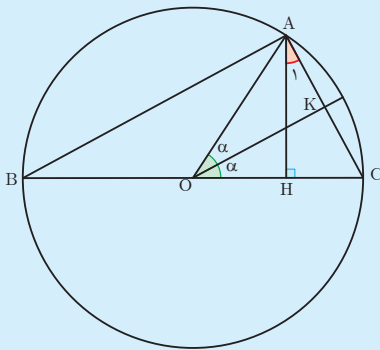


نسبت‌های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

در محاسبات فنی گاهی نسبت مثلثاتی برخی زوایا مورد نیاز است که مقدار آن را می‌توان به کمک دیگر زوایا به دست آورد. اگر مقدار $\cos 15^\circ$ را نیاز داشته باشیم چگونه می‌توان آن را با استفاده از مقدار $\cos 30^\circ$ به دست آورد؟ به وضوح 15° نصف 30° است و نیز می‌دانیم $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. آیا با نصف کردن مقدار $\cos 30^\circ$ می‌توان $\cos 15^\circ$ را به دست آورد؟ در ادامه خواهیم دید که جواب منفی است ولی همچنان می‌شود مقدار $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ یافت اما نه با نصف کردن^۱.



دایره روبه‌رو به شعاع واحد و مرکز O را در نظر بگیرید. مطابق شکل، زاویه مرکزی O برابر 2α داده شده که روبه‌رو به وتر AC است. از این رو در مثلث OAK داریم:

$$AK = \sin \alpha \Rightarrow AC = 2AK = 2 \sin \alpha \quad (1)$$

همچنین $AC = 2\alpha$ و از آنجا که زاویه محاطی B روبه‌رو به \widehat{AC} است، لذا نصف آن است پس: $\hat{B} = \alpha$.

از طرفی \hat{A} یک زاویه محاطی روبه‌رو به قطر BC است و لذا: $\hat{A} = 90^\circ$. همچنین از مجموع زوایای \hat{ABC} به دست می‌آید:

$$\hat{ABC}: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \alpha + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - \alpha$$

به‌طور مشابه در \hat{AHC} داریم:

$$\hat{AHC}: \hat{H} + \hat{A}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + \hat{A}_1 + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \alpha$$

اکنون ضلع AH را در \hat{OAC} و \hat{AHC} به دست آورده و برابر قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{OAC}: AH = \sin 2\alpha \\ \hat{AHC}: \cos \hat{A}_1 = \cos \alpha = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \alpha \xrightarrow{(1)} AH = 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

همچنین در \hat{OAH} داریم: $OH = \cos 2\alpha$ و در \hat{AHC} داریم:

$$\sin \hat{A}_1 = \sin \alpha = \frac{HC}{AC} \Rightarrow HC = \sin \alpha \times AC = \sin \alpha (2 \sin \alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

از طرفی با توجه به اینکه $OC = 1$ شعاع دایره است پس داریم:

$$OC = OH + HC = 1 \Rightarrow OH = 1 - HC \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

و نیز با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ به دست می‌آوریم $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$.

۱- این روش را ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان مشهور ایرانی ارائه داده است. طرح اثبات فوق در ارزشیابی‌ها مجاز نیست.

به طور کلی داریم:

$$\sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

مثال: مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cos 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}} \cos 15^\circ$$

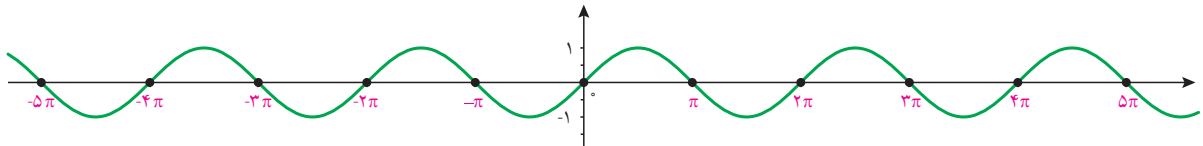
$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \quad (15^\circ \text{ در ربع اول است.})$$

معادلات مثلثاتی

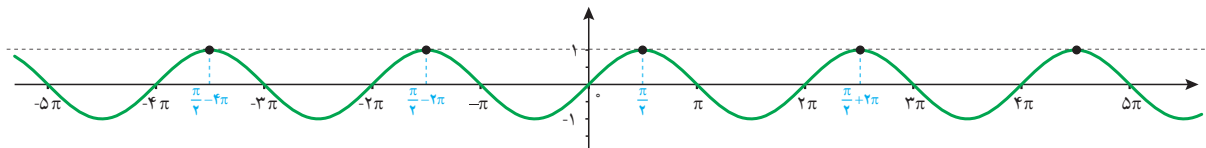
معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است. این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود. این مقادیر محل تقاطع $y = 1$ و $y = \sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به صورت

$$x = \dots, \frac{\pi}{4} - 4\pi, \frac{\pi}{4} - 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi, \dots$$

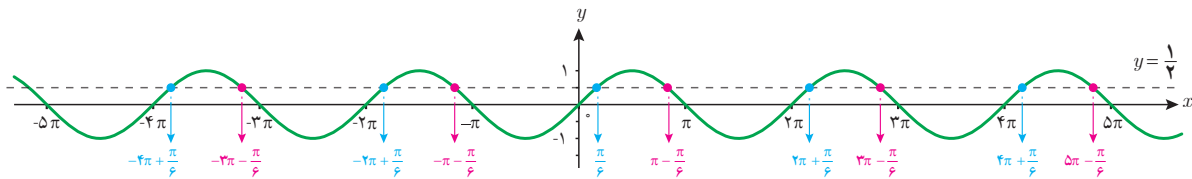
می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

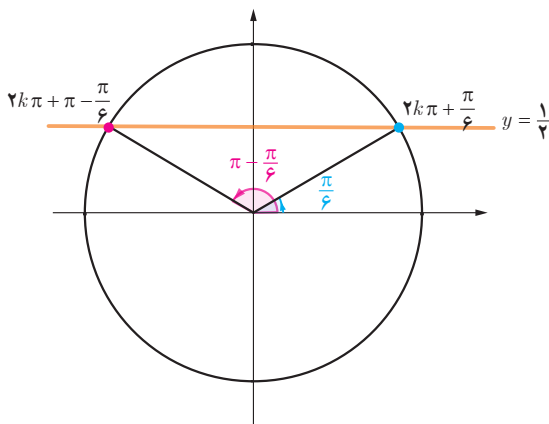
۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید.

۲ خط $y = \frac{1}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟



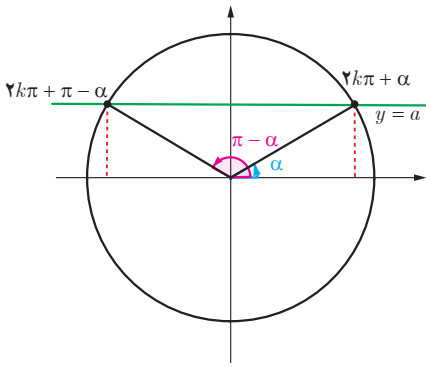
۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{4}$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟



هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $\dots, -2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots$

هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{6}$: $\dots, -\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, \dots$



برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ ، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{4}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{4}$$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادلات زیر را حل کنید.

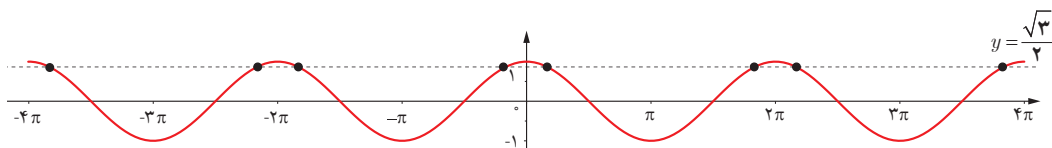
(الف) $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$

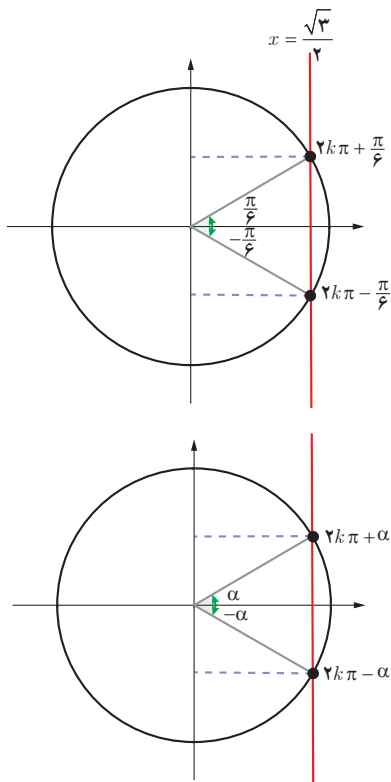
(ب) $4 \sin x + \sqrt{8} = 0$

فعالیت

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.





الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$.

بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

مثال: جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{3}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

مثال: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

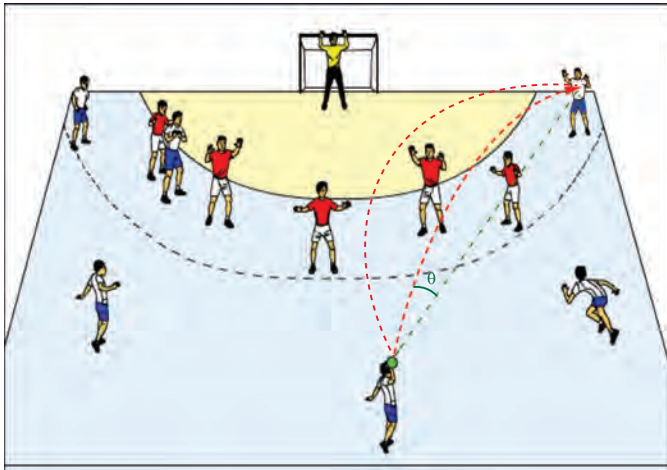
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = -k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



مثال : یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت 16 m/s برای هم تیمی خود که در $12/8$ متری او قرار دارد پرتاب می کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$$

از رابطه داده شده به دست می آید :

$$12/8 = \frac{(16)^2 \sin 2\theta}{10} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 10}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ و $\theta = \frac{5\pi}{12}$ می باشد.

مثال : جواب های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2\sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال: معادله $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $t = \cos x$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t = 5$ و $t = -\frac{1}{2}$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می‌آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k = \mathbb{Z}$$

تمرین

۱ فرض کنید $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.
الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 3x$

ب) $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos 2x$

ت) $\cos 2x - 3\sin x + 1 = 0$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ج) $\sin x - \cos 2x = 0$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟