فصل هفتم

مسّاحی

هدف‌های رفتاری : از دانش‌آموز انتظار می‌رود در پایان این فصل :

۱ــ فرمول مساحت شکل‌های هندسی را بیان کند.

۲ــ روش مثلث‌بندی را برای تعیین مساحت یک قطعه زمین، انجام دهد.

۳ــ روش خط هادی را برای تعیین مساحت یک قطعه زمین، انجام دهد.

۴ــ روش ذوزنقه‌های هم ارتفاع را برای تعیین مساحت یک قطعه زمین، انجام دهد.

۵ــروش تبدیل مساحت به دست آمده از نقشه را به مساحت واقعی یک قطعه زمین، با توجه به مقیاس نقشه، توضیح داده، انجام دهد.

۶ــ روش تعیین مساحت را با کاغذ میلی‌متری توضیح داده، انجام دهد.

۷ــ روش تقریبی جبران را برای تعیین مساحت یک قطعه زمین، انجام دهد.

۸ــ روش تعیین مساحت را با استفاده از دستگاه پلانیمتر، انجام دهد.

۱ــ۷ــ فرمول مساحت شکل‌های هندسی

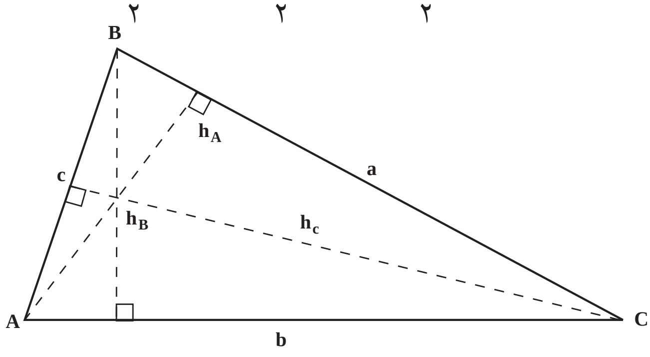
۱ــ۱ــ۷ــ فرمول مساحت مثلث : با توجه به شکل ۱ــ۷ این‌حالت‌ها را درنظر می‌گیریم :

الف ــفرمول مساحت مثلث با داشتن قاعده و ارتفاع :

$$S=\frac{۱}{۲}AC.h_B=\frac{۱}{۲}AB.h_C=\frac{۱}{۲}BC.h_A$$

ب ــ فرمول مساحت مثلث با داشتن دو ضلع و زاویه‌ی بین آن‌ها :

$$S=\frac{۱}{۲}a.b.\sin C=\frac{۱}{۲}a.c.\sin B=\frac{۱}{۲}b.c.\sin A$$



شکل ۱ــ۷

ج ــ فرمول مساحت مثلث با داشتن سه ضلع (دستور هرون) :

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad و \quad P=\frac{a+b+c}{۲}$$

۲ــ۱ــ۷ــ فرمول مساحت مربعی به ضلع a : $S=a^۲$

۳ــ۱ــ۷ــ فرمول مساحت مستطیلی به طول a و عرض b :

$$S=a.b$$

۴ــ۱ــ۷ــ فرمول مساحت متوازی‌الاضلاعی به قاعده‌ی a و ارتفاع h :

$$S=a.h$$

۵ــ۱ــ۷ــ فرمول مساحت لوزی به قطرهای a و b :

$$S=\frac{a.b}{۲}$$

۶ــ۱ــ۷ــ فرمول مساحت ذوزنقه با قاعده‌های a و b و ارتفاع h :

$$S=\frac{h(a+b)}{۲}$$

۷ــ۱ــ۷ــ فرمول مساحت دایره به شعاع r :

$$S = \pi . r^{۲}$$

۸ــ۱ــ۷ــ فرمول مساحت بیضی به قطرهای a و b :

$$S = \pi . a . b$$

در صورتی که یک قطعه زمین دارای یکی از اشکال هندسی یاد شده باشد مساحت آن به‌راحتی با فرمول‌های مربوط محاسبه می‌گردد و اگر یک قطعه زمین دارای شکل هندسی منظمی نباشد می‌توانیم آن را به قطعات کوچکتر هندسی تقسیم نموده، مساحت آن‌ها را پیدا کرده،با هم جمع نماییم تا مساحت قطعه زمین با شکل غیرهندسی تعیین شود. چگونگی این روش و سایر روش‌های تعیین مساحت شکل‌های غیرهندسی را در این فصل توضیح می‌دهیم.

۲ــ۷ــ روش‌های تعیین مساحت یک قطعه زمین با شکل هندسی نامنظم

برای به‌دست آوردن مساحت قطعه زمین‌هایی که می‌تواند به شکل‌های متفاوتی مطابق شکل ۲ــ۷ باشد روش‌های متنوعی وجود دارد که در زیر به چند نمونه از این روش‌ها اشاره می‌شود.

۱ــ۲ــ۷ــ روش مثلث‌بندی : معمولاً قطعه زمین‌ها به‌صورت چند ضلعی نامنظم می‌باشند که در این‌صورت ممکن است از روش مثلث‌بندی برای برداشت آن استفاده شده باشد. در این حالت حتی اگر نقشه نیز تهیه نشده باشد به وسیله کروکی و برداشت‌های انجام شده می‌توانیم مساحت هر مثلث را محاسبه نموده از جمع مساحت‌های مثلث‌ها،مساحت شکل موردنظر را محاسبه نماییم. شکل ۲ــ۷ مثالی ساده از یک قطعه زمین پنج‌ضلعی است که به روش مثلث‌بندی برداشت شده است و می‌خواهیم مساحت آن را محاسبه نماییم :

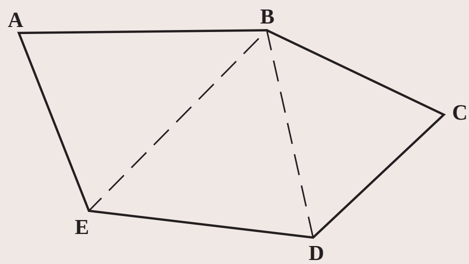
حل : ابتدا مساحت هر مثلث را محاسبه می‌کنیم.

$$S_{ABE} = \sqrt{P(P-AB)(P-AE)(P-BE)}$$

و

$$P = \frac{AB+AE+BE}{۲}$$

کروکی	اندازه‌ی طول به متر	نام طول
	۴۵/۳۸	AB
	۳۸/۷۲	BC
	۳۹/۴۱	CD
	۴۴/۴۵	DE
	۴۲/۹۲	EA
	۴۶/۳۷	BE
	۳۹/۹۸	BD



شکل ۲ــ۷

$$P = \frac{۴۵/۳۸ + ۴۲/۹۲ + ۴۶/۳۷}{۲} = ۶۷/۳۳۵$$

$$S_{ABE} = \sqrt{\begin{matrix}۶۷/۳۳۵(۶۷/۳۳۵ - ۴۵/۳۸) \\ (۶۷/۳۳۵ - ۴۲/۹۲)(۶۷/۳۳۵ - ۴۶/۳۷)\end{matrix}}$$

$$S_{ABE} = ۸۶۹/۸۸۷۲ \quad \text{متر مربع}$$

و

$$S_{BDE} = \sqrt{P(P-BD)(P-DE)(P-BE)}$$

$$P = \frac{BD+DE+BE}{۲}$$

$$P=\frac{۳۹/۹۸+۴۴/۴۵+۴۶/۳۷}{۲}=۶۵/۴$$

$$S_{BDE}=\sqrt{۶۵/۴(۶۵/۴-۳۹/۹۸)(۶۵/۴-۴۴/۴۵)(۶۵/۴-۴۶/۳۷)}$$

$$=۸۱۴/۱۱۹۳\ m^{۲}$$

و

$$S_{BCD}=\sqrt{P(P-BC)(P-CD)(P-BD)}$$

$$P=\frac{BC+CD+BD}{۲}$$

$$P=\frac{۳۸/۷۲+۳۹/۴۱+۳۹/۹۸}{۲}=۵۹/۰۵۵$$

$$S_{BCD}=\sqrt{۵۹/۰۵۵(۵۹/۰۵۵-۳۸/۷۲)(۵۹/۰۵۵-۳۹/۴۱)(۵۹/۰۵۵-۳۹/۹۸)}$$

$$=۶۷۰/۸۲۴۲\ m^{۲}$$

$$S=S_{ABE}+S_{BDE}+S_{BCD}=۸۶۹/۸۸۷۲+$$

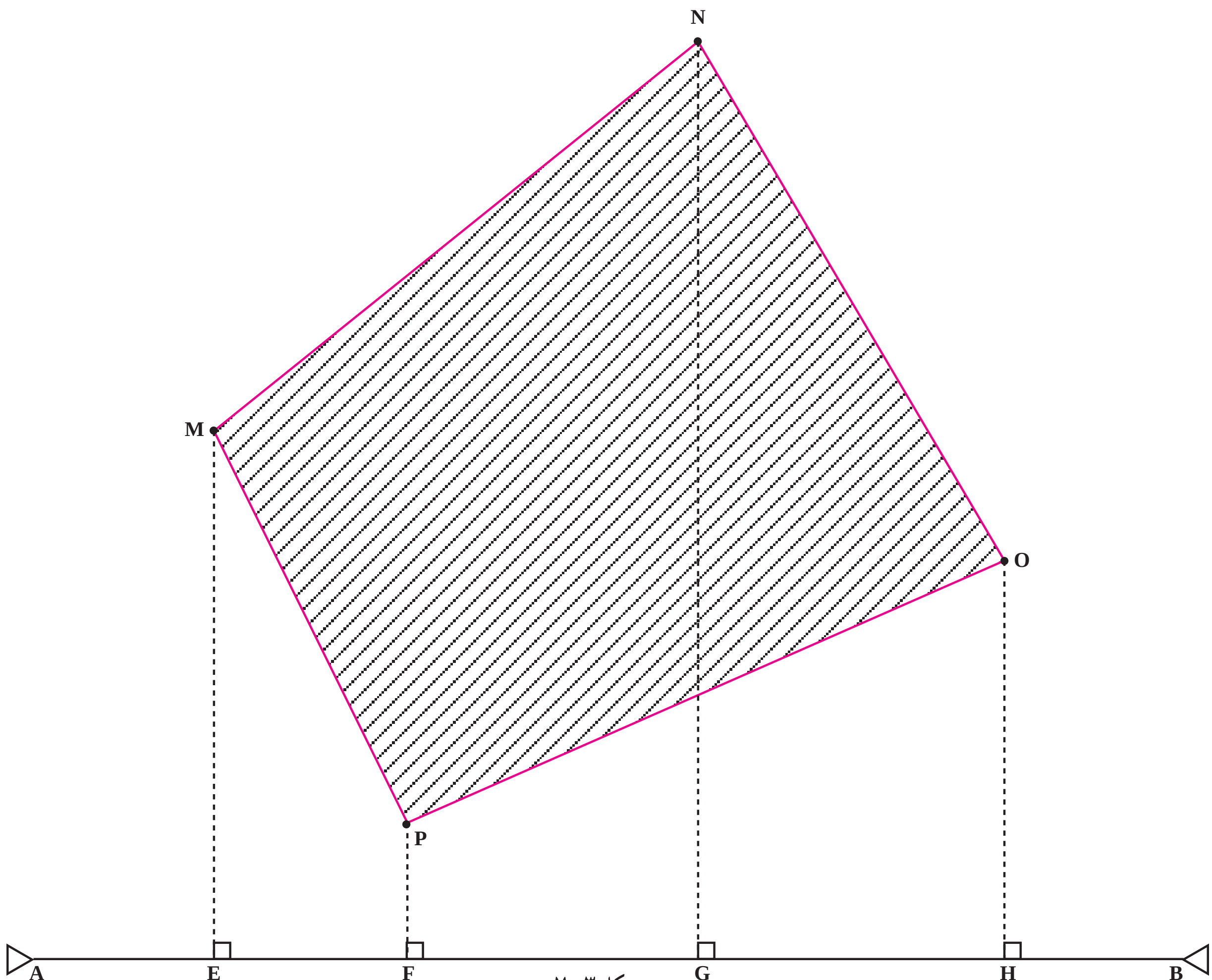
$$۸۱۴/۱۱۹۳+۶۷۰/۸۲۴۲=۲۳۵۴/۸۳۰۷\ m^{۲}$$

۲ــ۲ــ ۷ــ محاسبه‌ی مساحت به‌روش خط هادی :

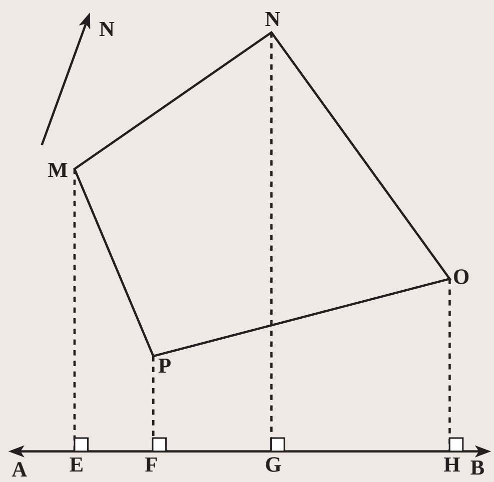
هرگاه هنگام برداشت یک قطعه زمین از روش خط هادی استفاده کرده باشیم، با استفاده از برداشت‌ها و کروکی که تهیه شده حتی قبل از تهیه‌ی نقشه نیز می‌توانیم مساحت قطعه زمین و مساحت عوارض را محاسبه نماییم.

به‌عنوان یک مثال حل‌شده‌ی ساده از شکل ۳ــ۷ استفاده می‌نماییم.

طول‌های اندازه‌گیری‌شده در روی خط هادی مربوط به شکل ۳ــ۷ را در جدول موجود در شکل ۴ــ۷ مشاهده می‌نمایید.



شکل ۳ــ۷

کروکی	طول عمود	فاصله‌ی پای عمود از مبدأ A	فاصله‌ی پای عمود از نقطه‌ی قبلی	نام نقطه
	۷۱/۸۲	۲۱/۸۰	۲۱/۸۰	M
	۱۷/۲۸	۴۳/۷۵	۲۱/۹۵	P
	۱۲۴/۶۵	۷۷/۸۷	۳۴/۱۲	N
	۵۴/۷۳	۱۳۸/۶۲	۴۱/۷۵	O

شکل ۴ـ۷

می‌خواهیم مساحت چهارضلعی MNOP را محاسبه نماییم. با توجه به شکل ۴ـ۷ کافی است ازمساحت EMNOH، مساحت EMPOH را کم کنیم، به‌عبارت دیگر داریم :

$$\text{مساحت } MNOP = \text{مساحت } EMNOH - \text{مساحت } EMOPH$$

برای محاسبه‌ی مساحت EMNOH داریم :

$$\text{مساحت ذوزنقه } GNOH + \text{مساحت ذوزنقه } EMNG = \text{مساحت } EMNOH$$

$$\text{مساحت } EMNOH = \frac{۱}{۲}(ME+NG).EG + \frac{۱}{۲}(NG+OH).GH$$

با استخراج اندازه‌های فوق از جدول ۴ـ۷ و جای‌گذاری در فرمول، داریم :

$$\text{مساحت } EMNOH = \frac{۱}{۲}(۷۱/۸۲+۱۲۴/۶۵)\times(۲۱/۹۵+۳۴/۱۲)+\frac{۱}{۲}(۱۲۴/۶۵+۵۴/۷۳)\times(۴۱/۷۵)$$

$$\text{مساحت } EMNOH = ۵۵۰۸/۰۳۶۴۵ + ۳۷۴۴/۵۵۷۵ = ۹۲۵۲/۵۹۴m^{۲}$$

برای محاسبه‌ی مساحت EMPOH داریم :

$$\text{مساحت } EMPOH = \text{مساحت ذوزنقه } EMPF + FPOH$$

مساحت ذوزنقه

$$\text{مساحت } EMPOH = \frac{۱}{۲}(ME+PF).EF + \frac{۱}{۲}(PF+OH).FH$$

با استخراج اندازه‌های مورد نیاز از جدول ۴ـ۷ و جای‌گذاری در فرمول، داریم :

$$\text{مساحت } EMPOH = \frac{۱}{۲}(۷۱/۸۲+۱۷/۲۸)\times(۲۱/۹۵)+\frac{۱}{۲}(۱۷/۲۸+۵۴/۷۳)\times(۳۴/۱۲+۴۱/۷۵)$$

$$\text{مساحت } EMPOH = ۹۷۷/۸۷۲۵ + ۲۷۳۱/۶۹۹۳۵ = ۳۷۰۹/۵۷۲\ m^{۲}$$

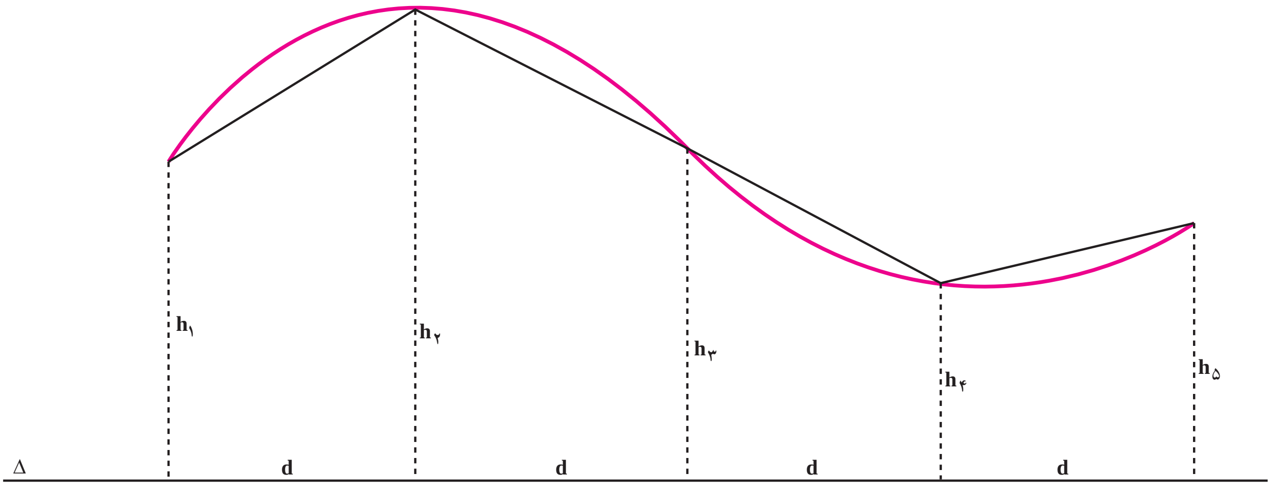
برای محاسبه مساحت MNOP داریم :

$$\text{مساحت } MNOP = \text{مساحت } EMNOH - \text{مساحت } EMPOH = ۹۲۵۲/۵۹۴ - ۳۷۰۹/۵۷۲ = ۵۵۴۳/۰۲۲m^{۲}$$

۳ـ۲ـ۷ـ روش ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع : هرگاه تمام یا قسمتی از محدوده‌ی منطقه‌ای که می‌خواهیم مساحت آن را محاسبه نماییم منحنی‌الخط باشد یک روش تقریبی برای محاسبه

مساحت، تقسیم آن منطقه به ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع و سپس جمع‌کردن مساحت آن ذوزنقه‌ها می‌باشد. در شکل ۵ــ۷ می‌خواهیم مساحت سطح بین خط منحنی و خط هادی را محاسبه کنیم. ابتدا این مساحت را به چهار ذوزنقه تبدیل کرده‌ایم که ارتفاع این ذوزنقه‌ها با هم مساوی است. همانطورکه در شکل ۵ــ۷ ملاحظه می‌کنید ۵ قاعده : $h_۱ , h_۲ , h_۳ , h_۴ , h_۵$ و ۴ ذوزنقه با ارتفاع یکسان d، داریم.

مثال : در شکل ۵ــ۷ اگر اندازه‌ی d و قاعده‌های $h_۱$ تا $h_۵$ را به شرح زیر داده باشند، مطلوب است مساحت سطح زیر منحنی :



شکل ۵ــ۷

$$d = ۱۰m, h_۱ = ۴۲m, h_۲ = ۶۲m, h_۳ = ۴۴m,$$

$$h_۴ = ۲۷m, h_۵ = ۳۵m$$

حل :

$$\text{مساحت ذوزنقه اول} = \frac{۱}{۲}(۴۲+۶۲)m \times ۱۰m = ۵۲۰m^۲$$

$$\text{مساحت ذوزنقه دوم} = \frac{۱}{۲}(۶۲+۴۴)m \times ۱۰m = ۵۳۰m^۲$$

$$\text{مساحت ذوزنقه سوم} = \frac{۱}{۲}(۴۴+۲۷)m \times ۱۰m = ۳۵۵m^۲$$

$$\text{مساحت ذوزنقه چهارم} = \frac{۱}{۲}(۲۷+۳۵)m \times ۱۰m = ۳۱۰m^۲$$

مساحت سطح زیر منحنی تقریباً برابر است با مجموع مساحت این ذوزنقه‌ها

$$\text{مساحت سطح زیر منحنی} = (۵۲۰+۵۳۰+۳۵۵+۳۱۰)m^۲ = ۱۷۱۵m^۲$$

برای آن‌که بتوانیم از این روش در همه‌ی حالت‌ها استفاده نماییم، بهتر است که آن‌را در یک حالت کلی تعریف نماییم. برای رسیدن به این حالت کلی، مساحت ذوزنقه‌های شکل ۵ــ۷ را یک بار دیگر بدون عددگذاری بدست آورده، با هم جمع می‌کنیم :

$$\text{مساحت ذوزنقه اول} = \frac{۱}{۲}(h_۱ + h_۲)d$$

$$\text{مساحت ذوزنقه دوم} = \frac{۱}{۲}(h_۲ + h_۳)d$$

$$\text{مساحت ذوزنقه سوم} = \frac{۱}{۲}(h_۳ + h_۴)d$$

$$\text{مساحت ذوزنقه چهارم} = \frac{۱}{۲}(h_۴ + h_۵)d$$

مساحت سطح زیر منحنی تقریباً برابر است با مجموع مساحت این ذوزنقه‌ها :

$$\text{مساحت سطح زیر منحنی} = \frac{۱}{۲}(h_۱ + ۲h_۲ + ۲h_۳ + ۲h_۴ + h_۵) \times d$$

$$= (\frac{۱}{۲}h_۱ + h_۲ + h_۳ + h_۴ + \frac{۱}{۲}h_۵) \times d$$

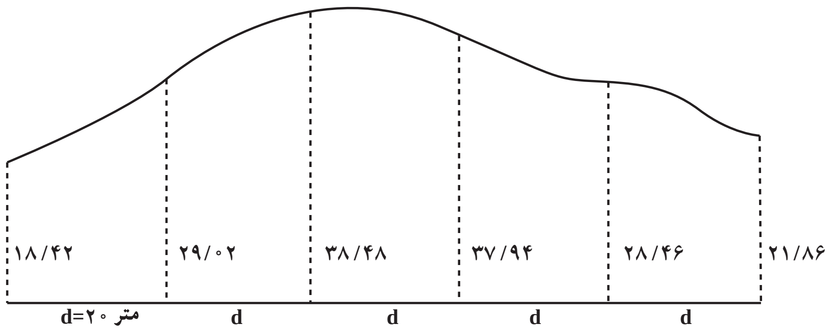
$$=d(\frac{h_۱+h_۵}{۲}+h_۲+h_۳+h_۴)$$

یعنی مساحت سطح زیر منحنی برابر است با نصف مجموع قاعده‌های اول و آخر به‌علاوه سایر قاعده‌ها ضربدر ارتفاع؛ به‌عبارت دیگر، اگر ارتفاع اول $h_۱$ و ارتفاع آخر h_n و ارتفاع همه‌ی ذوزنقه‌ها d باشد، داریم :

$$S=d(\frac{h_۱+h_n}{۲}+h_۲+h_۳+\ldots+h_{n-۱})$$

به مثال دیگری در این زمینه توجه کنید.

در شکل ۶ــ۷ می‌خواهیم مساحت بین خط هادی و محدوده‌ی منحنی را محاسبه نماییم :



شکل ۶ــ۷

حل : طبق فرمول داریم :

$$S=d(\frac{h_۱+h_n}{۲}+h_۲+h_۳+\ldots+h_{n-۱})$$

$$S=۲۰(\frac{۱۸/۴۲+۲۱/۸۶}{۲}+۲۹/۰۲+۳۸/۴۸+$$

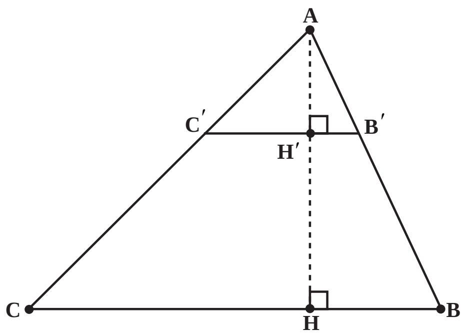
$$۳۷/۹۴+۲۸/۴۶)=۳۰۸۰/۸۰m^۲$$

سه روش قبلی دارای این خصوصیت بودند که تنها با داشتن کروکی و برداشت‌های انجام شده قادر به تعیین مساحت قطعه زمین‌ها بودیم. در این قسمت می‌خواهیم روش‌هایی را مطرح کنیم که برای تعیین مساحت یک قطعه زمین نیاز به نقشه‌ی آن قطعه زمین داریم؛ بنابراین، از روش‌هایی صحبت خواهیم کرد که مساحت قطعه زمین را از روی نقشه‌ی آن تعیین می‌نمایند و لازم است برای به‌دست آوردن مساحت واقعی آن قطعه زمین با توجه به مقیاس نقشه، محاسباتی را انجام دهیم.

قبلاً یادآوری این نکته از هندسه ضروری به نظر می‌رسد که :

«اگر در دو شکل متشابه نسبت طول‌ها K باشد، نسبت مساحت‌ها $K^۲$ می‌باشد».

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K\Rightarrow\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=K^۲$$



شکل ۷ــ۷

مثال : اگر مساحت یک قطعه زمین روی نقشه‌ای با مقیاس $\frac{1}{5000}$ ، $8\,cm^2$ باشد مساحت واقعی این قطعه زمین چند هکتار است؟

حل :

$$8cm^2 \times 5000^2 = 200,000,000\,cm^2$$

هر مترمربع ۱۰۰۰۰ سانتی‌متر مربع است پس :

$$200000000\,cm^2 \div 10000 = 20000\,m^2$$

هر هکتار ۱۰۰۰۰ مترمربع است پس :

$20000\,m^2 \div 10000 = 2$ هکتار

یعنی مساحت واقعی این قطعه زمین ۲ هکتار می‌باشد.

۴ــ۲ــ۷ــ روش تعیین مساحت با کاغذ میلیمتری : در این روش لازم است که نقشه‌ی محدوده‌ی یک قطعه زمین روی کاغذ میلی‌متری موجود باشد و اگر نقشه روی کاغذ دیگری ترسیم شده باشد می‌توانیم آن را روی کاغذ میلی‌متری منتقل نماییم. شکل ۸ــ۷ پلان یک قطعه زمین را با مقیاس $\frac{1}{200}$ نشان می‌دهد که روی کاغذ میلی‌متری ترسیم شده است. با شمردن تعداد مربع‌های کامل و پهلوی هم گذاشتن مربع‌های ناقص مساحت منطقه را در روی نقشه برحسب cm^2 یا mm^2 به دست آورده با کمک مقیاس نقشه، مساحت واقعی قطعه زمین را محاسبه می‌نماییم.

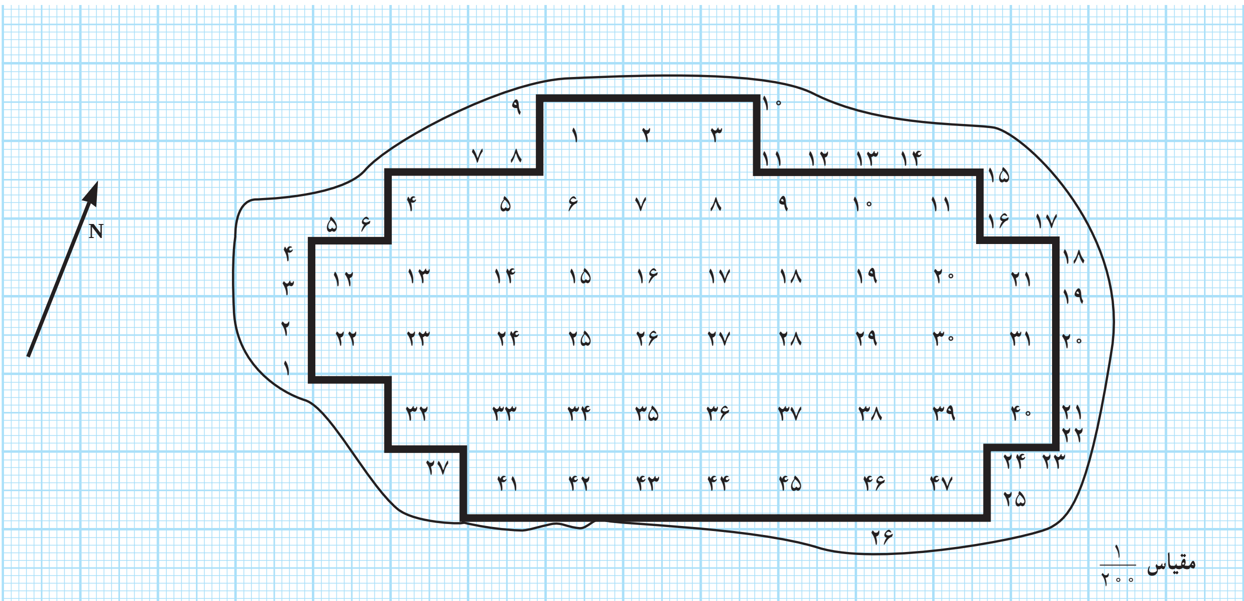
تعداد مربع‌های کامل ۴۷ عدد می‌باشد؛ یعنی : $47\,cm^2$

تعداد مربع‌های کوچک (یک چهارم مربع کامل) ۲۸ عدد می‌باشد :

$$28 \div 4 = 7\,cm^2$$

بقیه‌ی قسمت‌های قطعه زمین را روی هم می‌گذاریم تا معلوم شود برابر چند مربع کوچک هستند که به تقریب تعداد آن‌ها ۲۹ مربع کوچک است؛ پس :

$$29 \div 4 = 7/25\,cm^2$$



شکل ۸ــ۷

بنابراین، جمعاً مساحت منطقه برابر است با :

$$S = 47 + 7 + 7/25 = 61/25\,cm^2$$

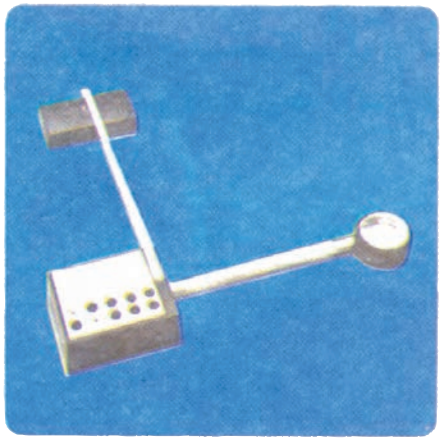
اگر در مربع عدد مقیاس نقشه ضرب کنیم داریم :

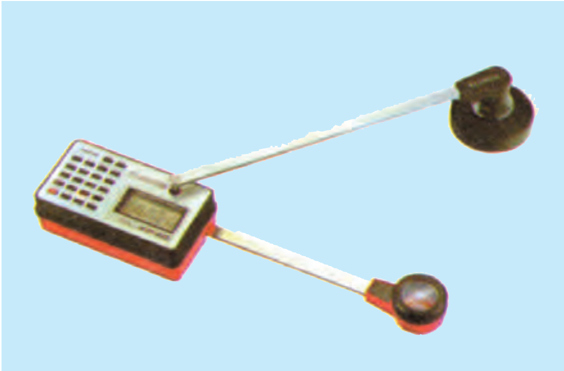
$$61/25\,cm^2 \times 200^2 = 2450000\,cm^2$$

پس مساحت منطقه برحسب مترمربع برابر است با :

$$2450000\,cm^2 \div 10000 = 245\,m^2$$

۵ــ۲ــ۷ــ روش تعیین مساحت با استفاده از پلانیمتر (planimeter) : برای اندازه‌گیری مساحت یک قطعه زمین که نقشه‌ی آن در دست باشد می‌توانیم از دستگاه پلانیمتر (مساحت‌سنج) استفاده کنیم. این دستگاه دارای انواع گوناگونی است که در شکل ۹ــ۷ چند نمونه از آن‌ها را ملاحظه می‌نمایید.





شکل ۹ــ۷ ــ دو نوع از انواع پلانیمتر

امروزه پلانیمترهای دیجیتال پیشرفت و توسعه فراوانی نموده و جایگزین پلانیمترهای مکانیکی شده است. این پلانیمترها، علاوه‌بر مساحت مختصات نقاط، طول پاره خط‌ها را نیز محاسبه می‌کنند. در شکل ۱۰ــ۷ یک نمونه از آن‌ها را مشاهده می‌نمایید.

شکل ۱۰ــ۷

به این پرسش‌ها پاسخ دهید

۱ــ فرمول مساحت شکل‌های هندسی را بیان کنید.

۲ــ روش مثلث‌بندی برای تعیین مساحت یک قطعه زمین چگونه است؟

۳ــ روش خط هادی برای تعیین مساحت یک قطعه زمین را توضیح دهید.

۴ــ روش ذوزنقه‌های هم‌ارتفاع را برای تعیین مساحت یک قطعه زمین توضیح دهید.

۵ــ روش تبدیل مساحت به دست آمده از نقشه را به مساحت واقعی یک قطعه زمین با توجه به مقیاس نقشه توضیح دهید.

۶ــ روش تعیین مساحت را با کاغذ میلی‌متری توضیح دهید.

۷ــ روش تعیین مساحت با استفاده از دستگاه پلانیمتر چگونه است؟

تمرین و عملیات

۱ــ با توجه به نقشه‌ی مدرسه که در جلسه‌ی قبل به روش خط هادی برداشت و ترسیم کرده‌اید،مساحت مدرسه را به روش خط هادی محاسبه نمایید.

۲ــبا توجه به نقشه‌ی مدرسه که به روش مثلث بندی تهیه نموده‌اید مساحت مدرسه را محاسبه کنید.

۳ــ نقشه‌ی مدرسه را روی کاغذ میلی‌متری منتقل نموده،مساحت مدرسه را از طریق شمردن مربع‌ها محاسبه نمایید.

۴ــ مساحت مدرسه را با دستگاه پلانیمتر به دست آورید.

۵ــ با رسم چند خط و ساختن یک شکل هندسی معین مثل مستطیل یا متوازی‌الاضلاع یا نظایر آن، مساحت مدرسه را از طریق روش جبران به دست آورید.

۶ــ مساحت‌های به دست آمده را با هم مقایسه نمایید.