

# کاربرد مشتق



مشتق تابع، کاربردهای چشمگیری در حوزه‌های مختلف دارد. مسائل بهینه‌سازی یکی از این عرصه‌هاست که مشتق تابع به‌طور گسترده‌ای در آنها مورد استفاده قرار می‌گیرد. دامنه این نوع مسائل از طراحی قطعات مختلف و شکل ظاهری انواع وسایل نقلیه تا مینیم نمودن فاصله، زمان و هزینه و همچنین ماکزیم کردن حجم، مساحت و سود گسترده است.

اکستریم‌های تابع

درس اول

بهینه‌سازی

درس دوم

## درس اول

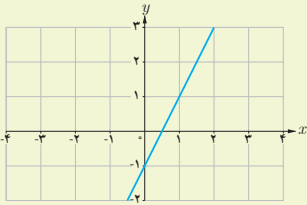
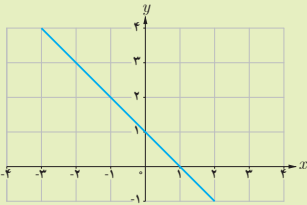
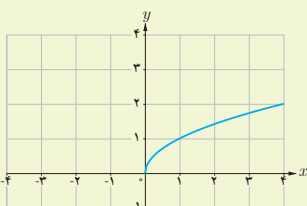
## اکسترم‌های تابع

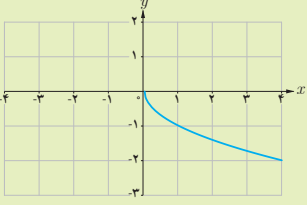
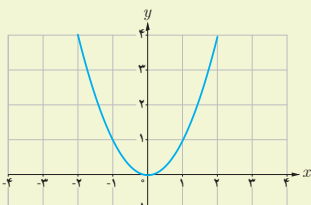
## یکنوایی تابع و ارتباط آن با مشتق

در فصل اول، تعریف تابع صعودی و تابع نزولی را دیدیم. در اینجا می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

## فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید. در این جدول ضابطه و نمودار چند تابع ارائه شده است که از قبل با آنها آشنا هستیم. همچنین یکنوایی این تابع‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. به علاوه، مشتق هر کدام از این تابع‌ها، تعیین علامت شده است. جدول را کامل کنید.

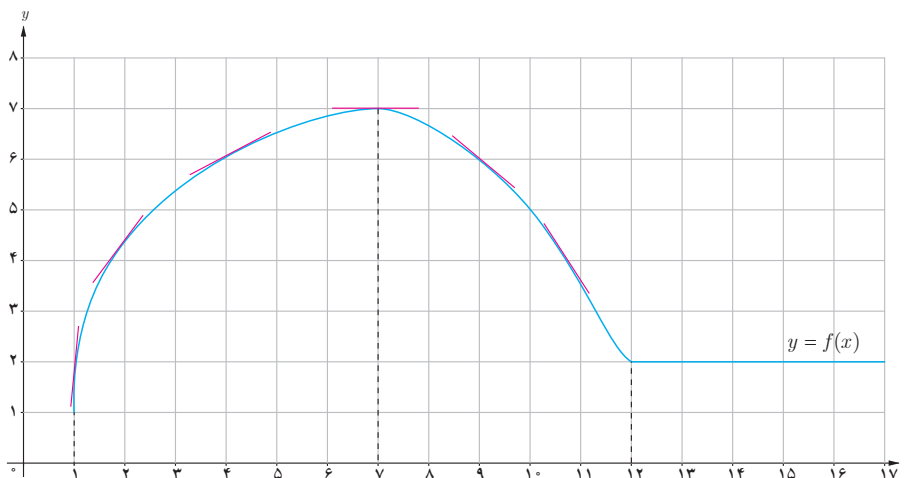
علامت مشتق	تابع مشتق	یکنوایی تابع	نمودار تابع	ضابطه تابع
$f'$ همواره مثبت است	$f'(x) = 2$	تابع $f$ در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است		$f(x) = 2x - 1$
$g'$ همواره ... است	$g'(x) = -1$	تابع $g$ در $\mathbb{R}$ اکیداً ... است		$g(x) = -x + 1$
$h'$ در $(0, +\infty)$ ... است	$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	تابع $h$ در $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است		$h(x) = \sqrt{x}$

$u(x) = -\sqrt{x}$		<p>تابع <math>u</math> در <math>[0, +\infty)</math> اکیداً ... است</p>	$u'(x) = \dots$	<p><math>u'</math> در <math>(0, +\infty)</math>، همواره ...</p>
$k(x) = x^2$		<p>تابع <math>k</math> در <math>(-\infty, 0)</math> اکیداً نزولی و در <math>(0, +\infty)</math> اکیداً صعودی است.</p>	$k'(x) = 2x$	<p><math>k'</math> در <math>(-\infty, 0)</math> منفی و در <math>(0, +\infty)</math> ... است.</p>
$l(x) = \dots$				

با بررسی جدول بالا، توضیح دهید که چه رابطه‌ای بین علامت مشتق تابع در یک بازه و یکنوایی تابع در آن بازه وجود دارد.

کار در کلاس

از فصل قبل می‌دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را در نظر بگیرید:



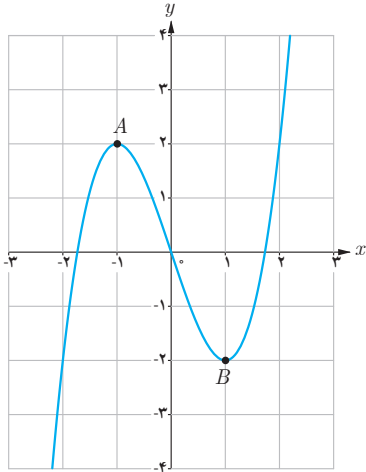
ملاحظه می‌شود که:

- الف) در بازه  $(1, 7)$  که  $f$  اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار  $f$ ، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت  $f'$  ... است.
- ب) در بازه  $(7, 12)$  که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار  $f$ ، ... است؛ بنابراین در این بازه علامت  $f'$  ... است.
- پ) در بازه  $(12, +\infty)$  که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار  $f'$  برابر ... است.

مطلب فوق برای توابع مشتق پذیر همواره درست است که آن را به شکل زیر بیان می کنیم :

### آزمون یکنوایی تابع

- الف) در یک بازه از دامنه  $f$  اگر مقدار  $f'$  موجود و مثبت باشد، آنگاه  $f$  در آن بازه اکیداً صعودی است.  
 ب) در یک بازه از دامنه  $f$  اگر مقدار  $f'$  موجود و منفی باشد، آنگاه  $f$  در آن بازه اکیداً نزولی است.  
 پ) در یک بازه از دامنه  $f$  اگر مقدار  $f'$  موجود و برابر صفر باشد، آنگاه  $f$  در آن بازه تابعی ثابت است.



بنابراین برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع  $f$ ، کافی است مانند مثال زیر،  $f'$  را تعیین علامت کنیم.

مثال ۱: تابع  $f(x) = x^3 - 3x$  در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

حل:  $f'$  را به دست آورده و آن را تعیین علامت می کنیم.

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
بازه		$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$	
علامت $f'$		+	-	+	
یکنوایی $f$	$-\infty$	اکیداً صعودی	۲	اکیداً نزولی	$+\infty$

نمودار تابع  $f$  مربوط به مثال قبل را رسم کرده ایم. آن را با جدول مقایسه کنید.

### اکسترم‌های نسبی تابع

در نمودار این تابع، نقاط به طول  $-1$  و  $1$  را که صفرهای تابع  $f'$  هستند مورد توجه قرار دهید. اهمیت این نقاط در این مثال از این جهت است که در هر یک از آنها، رفتار تابع از نظر صعودی یا نزولی بودن عوض شده است (جدول ملاحظه شود). اگر این دو نقطه را به ترتیب  $A$  و  $B$  بنامیم، آنگاه  $A$  نقطهٔ ماکزیمم نسبی  $f$  و  $B$  نقطهٔ مینیمم نسبی آن است.

۱- رسم نمودار تابع‌های درجه سوم در حالت کلی در زمره اهداف کتاب حاضر نیست.

**تعریف:** گوئیم تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول  $c$  ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از  $c$  مانند  $I \subseteq D_f$  باشد که برای هر  $x \in I$  داشته باشیم  $f(c) \geq f(x)$ . در این حالت  $f(c)$  مقدار ماکزیمم نسبی تابع  $f$  نامیده می‌شود.

همچنان که گفته شد، تابع مثال قبل در نقطه  $A(-1, 2)$  ماکزیمم نسبی دارد و مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر ۲ می‌باشد. مینیمم نسبی به روش مشابه تعریف می‌شود.

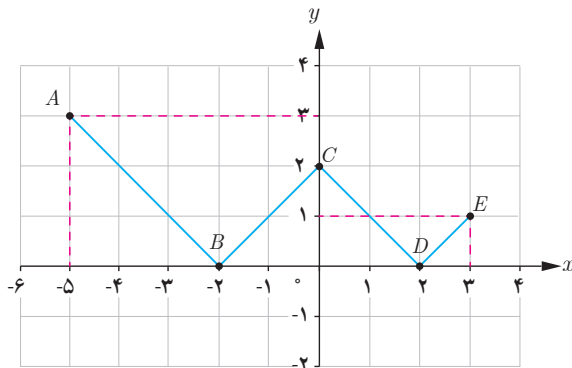
**تعریف:** گوئیم تابع  $f$  در نقطه‌ای به طول  $c$  مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از  $c$  مانند  $I$  باشد که برای هر  $x \in I \subseteq D_f$  داشته باشیم  $f(c) \leq f(x)$ . در این حالت  $f(c)$  را مقدار مینیمم نسبی تابع  $f$  می‌نامیم.

در مثال قبل مقدار مینیمم نسبی تابع چقدر است؟

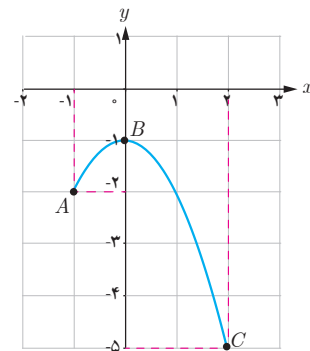
**تذکر:** نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترم آن تابع هم می‌گوئیم. در تابع مثال قبل، نقاط  $A$  و  $B$  اکسترم‌های نسبی تابع هستند.

کار در کلاس

نوع اکسترم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.



الف)  $f(x) = ||x| - 2|, x \in [-5, 3]$



ب)  $g(x) = -x^2 - 1, x \in [-1, 2]$

نقطه	نوع اکسترم نسبی	مقدار اکسترم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	-	-
B	min نسبی	۰	$f'(-2)$ موجود نیست
C	...	۲	...
D	...	...	...
E	...	-	-

نقطه	نوع اکسترم نسبی	مقدار اکسترم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترم نسبی نیست	-	-
B	max نسبی	...	$f'(0)$ برابر صفر است
C	...	-	-

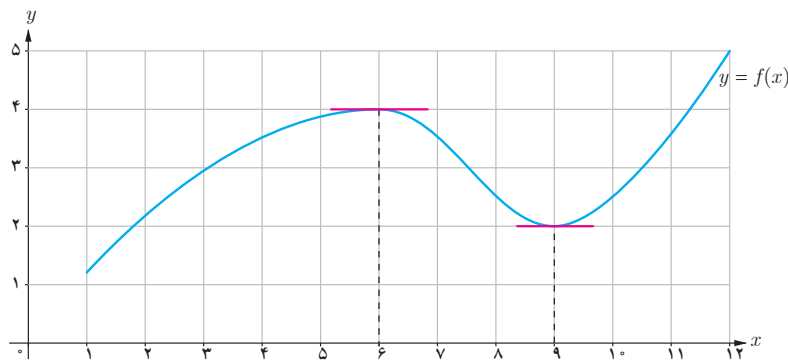
## نقاط بحرانی تابع

حال این سؤال پیش می‌آید که در چه نقاطی از دامنه تابع  $f$  باید به دنبال اکسترم‌های نسبی آن باشیم؟ همان‌گونه که در تابع‌های قبلی دیده می‌شود، جواب عبارت است از نقاطی از دامنه  $f$  که  $f'$  در آنها تعریف نشده باشد و همچنین نقاطی که مقدار  $f'$  در آنها برابر صفر است. به لحاظ اهمیت این دو دسته از نقاط، شایسته است که نامی برای خود داشته باشند؛ آنها را نقاط بحرانی تابع می‌نامیم:

**تعریف:** نقطه به طول  $c$  از دامنه تابع  $f$  را یک نقطه بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه  $f'(c)$  برابر صفر باشد یا  $f'(c)$  موجود نباشد.

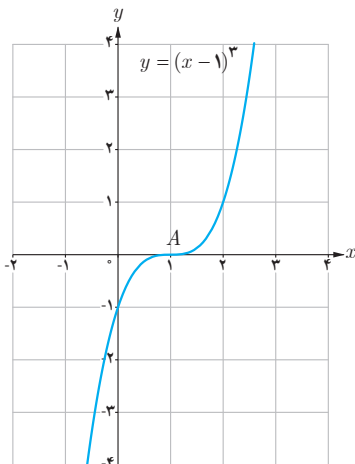
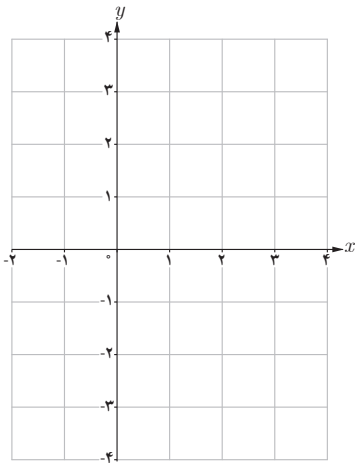
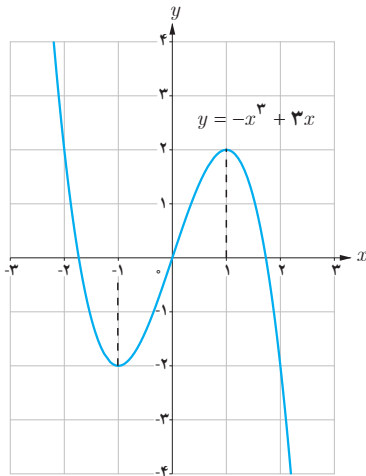
نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع زیر را در نظر بگیرید. دیده می‌شود که خط مماس بر نمودار  $f$  در این نقاط به صورت افقی، یعنی با شیب صفر است. از آنجا که مشتق تابع در یک نقطه، برابر شیب خط مماس بر منحنی تابع در آن نقطه است، لذا در این تابع داریم:

$$f'(6) = 0, \quad f'(9) = 0$$



این مطلب در مورد نقاط اکسترم نسبی هر تابع مشتق‌پذیر، درست است. قضیه زیر را در این مورد بیان می‌کنیم.

**قضیه:** اگر تابع  $f$  در نقطه به طول  $c$  ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و  $f'(c)$  موجود باشد، آنگاه  $f'(c) = 0$ . به عبارت دیگر، هر نقطه اکسترم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.



۱ الف) با رسم نمودار تابع  $f(x) = |x-2|$ ، نشان دهید که  $f$  در  $x=2$  مینیمم نسبی دارد.

ب) آیا  $f'(2)$  موجود است؟ چرا؟

پ) آیا  $x=2$  طول نقطه بحرانی تابع است؟ چرا؟

۲ نمودار تابع  $f(x) = -x^3 + 3x$  را رسم کرده‌ایم.

الف) طول‌های نقاط اکستریم نسبی  $f$  را تعیین کنید.

ب) می‌دانیم این تابع در  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادله  $f'(x) = 0$ ، یعنی

طول‌های نقاط بحرانی تابع را به دست آورید.

پ) با توجه به الف و ب، درستی قضیه قبل را در مورد این تابع بررسی کنید.

۳ تابع با ضابطه  $f(x) = -x^3 + 2x + 2$  را در نظر بگیرید.  $f$  همواره مشتق‌پذیر است.

الف)  $f'(x)$  را به دست آورید.

ب) ریشه معادله  $f'(x) = 0$  را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید.

پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطه اکستریم  $f$  منطبق بر نقطه بحرانی

آن است؟

از مثال‌های قبل، این سؤال مطرح می‌شود که آیا صفرهای تابع مشتق، همواره طول

نقاط اکستریم نسبی تابع را به دست می‌دهند؟ با وجود آنکه جواب این سؤال در

مورد برخی از تابع‌های مورد بحث ما مثبت است، مثال زیر نشان می‌دهد که این

مطلب همیشه هم درست نیست. به عبارت دیگر، عکس قضیه قبل در حالت کلی

درست نیست.

مثال: به نمودار تابع  $f(x) = (x-1)^3$  دقت کنید. تابع مشتق این تابع به صورت

$f'(x) = 3(x-1)^2$  است. با وجود آنکه مقدار  $f'(x)$  در  $x=1$  برابر صفر است،

اما با توجه به نمودار  $f$ ، دیده می‌شود که نقطه به طول ۱ برای این تابع نه ماکزیمم

نسبی است و نه مینیمم نسبی. دلیل این مطلب، آن است که  $f'$ ، قبل و بعد از  $x=1$

همواره مثبت است؛ به عبارت دیگر،  $f$  در  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی است و لذا نمی‌تواند

اکستریم نسبی داشته باشد.

تذکر: مثال بالا نشان می‌دهد که عکس قضیه قبل در حالت کلی درست نیست. در

واقع نقطه  $A$  به طول  $x=1$  برای تابع  $f(x) = (x-1)^3$  یک نقطه بحرانی است، اما

اکستریم نسبی آن نیست. شما یک مثال نقض دیگر برای عکس این قضیه ارائه کنید

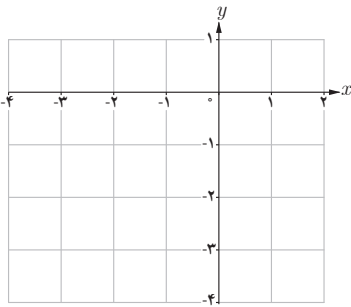
که نشان دهد یک نقطه بحرانی لزوماً اکستریم نسبی نیست.

۱ جدول تغییرات تابع  $f(x) = -x^2 - 2x$  در زیر آمده است که در آن با تعیین علامت  $f'$ ، بازه‌هایی که تابع  $f$  در آنها صعودی است و همچنین بازه‌هایی که نزولی می‌باشد، تعیین شده است. همچنین، اکسترمم نسبی تابع در جدول مشخص شده است:

$$f'(x) = -2x - 2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ طول نقطه بحرانی}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
بازه	$(-\infty, -1)$		$(-1, +\infty)$
علامت $f'$	$+$	$0$	$-$
یکنوایی $f$	صعودی اکید	$\uparrow$	نزولی اکید
	$-\infty$	نسبی max	$-\infty$



با توجه به جدول، مشخص است که نقطه به طول  $(-1)$ ، ماکزیمم نسبی تابع است؛ چرا که رفتار تابع در این نقطه از صعودی اکید به نزولی اکید تغییر کرده است. با توجه به جدول و در صورت لزوم با یافتن نقاط دیگری از تابع، نمودار آن را رسم کنید.

۲ جدولی مشابه جدول بالا برای تابع  $g(x) = x^3 - 3x^2$  رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن مشخص شده باشد.

مثال‌های بالا از توابع پیوسته، این مطلب را القا می‌کنند که تغییر رفتار این‌گونه تابع‌ها در یک نقطه از صعودی بودن به نزولی بودن، نشان‌دهنده نقطه ماکزیمم نسبی آن تابع است. برای مینیمم نسبی هم می‌توان مطلب مشابهی را بیان کرد که در ادامه آمده است.

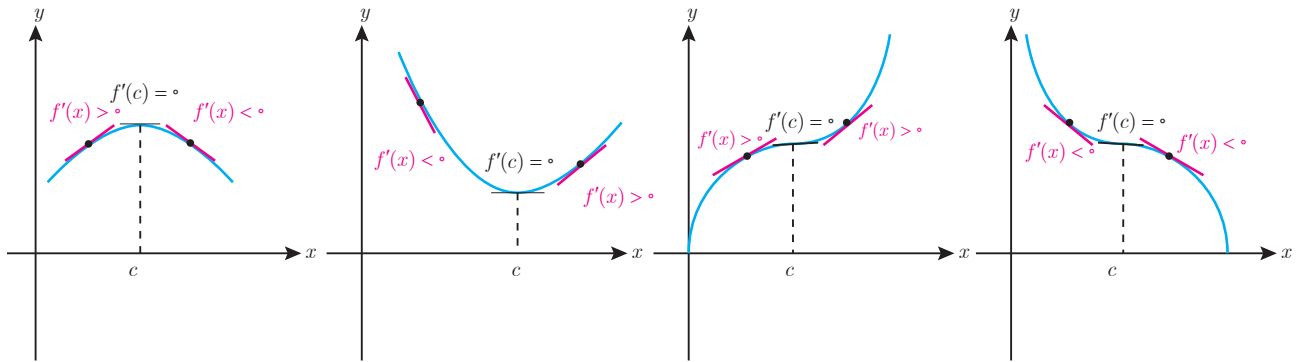
### آزمون مشتق اول

فرض کنیم  $c$  طول نقطه بحرانی تابع  $f$  باشد که  $f$  در  $c$  پیوسته است و همچنین  $f$  در یک همسایگی محذوف  $c$  مشتق‌پذیر باشد.

- (الف) اگر علامت  $f'$  در  $x = c$  از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه  $x = c$  طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع  $f$  است.
- (ب) اگر علامت  $f'$  در  $x = c$  از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه  $x = c$  طول نقطه مینیمم نسبی تابع  $f$  است.
- (پ) اگر  $f'$  در  $c$  تغییر علامت ندهد؛ به طوری که  $f'$  در یک همسایگی محذوف  $c$  همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آنگاه  $f$  در  $c$  ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.



درستی آزمون مشتق اول را در همسایگی نقطه  $c$  در هر یک از نمودارهای زیر مورد توجه قرار دهید.



$x=c$ : طول ماکزیم نسبی

$x=c$ : طول مینیم نسبی

$x=c$ : نه طول ماکزیم نسبی است  
و نه مینیم نسبی

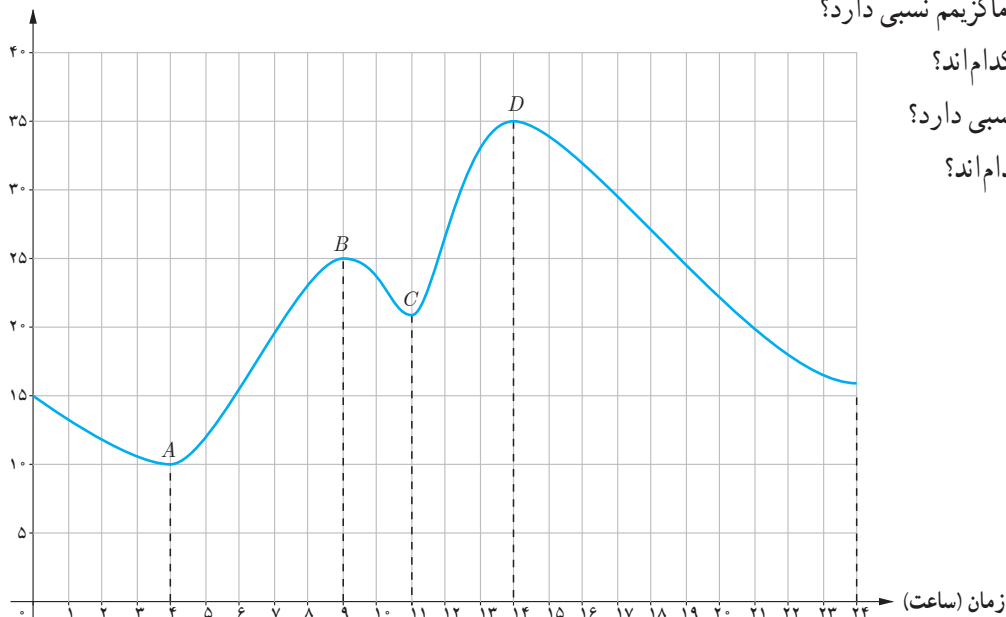
$x=c$ : نه طول ماکزیم نسبی است  
و نه مینیم نسبی

### اکستریم‌های مطلق تابع

#### فعالیت

نمودار زیر نشان دهنده تغییرات دمایی برای یک شهر در طی ۲۴ ساعت است.

دما (سانتی‌گراد)



الف) تابع مقابل در چه نقاطی ماکزیم نسبی دارد؟

ب) مقادیر ماکزیم نسبی تابع کدام‌اند؟

پ) تابع در چه نقاطی مینیم نسبی دارد؟

ت) مقادیر مینیم نسبی تابع کدام‌اند؟

با توجه به نمودار، دیده می‌شود که دمای هوا در ساعت ۱۴ بیشترین مقدار و برابر با ۳۵ درجه سانتی‌گراد بوده است. در این حالت می‌گوییم، نقطه  $D(14, 35)$  ماکزیم مطلق تابع است و مقدار ماکزیم مطلق تابع برابر ۳۵ می‌باشد. نقطه مینیم مطلق این تابع و همچنین مقدار مینیم مطلق آن را بنویسید.

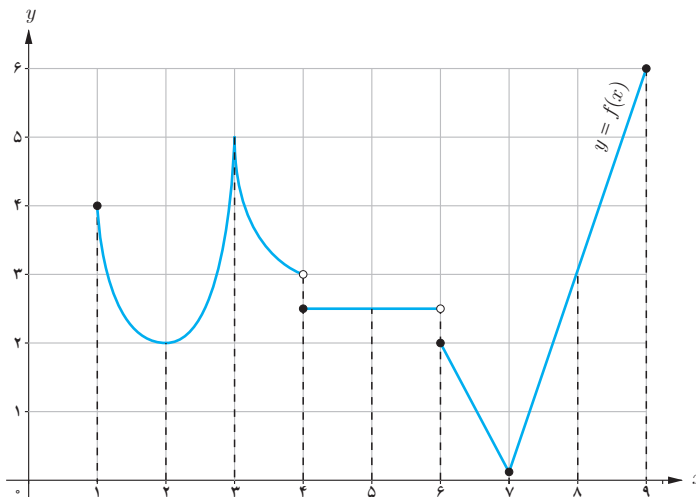
**تعریف:** با فرض  $c \in D_f$ ، نقطه  $(c, f(c))$ ، یک نقطه ماکزیمم مطلق برای تابع  $f$  نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر  $x$  از  $D_f$  داشته باشیم  $f(c) \geq f(x)$ . در این حالت عدد  $f(c)$  را مقدار ماکزیمم مطلق  $f$  روی  $D_f$  می‌نامیم.

**تعریف:** با فرض  $c \in D_f$ ، نقطه  $(c, f(c))$ ، یک نقطه مینیمم مطلق برای تابع  $f$  نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر  $x$  از  $D_f$  داشته باشیم  $f(c) \leq f(x)$ . در این حالت عدد  $f(c)$  را مقدار مینیمم مطلق  $f$  روی  $D_f$  می‌نامیم.

در تابع صفحه قبل، اکسترم‌های مطلق تابع  $f$  یعنی نقاط  $A$  و  $D$ ، به ترتیب نقاط مینیمم مطلق و ماکزیمم مطلق تابع هستند.

کار در کلاس

۱ با تکمیل جدول زیر، اکسترم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و همچنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.



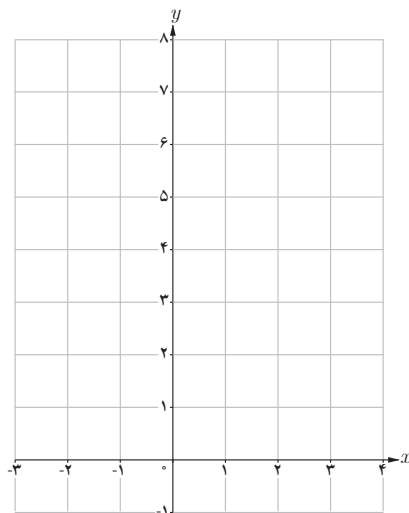
طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
مطلق $max$	×	×			×	×			✓
مطلق $min$	×	×			×	×			×
نسبی $max$	×	×			✓	×			×
نسبی $min$	×	✓			✓	×			×
نقطه بحرانی	✓	✓			✓	✓			✓

۲ به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترم نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف)  $t(x) = x^3$ ;  $x \in [-2, 1]$

ب)  $g(x) = -x^2$ ;  $x \in [-2, 3]$

پ)  $u(x) = \frac{1}{x}$



تابع  $f(x) = |x^2 - 1|$  را در بازه  $[-2, 3]$  رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکسترم مطلق را تعیین کنید.

در فعالیت قبل دیده می‌شود که تابع پیوسته  $f(x) = |x^2 - 1|$  در بازه بسته  $[-2, 3]$  هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق که این مطلب همواره درست است. همچنین مشاهده می‌شود که نقاط اکسترم مطلق، در نقاط بحرانی تابع یا نقاط انتهایی بازه واقع‌اند. این موضوع نیز همواره درست است.

**قضیه:** فرض کنیم تابع  $f$  در بازه بسته  $[a, b]$  پیوسته باشد. در این صورت  $f$  در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

قضیه فوق، تنها وجود اکسترم‌های مطلق توابع پیوسته را در بازه‌های بسته تضمین می‌کند و به روش یافتن این نقاط اشاره‌ای ندارد. مراحل یافتن اکسترم‌های مطلق تابع پیوسته  $f$  در بازه بسته  $[a, b]$  به شرح زیر است:

- ۱- مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی  $f$  را می‌یابیم.
- ۲- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.
- ۳- در مرحله ۲، بزرگ‌ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آنها مینیمم مطلق تابع در بازه  $[a, b]$  است.

**مثال:** نقاط اکسترم مطلق تابع  $f(x) = 2x^2 + 3x^2 - 12x$  را در بازه  $[-1, 3]$  تعیین کنید.  
حل: ابتدا به کمک  $f'$ ، نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \text{ . بنابراین نقاط به طول } -1, 1, 3, \text{ نقاط بحرانی بازه } [-1, 3] \text{ است.}$$

$x$	-1	1	3
$f(x)$	13	-7	45

با توجه به جدول، دیده می‌شود که بزرگ‌ترین مقدار برای تابع در بازه  $[-1, 3]$  برابر 45 و کوچک‌ترین مقدار، مساوی -7 است. به همین دلیل، این دو مقدار به ترتیب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع در این بازه‌اند.

- ۱ بزرگ‌ترین بازه از  $\mathbb{R}$  که تابع  $f(x) = x^2 - 12x + 4$  در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟
- ۲ با تشکیل جدول تغییرات تابع  $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟
- ۳ نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.
- الف)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$       ب)  $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$       پ)  $h(x) = \sqrt[3]{x}$
- ۴ در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.
- الف)  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$       ب)  $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$       پ)  $h(x) = -x^2 - 3x + 2$
- ۵ مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.
- الف)  $f(x) = -2x^2 + 9x^2 - 13$  ;  $x \in [-1, 2]$   
 ب)  $g(x) = x^2 + 2x - 5$  ;  $x \in [-2, 1]$
- ۶ اگر نقطه  $(2, 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = x^2 + bx^2 + d$  باشد، مقادیر  $b$  و  $d$  را به دست آورید.
- ۷ نمودار تابعی مانند  $f$  با دامنه  $\mathbb{R}$  را رسم کنید به طوری که هر نقطه دلخواه از  $D_f$ ، یک نقطه بحرانی  $f$  باشد. مسئله چند جواب دارد؟