فصل

۷ احتمال

عکاس: عبدالرضا سلیمانی

رحیم‌آباد ـ استان گیلان

احتمال در زندگی روزمره و در علوم گوناگون دارای کاربـردهـای متنوعی است. احتمال در پیش‌بینی آب و هوا نقش دارد و به ما در تصمیم‌گیری‌ها کمک می‌کند.

قانون احتمال کل

قانون احتمال کل

یادآوری

در پایه‌های قبل با مفهوم احتمال و برخی تعاریف مرتبط با آن آشنا شده‌اید. در زیر خلاصه‌ای از این مطالب آورده شده است.

۱ــ پدیده تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام، به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ فضای نمونه : مجموعهٔ تمام نتایج ممکنِ یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونهٔ آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ پیشامدها و اعمال روی آنها : فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. $P(A')=1-P(A)$

۵ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۶ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع دو پیشامد A و B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

۷ــ پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ به بیان دیگر $A\cap B=\varnothing$ در این صورت داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

۸ــ تعمیم پیشامدهای ناسازگار : پیشامدهای A_1 و A_2 و $\cdots$ و A_n را دو به دو ناسازگار گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم :

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

۹ــ احتمال شرطی : منظور از «احتمال A به شرط B» که آن‌را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad (P(B)\neq 0)$$

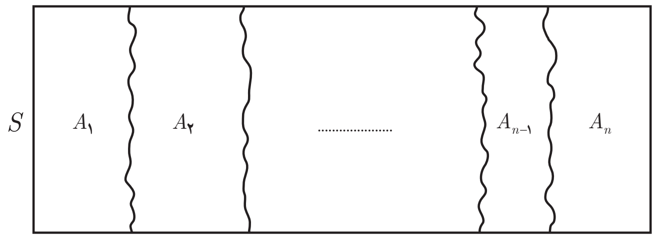
۱۰ــ پیشامدهای مستقل : دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$.

قانون احتمال کل

ــ افراز[۱] فرض کنیم $A_۱$ و $A_۲$ و $\cdots$ و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعهٔ S باشند، به‌گونه‌ای که اجتماع همهٔ آنها برابر S، و اشتراک هر دوتای آنها برابر $\varnothing$ باشد، در این‌صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک **افراز** روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم :

$$۱)\ A_۱ \cup A_۲ \cup \cdots \cup A_n = S \qquad (\bigcup_{i=۱}^{n} A_i = S)$$

$$۲)\ A_۱ \cap A_۲ = \varnothing\ ,\ A_۱ \cap A_۳ = \varnothing\ ,\ \cdots\ ,\ A_{n-۱} \cap A_n = \varnothing \qquad (A_i \cap A_j = \varnothing\ ,\ \underset{i \neq j}{۱ \leq i, j \leq n})$$

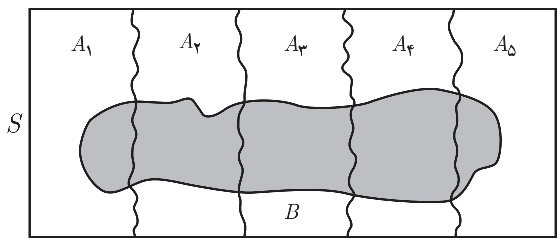


مثال : کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال : اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی مرکب و $C=\{۱\}$ باشند، در این صورت A ، B و C یک افراز روی مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند.

مثال : مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد اصم یک افراز روی مجموعهٔ اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

سؤال : اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد و $A_۱$ ، $A_۲$ ، $\cdots$ و A_n مانند آنچه گفته شد یک افراز روی S درست کنند. آیا پیشامدهای $A_۱$ ، $A_۲$ ، $\cdots$ و A_n دو به دو ناسازگاراند؟ چرا؟ آیا امکان دارد هیچ‌کدام از پیشامدهای $A_۱$ ، $A_۲$ ، $\cdots$ و A_n اتفاق نیفتند؟



فرض کنید پیشامدهای $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ ، $A_۴$ و $A_۵$ مانند شکل مقابل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S درست کرده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. در این صورت داریم :

$$B = (B \cap A_۱) \cup (B \cap A_۲) \cup (B \cap A_۳) \cup (B \cap A_۴) \cup (B \cap A_۵)$$

که در آن $B \cap A_i$ و $B \cap A_j$ برای هر $i \neq j$ ناسازگاراند. چرا؟

بنابراین داریم[۲] :

$$P(B) = P(B \cap A_۱) + P(B \cap A_۲) + P(B \cap A_۳) + P(B \cap A_۴) + P(B \cap A_۵) = \sum_{i=۱}^{۵} P(B \cap A_i)$$

اما از آنچه در احتمال شرطی مشاهده کردیم داریم :

$$P(B \mid A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i) P(B \mid A_i)$$

۱ــ مفهوم افراز صرفاً جهت استفاده در قانون احتمال کل بیان شده است و طرح سؤال از آن در ارزشیابی مدنظر نیست.

۲ــ نماد Σ که سیگما خوانده می‌شود برای نمایش جمع چند عبارت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

و بنابراین رابطهٔ پرکاربرد زیر حاصل خواهد شد :

$$P(B)=\sum_{i=۱}^{۵} P(A_i)P(B|A_i)$$

حال اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_۱$, $A_۲$, $\cdots$ و A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن **قانون احتمال کل** می‌گوییم :

$$P(B)=\sum_{i=۱}^{n} P(B\cap A_i)=\sum_{i=۱}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

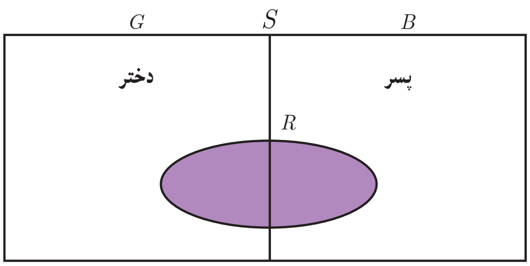
مثال : اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

قبل از اینکه مسئلهٔ فوق را حل کنیم فرض کنید یکی از اعداد زیر جواب مسئلهٔ فوق است. حدس بزنید کدام عدد می‌تواند جواب باشد؟ برای رد کردن گزینه‌هایی که فکر می‌کنید نادرست‌اند، دلیل بیاورید.

۱   ۰/۰۹   ۰/۰۸   ۰/۰۵۵   ۰/۰۳   ۰/۰۱   ۰

حل :

از آنجا که در ابتدا نسبت نوزادان بیمار به کل نوزادان را نداریم، لذا نمی‌توانیم به‌طور مستقیم احتمال مورد نظر را محاسبه نماییم. اما می‌دانیم نسبت نوزادان پسر بیمار به کل نوزادان پسر برابر $\frac{۸}{۱۰۰}$ و همین نسبت برای نوزادان دختر $\frac{۳}{۱۰۰}$ است و احتمال پسر (دختر) بودن نوزاد نیز $\frac{۱}{۲}$ است.



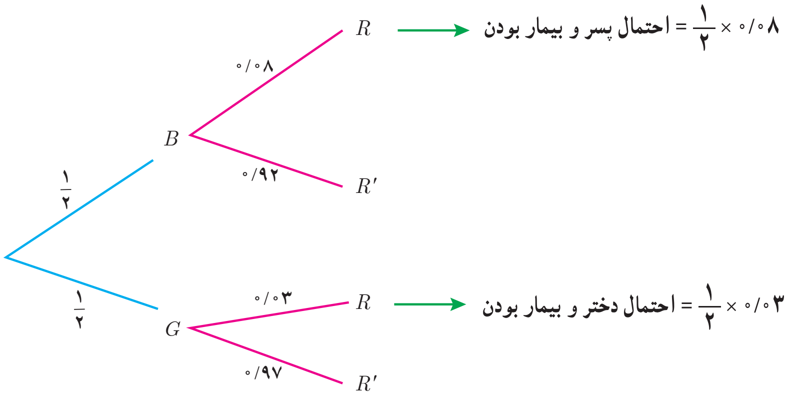
بنابراین با توجه به قانون احتمال کل خواهیم داشت :

P(بیمار بودن) = P(پسر بودن) . P(بیمار بودن|پسر بودن) + P(دختر بودن) . P(بیمار بودن|دختر بودن)

و اگر پیشامد پسر بودن را با B و دختر بودن را با G و بیمار بودن را با R نمایش دهیم داریم :

$$P(R)=P(B)P(R|B)+P(G)P(R|G)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۰۰}=\frac{۱۱}{۲۰۰}$$

برای حل این مثال می‌توان از نمودار درختی نیز استفاده کرد. به نمودار درختی زیر دقت کنید و علت نوشتن هر عدد و راه‌حل ارائه شده را شرح دهید.



$\Rightarrow$ احتمال بیمار بودن $=\frac{۱}{۲}\times ۰/۰۸+\frac{۱}{۲}\times ۰/۰۳$

مثال : ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهرهٔ قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهرهٔ انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

حل : پیشامد انتخاب ظرف‌ها را به‌ترتیب با $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ و $A_۴$ و پیشامد خارج شدن مهرهٔ قرمز را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین به دنبال یافتن $P(B)$ هستیم و داریم :

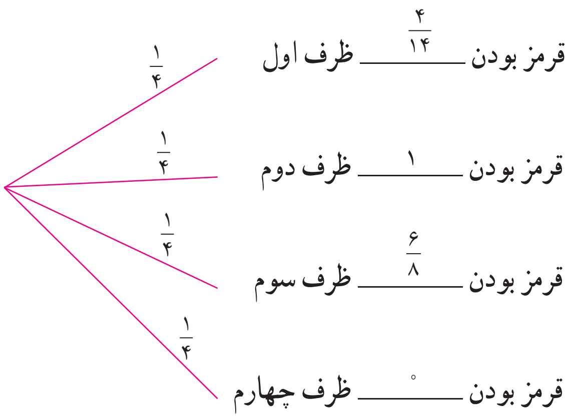
$$P(A_۱)=P(A_۲)=P(A_۳)=P(A_۴)=\frac{۱}{۴}$$

$$P(B|A_۱)=\frac{۴}{۱۴} \qquad P(B|A_۲)=۱ \qquad P(B|A_۳)=\frac{۶}{۸} \qquad P(B|A_۴)=۰$$

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)+P(A_۳)P(B|A_۳)+P(A_۴)P(B|A_۴)$$

$$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۱۴}+\frac{۱}{۴}\times ۱+\frac{۱}{۴}\times\frac{۶}{۸}+\frac{۱}{۴}\times ۰=\frac{۵۷}{۱۱۲}$$

با نمودار درختی به صورت زیر نیز می‌توان مسئله را حل کرد :

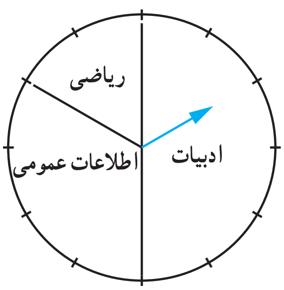


احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف اول باشد $\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۱۴}$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف دوم باشد $\frac{۱}{۴}\times ۱$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف سوم باشد $\frac{۱}{۴}\times\frac{۶}{۸}$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف چهارم باشد $\frac{۱}{۴}\times ۰$



مثال : سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال‌های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر بستهٔ سؤال‌های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر بستهٔ سؤال‌های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر بستهٔ سؤال‌های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربهٔ چرخان در شکل مقابل نوع سؤال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟

حل : اگر انتخاب ادبیات، ریاضی و اطلاعات عمومی را به‌ترتیب با $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ و برنده شدن سامان را با B نمایش دهیم، خواهیم داشت :

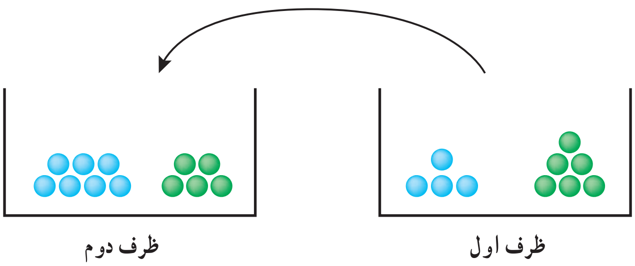
$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)+P(A_۳)P(B|A_۳)$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۹۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۶}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۸۵}{۱۰۰}=\frac{۵}{۶}$$

مثال : دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

حل : مهرهٔ انتخاب شده از ظرف اول یا سبز است و یا آبی. اگر این پیشامدها را به‌ترتیب با G و B و پیشامد انتخاب مهرهٔ سبز از ظرف دوم را با A نمایش دهیم خواهیم داشت : $P(B)=\frac{۴}{۱۰}$ و $P(G)=\frac{۶}{۱۰}$ و $P(A|G)=\frac{۶}{۱۳}$ (چرا؟) و $P(A|B)=\frac{۵}{۱۳}$ (چرا؟). در این صورت داریم :

$$P(A)=P(G)P(A|G)+P(B)P(A|B)=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۳}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۵۶}{۱۳۰}$$



تمرین‌ها

۱ دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبهٔ دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

۲ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به‌ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

۳ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

۴ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

۵ مینا در انتخاب رشتهٔ خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشتهٔ ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال اینکه رشتهٔ تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال اینکه رشتهٔ انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

۶ مدرسهٔ A سه برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم :

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟ ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

منابع

فارسی :

۱ــ استوارت، جیمز. (۲۰۱۲). حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ حمیدی، ارشک. جلد اول. تهران : انتشارات فاطمی (۱۳۹۵).

۲ــ اسدی، محمدباقر. رنجبری، علی. ریحانی، ابراهیم. طاهری تنجانی، محمد تقی. قربانی آرانی، مجتبی. مین‌باشیان، هادی. (۱۳۹۶). حسابان (۱) ــ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.

۳ــ اصلاح‌پذیر، بهمن. بروجردیان، ناصر. ریحانی، ابراهیم. طاهری‌تنجانی، محمدتقی و عالمیان، وحید. (۱۳۹۵). حسابان سال سوم متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۴ــ امیری، حمیدرضا. بیژن‌زاده، محمد حسن. بهرامی‌سامانی، احسان. حیدری‌قزلجه، رضا. داورزنی، محمود. ریحانی، ابراهیم. سیدصالحی، محمدرضا. قربانی آرانی، مجتبی. (۱۳۹۵). ریاضی (۱) ــ پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۵ــ ایرانمنش، علی. جمالی، محسن. ربیعی، حمیدرضا. ریحانی، ابراهیم. شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید. (۱۳۹۲). ریاضیات(۲) سال دوم آموزش متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۶ــ بهزاد، مهدی. رجالی، علی. عمیدی، علی و محمودیان، عبادالله. (۱۳۹۳). ریاضیات گسسته، دورهٔ پیش‌دانشگاهی، رشتهٔ علوم ریاضی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. چاپ بیستم. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۷ــ بیژن‌زاده، محمد حسن. رحیمی، زهرا. سیدصالحی، محمدرضا. شرقی، هوشنگ و نصیری، محمود. (۱۳۹۶)، هندسه (۲)، پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری، تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۸ــ بیژن‌زاده ، محمدحسن. پاشا، عین‌الله. یوحنایی، که‌کو. (۱۳۹۰). ریاضی عمومی. دوره پیش‌دانشگاهی، رشته تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۹ــ بیژن‌زاده، محمد حسن. عالمیان، وحید و فرشادی، غلامعلی. (۱۳۹۶). حساب دیفرانسیل و انتگرال، دورهٔ پیش‌دانشگاهی ــ رشتهٔ علوم ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. چاپ ششم. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۰ــ تلگینی، محمود. خردپژوه، فروزان. رجالی، (۱۳۷۸). حساب دیفرانسیل و انتگرال۱و۲. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۱ــ حاجی‌بابایی، جواد. رستمی، محمدهاشم. ظهوری زنگنه، بیژن. غلام‌آزاد، سهیلا. گویا، زهرا. نیوشا، جعفر. اصلاح‌پذیر، بهمن. بروجردیان، ناصر. رحمانی، عزیزه. رضوی، اسداله و میرمحمد رضایی، مرتضی. (۱۳۷۵). هندسه (۲)، سال سوم آموزش متوسطه، رشتهٔ ریاضی و فیزیک، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۲ــ حیدری قزلجه، رضا. خداکریم، سهیلا. ریحانی، ابراهیم. سید صالحی، محمدرضا. فریبرزی عراقی، محمدعلی. قصاب، علی و کمیجانی، آناهیتا. (۱۳۹۶). ریاضی (۲) ــ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۳ــ رحیمی، زهرا. سیدصالحی، محمدرضا. شرقی، هوشنگ و نصیری، محمود. (۱۳۹۵)، هندسه (۱)، پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطهٔ نظری، تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۴ــ رستمی، محمدهاشم. (۱۳۷۹). مکان هندسی، مکان‌های هندسی وابسته به نقطه‌های ثابت (یک نقطه، دو نقطه، ...، n نقطه)، تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه.

۱۵ــ رستمی، محمدهاشم. عطوفی، عبدالحمید. گودرزی، محمد. امیری، حمیدرضا. (۱۳۹۵). ریاضیات ۳. سال سوم علوم تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۶ــ ریحانی، ابراهیم. رحیمی، زهرا. کلاهدوز، فهیمه. نوروزی، سپیده. یافتیان، نرگس. شریف‌پور، شقایق. عابدی، ربابه. کتابدار، زهره. سیدصالحی، محمدرضا، امیری، محمدرضا. ایزدی، مهدی. زمانی، ایرج. بهرامی سامانی، احسان. پرنگ، حسن. مین‌باشیان، هادی و نیرو، محمد. (۱۳۹۵). تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب، پژوهش‌ها و منابع معتبر مرتبط با حوزهٔ یادگیری ریاضی، واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

۱۷ــ فروند، جان. (۱). آمار ریاضی. ترجمهٔ وحیدی اصل، قاسم و عمیدی، علی. تهران : انتشارات نشر دانشگاهی.

انگلیسی :

18- Berchie Holliday .(2008) California Algebra 2. Concepts, Skills, and Problem Solving. Glencoe/ McGraw-Hill.

19- Bittinger, M. L., Ellenbogen, D., & Surgent, S. A. (2000). Calculus and its applications. Reading, MA, Harlow: Addison-Wesley.

20- Briggs, W. L., Cochran, L., & Gillett, B. (2014). Calculus for scientists and engineers: Early transcendentals. Pearson Education.

21- Cohen D., Lee T. & Sklar D. (2010). Precalculus: A Problems-Oriented Approach. Sixth Edition, Brooks/Cole.

22- Hemmerling, E. M., & Hemmerling, E. M. (1964). Fundamentals of college geometry. Wiley.

23- Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., Flath, D., Lock, P. F., Gordon, S. P., Lomen, D. O., ... & Pasquale, A. (1998). Calculus: Single Variable. Wiley.

24- Larson, Ron. & Hodgkins, Amme V. (2013). college algebra and calculus an applied approach. The Pennsylvania State University, The Behrend College, second edition.

25- Lial, M. L., Greenwell, R. N., & Ritchey, N. P. (2008). Calculus with applications. Pearson/Addison Wesley.

26- Lial, M., Greenwell, R., & Ritchey., N. (2017). Calculus with Applications. Pearson Education.

27- Rogawski, J., & Adams, C. (2015). Calculus: Early Transcendentals. Palgrave Macmillan.

28- Serra, M. (1997). Discovering geometry. An Inductive Aproach

29- Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. Eighth edition, Pearson Prentice Hall.

30- Sullivan, M. (2015). Precalculus: Concepts Through Functions A Unit Circle Approach To Trigonometry. Third edition, Pearson Education.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضی ۳ ـ کد ۱۱۲۲۱۱

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	یوسف امیریان	کرمانشاه	۳۰	ریحانه حسینی نژاد	زنجان
۲	داوود عزیز زاده	شهرستان‌های تهران	۳۱	وحید سجادپور	کهگیلویه وبویراحمد
۳	فریبا جباری	گیلان	۳۲	زهره محمدی	چهارمحال وبختیاری
۴	زهره رشیدیان	مرکزی	۳۳	محمد کارامد	کرمان
۵	ایرج نوری	ایلام	۳۴	مهین ابراهیمیان	خراسان شمالی
۶	زهره امیری	شهرستان‌های تهران	۳۵	لیلا مقصدی	مازندران
۷	سکینه رادمنش	ایلام	۳۶	ندا حجتی	آذربایجان غربی
۸	معصومه صبوحی	قزوین	۳۷	شیما خراشادی زاده	خراسان جنوبی
۹	شهین قلی زاده	سیستان وبلوچستان	۳۸	دینا گل خندان	گیلان
۱۰	پروین طالب حسامی آذر	کردستان	۳۹	حسن کریمی نژاد	قزوین
۱۱	سمیه قربانی راد	خراسان شمالی	۴۰	سید محمدرضا احمدی	اصفهان
۱۲	ابوذر نخعی مطلق	سیستان وبلوچستان	۴۱	سکینه حبیبی	لرستان
۱۳	آزاده حاجی هاشمی	خوزستان	۴۲	وحیده سلیمانی	گلستان
۱۴	معصومه ملاعلی	آذربایجان شرقی	۴۳	افشین خاصه خان	آذربایجان شرقی
۱۵	غلامرضا روئین تن	فارس	۴۴	علی رضا زمانی	آذربایجان شرقی
۱۶	ملیحه سادات سادات	اصفهان	۴۵	لیلا حسین پور	بوشهر
۱۷	امید نورانی	خوزستان	۴۶	پروانه وزیری	هرمزگان
۱۸	مصطفی ملا صالحی	شهر تهران	۴۷	سارا فرهادی چشمه مرواری	خوزستان
۱۹	ژاله روحانی	همدان	۴۸	شجاع علی گرجیان مهلبانی	مازندران
۲۰	هوشنگ مرادی	فارس	۴۹	افشین ملاسعیدی	خوزستان
۲۱	عزیز اسدی	کردستان	۵۰	شهره چوپانی	چهارمحال وبختیاری
۲۲	یعقوب نعمتی	اردبیل	۵۱	وجیهه فاتحی	خراسان جنوبی
۲۳	محمد جوراک	کرمانشاه	۵۲	مجید قادری	هرمزگان
۲۴	جعفر خزائیان	همدان	۵۳	مهری غضنفرنیان	زنجان
۲۵	فرزانه کد خدایی	لرستان	۵۴	محمد علی ملک ثابت	یزد
۲۶	منصوره میرسندسی	خراسان رضوی	۵۵	حسین حجازی	خراسان رضوی
۲۷	جمال نوین	یزد	۵۶	خسرو کریمی	اردبیل
۲۸	طاهره کاظمی حبشی	البرز	۵۷	شهناز مترجم	کرمانشاه
۲۹	غزاله سید مدلل کار	شهر تهران	۵۸	علی جعفری	اردبیل