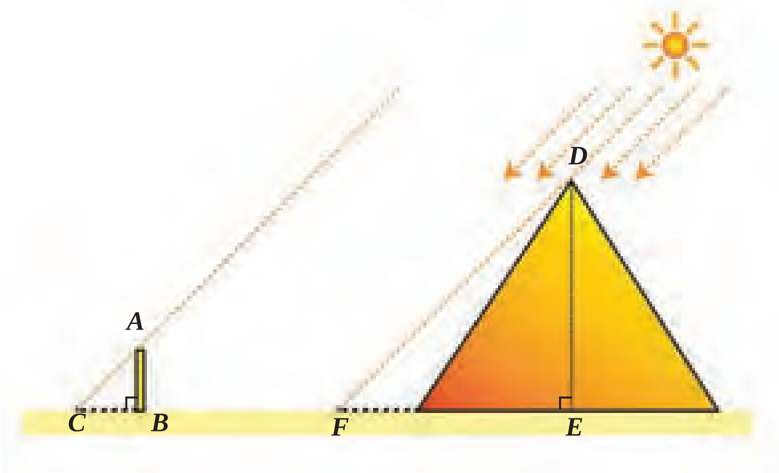
می‌گویند زمانی که تالس در مصر اقامت داشت، توانست به کمک تشابه مثلث‌ها، ارتفاع اهرام مصر را اندازه‌گیری کند. او چوبی با طول مشخص را نزدیک اهرام، به طور عمودی در زمین فرو کرد و سپس به هنگام تابش خورشید، هم‌زمان طول سایهٔ چوب و سایهٔ اهرام را اندازه‌گیری کرد.

خواندنی

تالس ملطی در حدود سال ۶۲۴ پیش از میلاد در شهر میلیتوس در «ایونیا» غرب ترکیه امروزی به دنیا آمد. تالس بیشتر وقت خود را صرف مطالعهٔ ریاضیات و ستاره‌شناسی کرد. عقیده بر آن است که تالس پس از مسافرت به مصر، هندسه را برای یونانیان به ارمغان برد. در ریاضیات، قضیهٔ تالس را به وی نسبت می‌دهند. مورخی به نام پروکلوس گزارش می‌دهد که تالس توانست با کشف این قضیه، فاصلهٔ کشتی‌ها را تا ساحل تعیین کند. تالس در واقع ارتفاع اهرام مصر را از طریق اندازه‌گیری سایهٔ آنها اندازه‌گیری کرد.



طبق نظر تالس، مثلث‌های DEF و ABC متشابه‌اند، او با داشتن طول چوب و طول سایهٔ چوب و طول سایهٔ هرم، با مشخص کردن اضلاع متناظر و نوشتن نسبت طول اضلاع متناظر، ارتفاع هرم را به‌دست آورد.



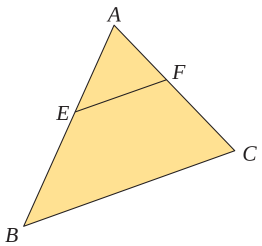
دوستم پرسید: تالس از کجا می‌دانست آن دو مثلث متشابه‌اند؟ از روی شکل، ما فقط تساوی زاویه‌های متناظر را می‌توانیم ثابت کنیم (چگونه؟). آیا شرط تساوی زاویه‌ها برای تشابه دو مثلث کافی است؟

گفتم: در حالت کلی با داشتن تساوی زاویه‌ها، نمی‌توان تشابه دو شکل را نتیجه گرفت (به سؤال ۵ در فعالیت ۱ توجه کنید)، ولی این شرط برای تشابه دو مثلث کافی است و این از نتایج رابطه‌ای است که تالس بیان کرده است.

مثال ۱

در یک مثلث دلخواه ABC از نقطهٔ E روی ضلع AB، خطی به موازات ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ F قطع کند. دو مثلث AEF و ABC زاویه‌های مساوی دارند؛ چرا؟ پس، با هم متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$



کار در کلاس ۲

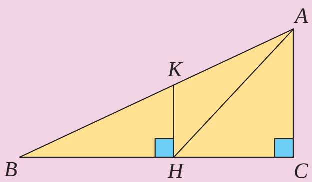
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس C قائمه است، KH بر BC عمود است.

الف) کدام مثلث‌ها متشابه‌اند؟ چرا؟

....

ب) نسبت‌های اضلاع متناظر را بنویسید.

....



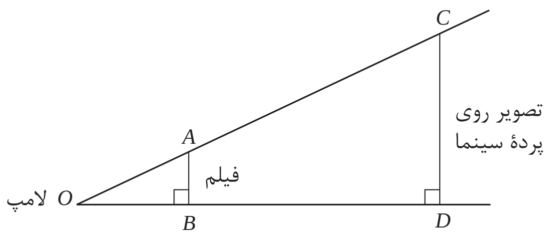
۶ــ۲ــ تانژانت یک زاویه

در یکی از هنرستان‌ها، هنرجویان ممتاز را به همراه دبیر ریاضی به دیدن فیلمی برده بودند. منوچهر که مشغول دیدن فیلم بود، گاهی برمی‌گشت و به پشت سرش نگاه می‌کرد. پس از بازگشت به مدرسه، دبیر از منوچهر پرسید:

چرا به پشت سرت نگاه می‌کردی؟ آیا سؤالی برایت پیش آمده بود؟

منوچهر گفت: بله، می‌خواستم بدانم تصویر به آن بزرگی چگونه روی پردهٔ سینما تشکیل می‌شود. آیا بزرگی یا کوچکی تصویر با فاصلهٔ پرده از چشمهٔ نور ارتباط دارد؟

دبیر گفت: برای درک این مطلب، بهتر است شکلی رسم کنیم. شکل زیر می‌تواند اندازهٔ تصویر روی پردهٔ سینما و اندازهٔ فیلم را به شما نشان دهد.



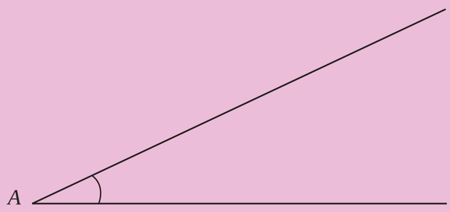
خواندنی

اولین کسانی که از مثلثات استفاده می‌کردند یونانیان بودند. در یونان قدیم از مثلثات برای تعیین طول مدت روز یا طول سال (با مشخص کردن موقعیت ستارگان در آسمان) استفاده می‌شد. بعدها ریاضی‌دانان و منجمان هندی نیز پیشرفت‌هایی در مثلثات به‌دست آوردند ولی پیشرفت این علم مدیون دانشمندان مسلمان است.
مسلمانان بیشترین نقش را در پیشرفت این علم ایفا کردند و سپس این اندوخته‌ها را در قرون وسطی به اروپاییان منتقل کردند. اروپاییان نیز از دانش فراوان مسلمانان در مثلثات استفاده کردند و این علم را توسعه داده و به شکل امروزی درآوردند.

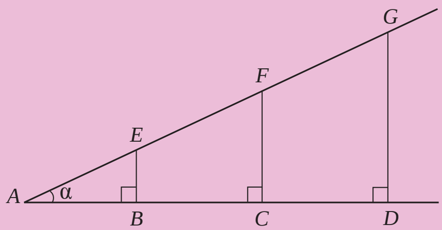
فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا بتوانید رابطهٔ بین اندازهٔ تصویر روی پردهٔ سینما و اندازهٔ فیلم و فاصله با چشمهٔ نور را به‌دست آورید.

فعالیت ۲

درشکل روبه‌رو، یک زاویهٔ تند به رأس A رسم شده است.



۱) روی یک ضلع این زاویه چند نقطهٔ دلخواه مانند B و C و D در نظر بگیرید. از این نقاط، عمودهایی بر این ضلع رسم کنید که ضلع دیگر را به ترتیب، در نقاط E و F و G قطع کند.



۲) با اندازه‌گیری به‌کمک خط‌کش، مشخص کنید که تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\frac{EB}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{GD}{AD}$$

۳) تشابه مثلث‌هایی را که در شکل دیده می‌شوند، بررسی کنید و به کمک آن درستی تساوی‌های بالا را نشان دهید.

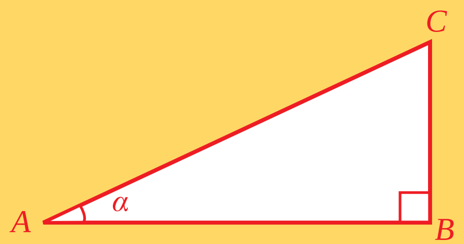
فعالیت بالا نشان می‌دهد که در مسئلهٔ اندازهٔ تصویر در سینما، نسبت اندازهٔ فیلم به فاصلهٔ فیلم تا چشمهٔ نور، با نسبت اندازهٔ تصویر روی پرده به فاصلهٔ پرده تا چشمهٔ نور مساوی است. پس، هرچه پرده دورتر قرار گیرد، باید اندازهٔ تصویر بزرگ‌تر شود تا نسبت آنها تغییر نکند و هر چه پرده نزدیک‌تر شود، اندازهٔ تصویر هم کوچک‌تر می‌شود تا نسبت آنها تغییر نکند.

با داشتن زاویهٔ رأس A، مقدار نسبت $\frac{EB}{AB}$ در شکل فعالیت ۲ به انتخاب نقطهٔ B بستگی ندارد و مقدار ثابتی است، این مقدار را **تانژانت** این زاویه می‌نامند.

تعریف

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC یک زاویهٔ تند را انتخاب کنید و آن را α بنامید (مثلاً زاویهٔ به رأس A). بنا به تعریف، نسبت $\frac{BC}{AB}$ را تانژانت زاویهٔ α می‌نامند و با $\tan\alpha$ نشان می‌دهند. این نسبت فقط به α بستگی دارد و آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

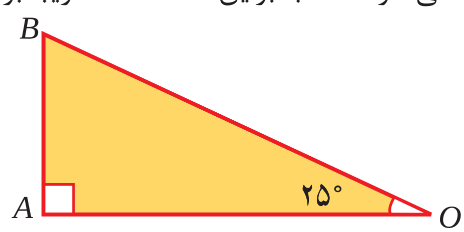
$$\text{تانژانتِ آلفا} = \tan\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\alpha \text{ طول ضلع روبه‌رو به}}{\alpha \text{ طول ضلع مجاور به}}$$



مثال ۲

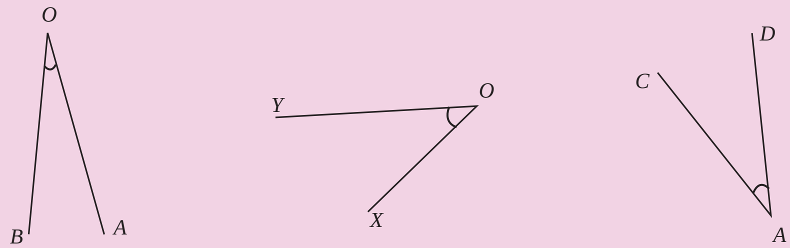
با رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های آن ۲۵ درجه باشد، تانژانت زاویهٔ ۲۵ درجه را بیابید.

ابتدا به کمک نقاله، یک زاویهٔ ۲۵ درجه رسم می‌کنیم و مطابق شکل، مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌سازیم که ضلع مجاور زاویهٔ ۲۵ درجه (OA) مقدار مشخصی، مثلاً ۱۰سانتی‌متر، باشد. طبق شکل، با اندازه‌گیری طول ضلع AB تقریباً ۴/۶ سانتی‌متر است. بنابراین، $\tan 25^\circ$ تقریباً برابر است با $\frac{AB}{OA} \approx \frac{۴/۶}{۱۰} = ۰/۴۶$.



کار در کلاس ۳

۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های زیر را با اندازه‌گیری با خط‌کش محاسبه کنید.



....

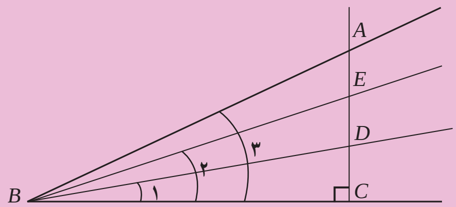
۲) علی با یادگیری مفهوم تانژانت فهمید که می‌تواند طول ارتفاع تیرک پرچم مدرسه‌اش را اندازه‌گیری کند. او زاویهٔ دید خود به نوک تیرک را با سطح افق، تقریباً ۴۰ درجه تخمین زد. قد علی ۱۶۵ سانتی‌متر و فاصلهٔ او تا تیرک پرچم ۱۱ متر است. با این اطلاعات، او چگونه می‌تواند طول ارتفاع تیرک را به‌طور تقریبی بیابد؟

....

سؤالی که دربارهٔ مفهوم تانژانت پیش می‌آید، این است که تانژانت یک زاویهٔ تند چه اعدادی ممکن است باشد و تغییر اندازهٔ یک زاویه، چه تأثیری در اندازهٔ تانژانت آن زاویه دارد. فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال‌ها به شما کمک کند.

فعالیت ۳

در شکل زیر AC بر BC عمود است.



۱) هر یک از نسبت‌های $\frac{DC}{BC}$ ، $\frac{EC}{BC}$ و $\frac{AC}{BC}$ چه چیزی را نشان می‌دهند؟

....

۲) با بزرگ شدن زاویه‌ای که در رأس B تشکیل می‌شود، این نسبت‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟ چرا؟

....

۳) با تغییر یک زاویه، تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟

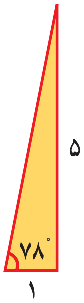
....

۴) آیا می‌توان زاویه‌ای یافت که تانژانت آن برابر ۹ باشد؟ این زاویه چگونه ساخته می‌شود؟ جواب این سؤال برای عددهای مثبت دیگر چیست؟

....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که با بزرگ شدن یک زاویهٔ تند، تانژانت آن نیز بزرگ می‌شود و هر عدد مثبتی، می‌تواند تانژانت زاویه‌ای باشد.

مثال ۳



تانژانتِ چه زاویه‌ای برابر ۵ است؟

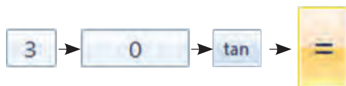
مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که طول اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۱ و ۵ واحد باشد. با نقاله، زاویهٔ مجاور به ضلع به طول ۱ را اندازه می‌گیریم که تقریباً ۷۸ درجه می‌شود. تانژانت ۷۸ درجه تقریباً ۵ است.

استفاده از ماشین حساب

تانژانت زاویه ۳۰ درجهٔ را با ماشین حساب به‌دست آورید.

....

....



کار درکلاس ۴

۱) اگر زاویهٔ تندی به صفر نزدیک شود، تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ درستی ادعای خود را با رسم شکل نشان دهید.

....

۲) اگر زاویهٔ تندی به ۹۰ درجه نزدیک شود، در مورد تغییرات اندازهٔ تانژانت آن چه می‌توان گفت؟

(**راهنمایی:** به کمک ماشین حساب، برای مقادیر تانژانت زاویه‌های نزدیک به ۹۰ درجه جدولی بسازید.)

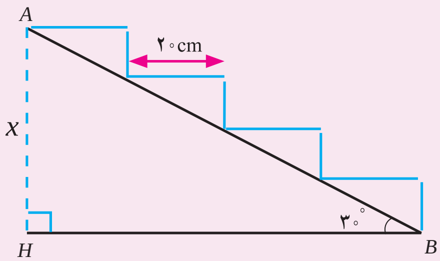
....

مسئله‌ها

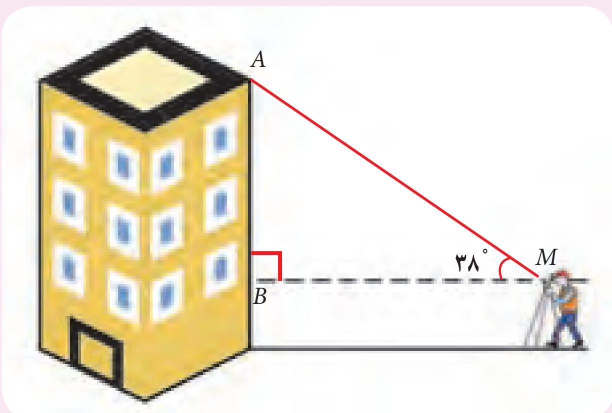
۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های ۴۰ و ۵۰ درجه را پیدا کنید.

۲) تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۸ خواهد شد؟

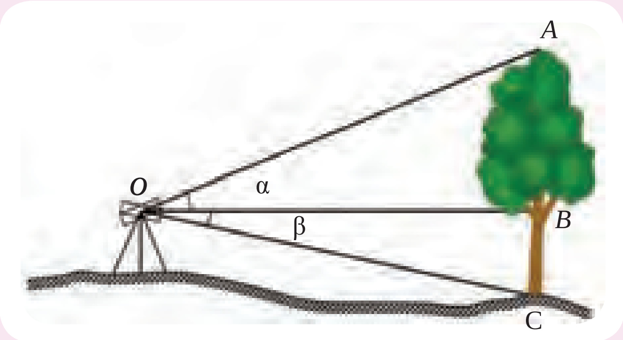
۳) با توجه به شکل روبه‌رو، ارتفاع نقطهٔ A از زمین را بیابید (عرض همهٔ پله‌ها ۲۰cm است).



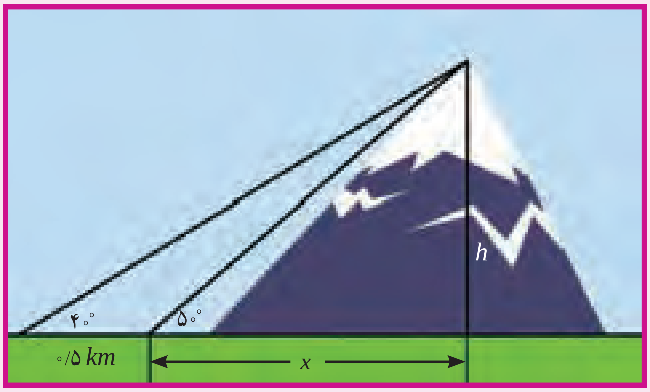
۴) برای محاسبهٔ ارتفاع ساختمانی، دوربین زاویه‌یاب را در یک سطح افقی در نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱۵متری از ساختمان (نقطهٔ B) مستقر کرده‌ایم و به نقطهٔ بالای ساختمان نشانه می‌رویم. زاویهٔ دید برابر ۳۸درجه به‌دست آمده است. اگر ارتفاع دوربین از زمین یک متر و ۵۴ سانتی‌متر باشد، ارتفاع ساختمان را به‌دست آورید.



۵) به کمک دوربین زاویه‌یاب، زاویه‌های α و β به ترتیب ۲۳ درجه و ۱۲ درجه به‌دست آمده‌اند و فاصلهٔ افقی دستگاه تا درخت ۱۸ متر است. با توجه به شکل، ارتفاع درخت را پیدا کنید.

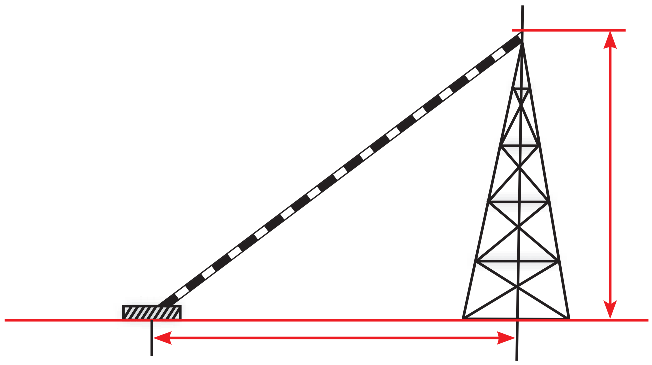


۶) یک مهندس نقشه‌بردار، برای محاسبهٔ ارتفاع یک کوه در نقطه‌ای می‌ایستد و مشاهده می‌کند که در آن نقطه، نوک کوه با زاویهٔ ۵۰ درجه نسبت به افق دیده می‌شود. پس از آنکه نیم‌کیلومتر از کوه دور می‌شود، مشاهده می‌کند که نوک کوه با زاویهٔ ۴۰ درجه دیده می‌شود. ارتفاع کوه چقدر است؟



۶ـ۳ـ سینوس یک زاویه

فرزانه در راه مدرسه، کارگرانی را دید که در حال نصب یک دکل مخابراتی بودند. او مشاهده کرد که کارگران برای نگهداری دکل‌ها از سیم نگهدارنده‌ای که به زمین متصل شده است، استفاده می‌کنند. با این مشاهدات، او در کلاس ریاضی از دبیر پرسید که مهندسان چگونه می‌فهمند که برای نگهداری دکل چقدر سیم لازم است؟



دبیر گفت: فعالیت صفحهٔ روبه‌رو به شما در حل این مسئله کمک می‌کند.

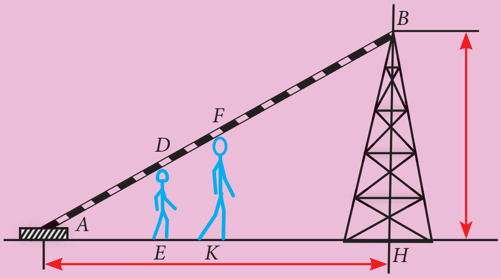
خواندنی

ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی، یکی از مفاخر علمی ایران و متولد ۳۲۸ هجری قمری که در سوم رجب سال ۳۸۸ هجری قمری درگذشته است. وی اهل بوژگان کهنویسی بوده که در هجده کیلومتری شرق شهر تربت جام قرار دارد.

فعالیت‌های علمی بوزجانی دامنهٔ وسیعی از علوم مختلف، مانند هندسه، مثلثات، حساب و نجوم را در بر می‌گرفته است و او در تمام این علوم به‌دستاوردهای بدیع و تازه‌ای رسیده است.

فعالیت ۴

فرض کنید دکلی به ارتفاع ۶۰ متر با سیمی که با سطح افق زاویهٔ ۳۰ درجه ساخته است، مهار می‌شود. کارگری زیر این سیم درنقطه‌ای مانند E چنان می‌ایستد که سیم در نقطه‌ای مانند D با سرش تماس پیدا کند. کارگر دیگری به وسیلهٔ یک متر فلزی، فاصلهٔ A تا D را اندازه‌گیری می‌کند و نسبت $\frac{DE}{AD}$ را حساب می‌کند.



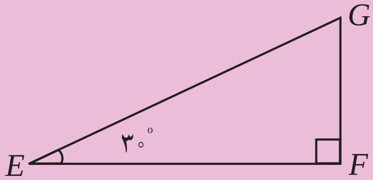
۱) کارگرانی با طول قدهای متفاوت، این کار را تکرار می‌کنند و هر کدام، مقداری را برای نسبت طول قد به فاصلهٔ سر تا نقطهٔ A به‌دست می‌آورند. نشان دهید همهٔ آنها یک مقدار را به‌دست می‌آورند.

....

۲) اگر نسبت $\frac{BH}{AB}$ را حساب کنیم، مقدار آن با نسبتی که کارگران به‌دست آورده‌اند چه رابطه‌ای دارد؟ چرا؟

....

۳) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه، مانند شکل زیر، که یک زاویهٔ آن ۳۰ درجه است، نشان دهید نسبتی که کارگران به‌دست آورده‌اند، برابر است با $\frac{FG}{EG}$. این نسبت را با اندازه‌گیری با خط‌کش به‌دست آورید.
(**راهنمایی:** تشابه دو مثلث AHB و EFG را نشان دهید.)



....

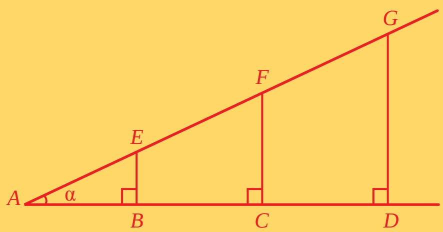
۴) با استفاده از این نسبت، طول سیم نگهدارندهٔ دکل را حساب کنید.

....

تعریف

برای هر زاویهٔ تند α مانند شکل زیر، همهٔ نسبت‌های $\frac{GD}{AG}$ ، $\frac{FC}{AF}$ و $\frac{EB}{AE}$ طبق تشابه مثلث‌ها، با هم مساوی‌اند. مقدار این نسبت‌های برابر را **سینوس زاویهٔ** α می‌نامند و آن‌را با $\sin\alpha$ نشان می‌دهند.

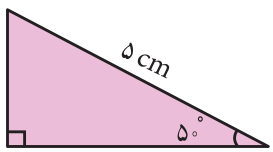
$$\sin\alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{CF}{AF} = \frac{DG}{AG} = \frac{\text{طول ضلع روبه‌روی } \alpha}{\text{طول وتر}}$$



مثال ۴

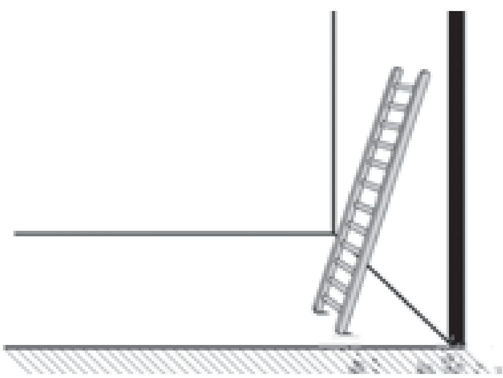
سینوس زاویهٔ ۵۰ درجه را به‌دست آورید.

به کمک نقاله، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویهٔ آن ۵۰ درجه و طول وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد. با خط‌کش، طول ضلع روبه‌رو به این زاویه را اندازه می‌گیریم که تقریباً ۳/۸ سانتی‌متر است. پس، $\sin ۵۰^\circ$ تقریباً برابر است با $\frac{۳/۸}{۵} = ۰/۷۶$.



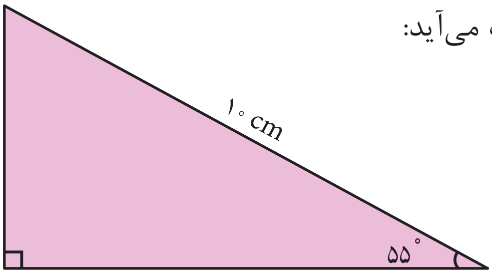
مثال ۵

نردبانی به طول ۶ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم. اگر زاویهٔ نردبان با سطح افق ۵۵ درجه باشد، فاصلهٔ انتهای نردبان تا سطح زمین را پیدا کنید.



مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویهٔ آن ۵۵ درجه و وتر آن ۱۰ سانتی‌متر باشد. با اندازه‌گیری

اضلاع این مثلث به‌کمک خط‌کش، سینوس زاویهٔ ۵۵ درجه را پیدا می‌کنیم : $sin\ ۵۵^\circ \approx ۰/۸۲$. بنابراین، فاصلهٔ انتهای نردبان تا سطح زمین از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:



$$sin\ ۵۵^\circ = \frac{\text{فاصلهٔ انتهای نردبان تاسطح زمین}}{۶} \Longrightarrow \text{فاصلهٔ انتهای نردبان تا سطح زمین} = ۶ \times ۰/۸۲ = ۴/۹۲\ m$$

کاردرکلاس ۵

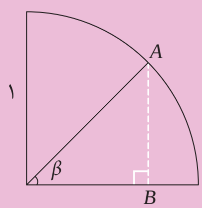
۱) به کمک نقاله و با رسم چند مثلث قائم الزاویه، مقدار تقریبی سینوس زاویه‌های ۲۰ و ۳۵ و ۴۰ درجه را بیابید.

دربارهٔ مفهوم سینوس نیز، این سؤال پیش می‌آید که تغییر اندازهٔ یک زاویه چه تأثیری در اندازهٔ سینوس آن زاویه دارد؟ فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال به شما کمک کند.

فعالیت ۵

یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد، مانند شکل زیر رسم کنید.

۱) نقطهٔ A را روی ربع دایره انتخاب کنید و از آن عمود AB را مطابق شکل رسم کنید. طول پاره‌خط AB چه رابطه‌ای با زاویهٔ β دارد؟..



۲) با کم یا زیاد شدن زاویهٔ β، سینوس آن چگونه تغییر می‌کند؟

....

۳) با نزدیک شدن زاویهٔ β به صفر، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟..

۴) با نزدیک شدن زاویهٔ β به ۹۰ درجه، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟..

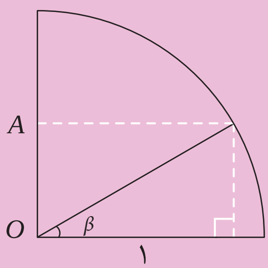
۵) سینوس β چه عددهایی می‌تواند باشد؟..

فعالیت ۵ نشان می‌دهد که سینوس زاویه‌های تند، عددهایی بین صفر و ۱ هستند. با بزرگ شدن زاویه، سینوس آن نیز بزرگ می‌شود.

اگر عددی مانند a را به صورت $0 < a < 1$ در نظر بگیریم، آیا زاویه‌ای وجود دارد که سینوس آن برابر a شود؟ فعالیت زیر می‌تواند پاسخی برای این سؤال فراهم کند.

فعالیت ۶

ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند روبه‌رو رسم کنید.



۱) اگر طول پاره‌خط OA برابر a باشد سینوس زاویهٔ β چقدر است؟

....

۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد a به صورت $0 < a < 1$ بتوانید زاویه‌ای پیدا کنید که سینوس آن برابر a باشد.

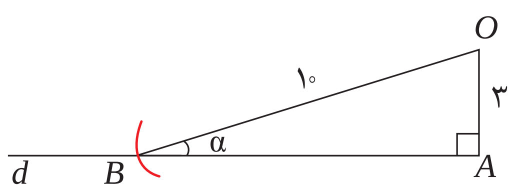
....

فعالیت بالا نشان می‌دهد که هر عدد بین ۰ و ۱ را می‌توان برابر با سینوس زاویه‌ای در نظر گرفت.

مثال ۶

زاویه‌ای بسازید که سینوس آن برابر ۰/۳ باشد.

پاره‌خط OA را به طول ۳ واحد مانند زیر رسم می‌کنیم. در نقطهٔ A خط d را عمود بر این پاره‌خط رسم می‌کنیم. به مرکز نقطهٔ O کمانی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ واحد را رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای که B می‌نامیم، قطع کند. زاویهٔ ABO در رأس B زاویهٔ مورد نظر است و با نقاله آن را اندازه می‌گیریم که تقریباً ۱۷ درجه است.



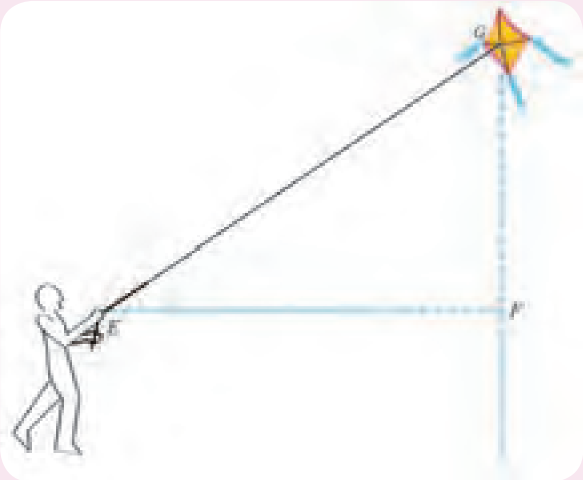
مسئله‌ها

۱- الف) سینوس زاویهٔ ۲۵ درجه را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب به طور تقریبی محاسبه کنید.

ب) یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که زاویهٔ رأس آن ۵۰ درجه باشد. اگر قاعدهٔ این مثلث ۱۰ سانتی‌متر باشد، طول ساق آن را تعیین کنید.

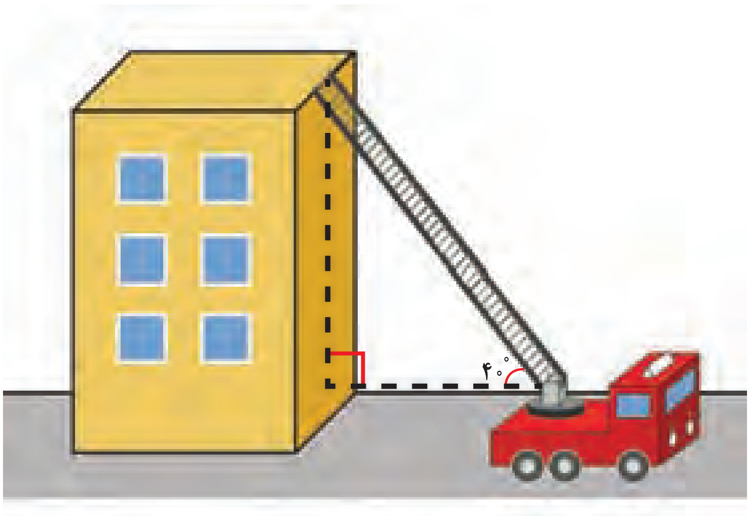
۲) سینوس چه زاویه‌ای برابر ۰/۸ است؟

۳) رضا بادبادکی را به هوا فرستاده است. فرض کنید ۴۵ متر نخ بادبادک او رها شده است. طبق شکل، زاویهٔ نخ با سطح افق ۳۹ درجه و فاصلهٔ دست رضا از سطح زمین، یک متر و شصت سانتی‌متر است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟



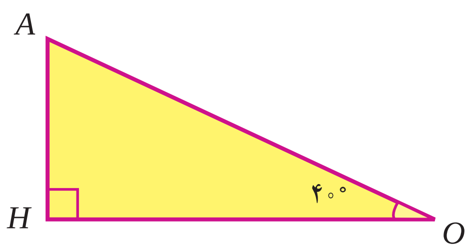
۶ـ۴ـ کسینوس یک زاویه

یک روز، دبیر ریاضی در کلاس داستانی دربارهٔ پله‌های نردبان ماشین آتش‌نشانی تعریف کرد. او گفت: دیروز برای خرید از منزل خارج شده بودم که متوجه شدم طبقهٔ اول یک ساختمان سه طبقه، آتش گرفته است. آتش در حال سرایت به طبقات بالاتر بود و همهٔ ساکنان ساختمان در نقطه‌ای در پشت‌بام جمع شده بودند. پای نردبان ماشین آتش‌نشانی در فاصله حدوداً ۱۵ متری ساختمان قرارداشت. ماشین آتش‌نشانی نردبان خود را با زاویهٔ تقریبی ۴۰ درجه نسبت به افق باز کرد تا به پشت‌بام رسید. آیا می‌توانید بگویید که نردبان ماشین آتش‌نشانی برای رسیدن به پشت‌بام چند متر باز شده بود؟



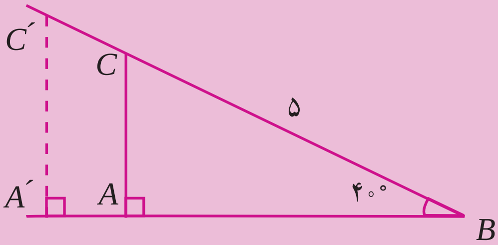
علی گفت: بهتر است یک شکل بکشیم و از روی آن، مسئله را حل کنیم. باید از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ‌آن ۴۰ درجه است، استفاده کنیم. اگر محل تجمع ساکنان ساختمان روی پشت‌بام نقطهٔ A و نقطهٔ ابتدای نردبان، نقطهٔ O و H نقطه‌ای در روی ساختمان باشد به طوری که OH سطح افق را نشان دهد، مثلث زیر را می‌توان رسم کرد.

طول OH و اندازهٔ زاویهٔ رأس O را می‌دانیم ولی طول AO را نمی‌دانیم. دبیر گفت: برای ادامهٔ حل این مسئله می‌توانید از فعالیت ۷ کمک بگیرید.



فعالیت ۷

۱) یک زاویهٔ ۴۰ درجه رسم کنید و مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد.



....

....

۲) با اندازه‌گیری اضلاع به کمک خط‌کش، نسبت $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

....

۳) مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری مانند $A'BC'$ با همین زاویه و طول وتر متفاوت رسم کنید و نسبت $\frac{A'B}{BC'}$ را محاسبه کنید، آیا مقدار این نسبت با نسبت بند (۲) متفاوت است؟ چرا؟ (در حالت کلی استدلال کنید).

....

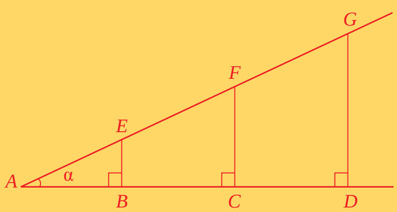
۴) به کمک نسبتی که در بالا به‌دست آورده‌اید، طول نردبان آتش‌نشانی را حساب کنید.

....

فعالیت بالا نشان می‌دهدکه همهٔ نسبت‌های به‌دست آمده، با هم مساوی‌اند و مقدار آنها وابسته به زاویه ۴۰ درجه است. این نسبت را **کسینوس زاویهٔ ۴۰** درجه می‌نامند. برای هر زاویهٔ تند دیگری نیز می‌توان این محاسبات را انجام داد.

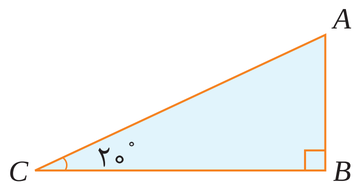
تعریف

برای هر زاویهٔ تند α مانند شکل زیر، نسبت‌های $\frac{AD}{AG}$ و $\frac{AC}{AF}$ و $\frac{AB}{AE}$ طبق تشابه مثلث‌ها، با هم مساوی‌اند. مقدار این نسبت‌های برابر را **کسینوس زاویه** α می‌نامند و آن را با $\cos\alpha$ نشان می‌دهند.



$$\cos\alpha = \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AG} = \frac{\text{طول ضلع مجاور } \alpha}{\text{طول وتر}}$$

مثال ۷



مقدار تقریبی کسینوس ۲۰ درجه را محاسبه کنید.

ابتدا یک مثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواه را که یک زاویهٔ ۲۰ درجه داشته باشد، رسم می‌کنیم. در شکل روبه‌رو، زاویهٔ رأس C، ۲۰ درجه است. سپس به وسیلهٔ خط‌کش طول ضلع BC و وتر AC را اندازه‌گیری می‌کنیم و نسبت $\frac{BC}{AC}$ را حساب می‌کنیم. نتیجهٔ تقریبی این محاسبه نشان می‌دهد که $\cos 20^\circ \approx 0/93$.

کاردرکلاس ۶

۱) یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین رسم کنید.

الف) نشان دهید زاویه‌های تند این مثلث ۴۵ درجه‌اند.

....

ب) اگر طول ساق‌ها را به اندازهٔ یک واحد در نظر بگیریم، طول وتر این مثلث چقدر است؟

....

پ) با استفاده از محاسبات بالا، سینوس و کسینوس و تانژانت زاویهٔ ۴۵ درجه را به‌دست آورید.

....

۲) مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم کنید.

الف) طول ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ رسم شده را حساب کنید.

....

ب) با استفاده از محاسبات انجام شده، سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه را به‌دست آورید.

....

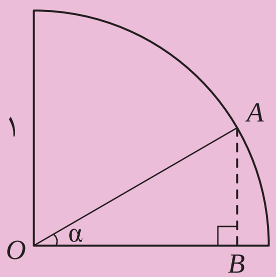
۳) به کمک دو سؤال بالا، جدول روبه‌رو را کامل کنید.

زاویه / نسبت مثلثاتی	۶۰ درجه	۴۵ درجه	۳۰ درجه
سینوس			
کسینوس			
تانژانت			

دربارهٔ مفهوم کسینوس نیز این سؤال پیش می‌آید که تغییر اندازهٔ یک زاویه چه تأثیری در اندازهٔ کسینوس آن زاویه دارد. فعالیت زیر می‌تواند در پیدا کردن جواب این سؤال به شما کمک کند.

فعالیت ۸

یک ربع دایره به شعاع واحد، مانند شکل زیر، رسم کنید.



نقطهٔ A را روی ربع دایره انتخاب کنید. طول پاره‌خط OB چه رابطه‌ای با زاویهٔ α دارد؟

۱) با کم یا زیاد شدن زاویهٔ α، کسینوس آن چه تغییری می‌کند؟

۳) کسینوس زاویهٔ α چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۴) با نزدیک شدن زاویهٔ α به صفر، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

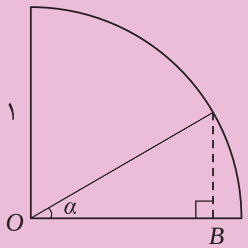
۵) با نزدیک شدن زاویهٔ α به ۹۰ درجه، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

فعالیت بالا نشان می‌دهد که کسینوس زاویه‌های تند، اعدادی بین صفر و ۱ هستند. با بزرگ شدن زاویه، کسینوس آن زاویه کوچک‌تر می‌شود.

اگر عددی مانند b به صورت $0 < b < 1$ در نظر بگیریم، آیا زاویه‌ای وجود دارد که کسینوس آن برابر b شود؟ با انجام فعالیت زیر می‌توان به این سؤال پاسخ داد.

فعالیت ۹

ربع دایره‌ای به شعاع واحد، مانند شکل روبه‌رو رسم کنید.



۱) اگر طول پاره‌خط BO برابر b باشد، کسینوس زاویهٔ α چقدر است؟

....

۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد b به صورت $0 < b < 1$ بتوان زاویه‌ای پیدا کرد که کسینوس آن برابر b باشد.

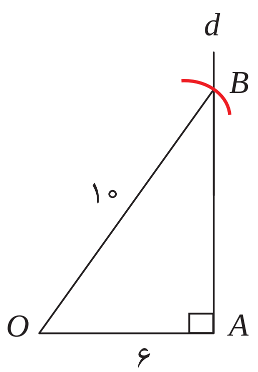
....

فعالیت ۹ نشان می‌دهد که هر عدد بین ۰ و ۱ می‌تواند برابرکسینوس زاویه‌ای باشد.

مثال ۸

زاویه‌ای بسازید که کسینوس آن برابر ۰/۶ باشد.

مانند شکل زیر، پاره خطی (OA) به طول ۶ واحد رسم می‌کنیم. در نقطهٔ A، خط d را عمود بر این پاره‌خط رسم می‌کنیم. کمانی به مرکز O و شعاع ۱۰ واحد رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای که B می‌نامیم، قطع کند. زاویهٔ به‌دست آمده در رأس O جواب مسئله است. اگر با نقاله آن را اندازه بگیریم تقریباً ۵۳ درجه است.



مسئله‌ها

۱) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب، کسینوس زاویه‌های ۱۵و ۷۵ درجه را حساب کنید.

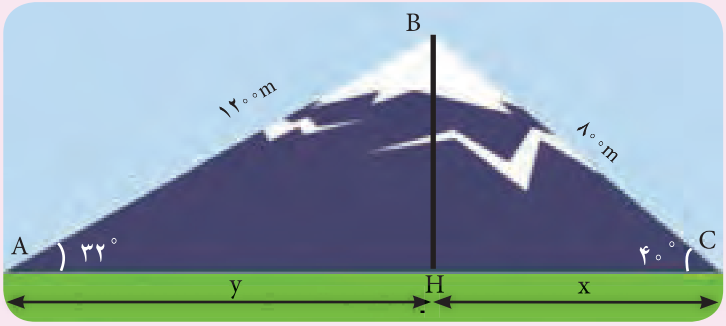
۲) زمین بزرگی به شکل مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ ۱۰۰ متر و با زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ ۵۰ درجه است.

الف) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب ، از طریق اندازه‌گیری با خط‌کش، کسینوس زاویهٔ ۵۰درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

ب) طول اضلاع زمین مثلث شکل را بیابید.

پ) مساحت زمین را بیابید.

۳) حسن و علی در یک روز تعطیل می‌خواهند از دو نقطهٔ متفاوت و هم‌سطح در دو مسیر مختلف از پای کوه تا قلهٔ آن بروند. علی با زاویهٔ ۳۲ درجه و حسن با زاویهٔ ۴۰ درجه از کوه بالا می‌روند. علی پس از طی ۱۲۰۰ متر و حسن پس از طی ۸۰۰ متر به قلهٔ کوه می‌رسند. فاصلهٔ علی و حسن را در پای کوه محاسبه کنید.



۴) درستی یا نادرستی روابط زیر را بررسی کنید.

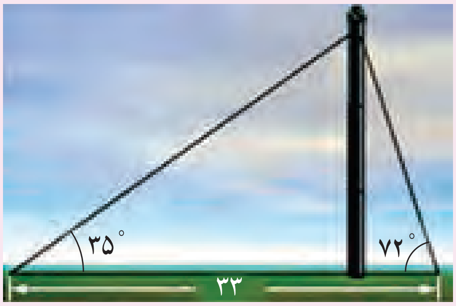
الف) $\cos ۲۰^\circ < \cos ۴۰^\circ$

ب) $\tan ۲۰^\circ < \tan ۳۰^\circ$

پ) $\sin ۳۰^\circ < \sin ۲۰^\circ$

۵) مقدار عددی عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

$$A=\frac{\sin ۶۰^\circ+\tan ۴۵^\circ-\cos ۳۰^\circ}{۱+\sin ۳۰^\circ}$$ و $$B=\frac{\tan ۶۰^\circ+۲\cos ۳۰^\circ-۲\sqrt{۳}}{۱+\sin ۶۰^\circ}$$



۶) دو کابل فلزی یک برج مخابراتی را نگه داشته‌اند. زاویهٔ بین زمین و کابل‌ها به ترتیب ۳۵ و ۷۲ درجه و فاصلهٔ بین محل اتصال دو کابل در زمین، ۳۳ متر است. طول هر یک از این کابل‌ها چقدر است؟

....

۷) با انجام محاسبات عددی، درستی روابط زیر را بررسی کنید:

الف) $\cos ۶۰^\circ=۲\cos ۳۰^\circ$ ب) $\sin ۶۰^\circ<۲\sin ۳۰^\circ$

پ) $\cos ۶۰^\circ<۲\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ$ ت) $\tan ۶۰^\circ+\tan ۳۰^\circ=\frac{۲}{\sin ۶۰^\circ}$

۸) سمت راست تساوی‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $A=\sin ۳۰^\circ+\cos ۳۰^\circ$

ب) $B=\frac{۲\cos ۳۰^\circ-۲\sin ۳۰^\circ}{۲\tan ۴۵^\circ+۳\cos ۶۰^\circ}$

پ) $C=۱-۲\sin ۳۰^\circ$