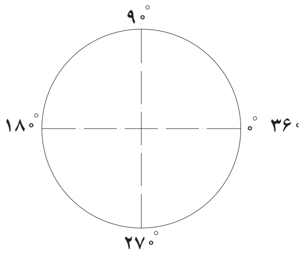
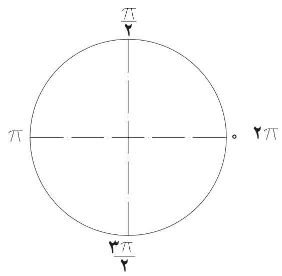
واحد یادگیری ۴
روش‌های محاسبهٔ زاویه

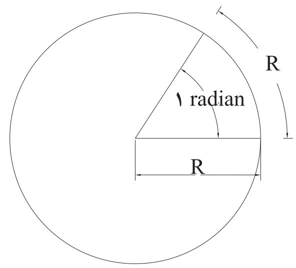
۴ـ۱ـ واحدهای زاویه

درجـه(Degree): یـک درجـه(1°) ، $\frac{1}{360}$ زاویـهٔ مرکـزی دایـرهٔ کامـل اسـت. یـک درجه برابـر ۶۰ دقیقـه و هر دقیقـه معـادل ۶۰ ثانیه اسـت.



رادیان(Radian): یک رادیان (۱radian)، $\frac{۱}{۶/۲۸}=\frac{۱}{۲\pi}$ زاویهٔ مرکزی دایرهٔ کامل است.



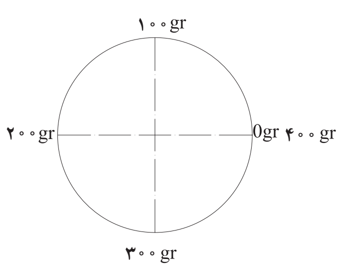


$$\theta=\frac{L}{r}$$

زاویه به رادیان θ — طول قوس مقابل زاویه L — شعاع دایره r

(۱radian=۵۷,۳°)

گــراد(Grad) : یــک گــراد(۱grad)، $\frac{۱}{۴۰۰}$ زاویــهٔ مرکزی دایرهٔ کامل اســت.یک گــراد برابــر ۱۰۰ دقیقهٔ گرادی است.



تبدیل‌های واحد زاویه:

جدول ۴ــ۱ــ ضرایب تبدیل یکاهای زاویه

$\frac{۴۰۰}{۳۶۰}=\frac{۱۰}{۹}$ *grad*	$\frac{\pi}{۱۸۰}$ radian	۱°	۶۰'	۳۶۰۰"
گراد	رادیان	درجه	دقیقه	ثانیه
grad	radian	Degree (D)	minute	second

مثال: یک رادیان چند ثانیهٔ درجه‌ای است؟

$$۱\ \text{radian}\times\frac{۳۶۰۰''}{\frac{\pi}{۱۸۰}\text{radian}}=\frac{۳۶۰۰\times۱۸۰}{\pi}=۲۰۶۲۶۵''$$

۴ـ۱ـ۱ـ محاسبهٔ زوایای مثلث

الـف. محاسـبهٔ زوایای مثلـث قائم‌الزاویـه: هـرگاه در مثلـث قائم‌الزاویـه دو ضلع معلـوم باشـد، با اسـتفاده از نسـبت‌های مثلثاتـی می‌تـوان زوایـای مثلـث را محاسـبه نمود.

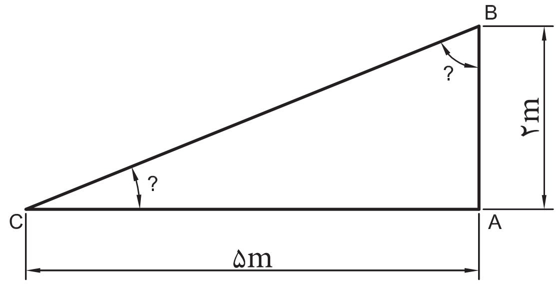
پرسش کلاسی

مثال ۱: در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۴ـ۱ اندازهٔ زاویه‌های B و C چند درجه است؟

$$\tan \hat{C} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

$$\Rightarrow \hat{C} = \tan^{-۱}(۰/۴)$$

$$\Rightarrow \hat{C} = ۲۱/۸۰^{\circ}$$



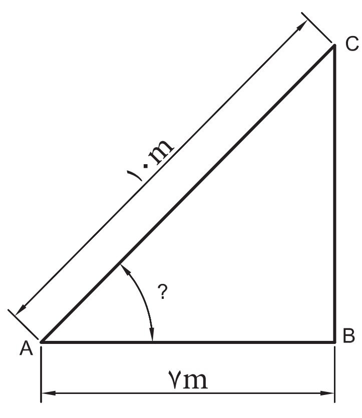
$$\tan \hat{B} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \tan^{-۱}(۲/۵) \Rightarrow \hat{B} = ۶۸/۲۰^{\circ}$$

شکل ۴ـ۱ ▲

مثال ۲: در شکل ۴ـ۲ اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟

$$\cos A = \frac{۷}{۱۰} = ۰/۷ \Rightarrow \hat{A} = ۴۵^{\circ}۳۴'$$

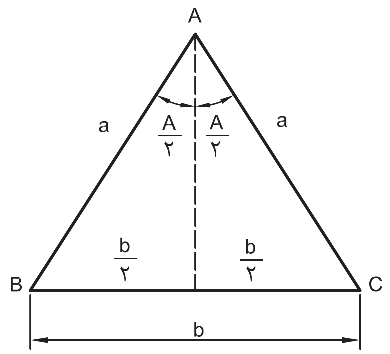


شکل ۴ـ۲ ▲

ب. محاسبهٔ زوایای مثلث متساوی‌الساقین: در مثلث متساوی‌الساقین ABC (شکل ۴ـ۳) ارتفاع نظیر رأس A، نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع مقابل به زاویهٔ A بر هم منطبق می‌باشند؛ بنابراین با توجه به روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin(\frac{A}{۲}) = \frac{\frac{b}{۲}}{a} = \frac{b}{۲a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\frac{A}{۲}) = \frac{b}{۲a}}$$



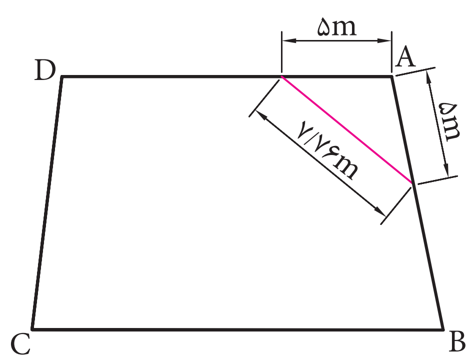
شکل ۴ـ۳ ▲

با استفاده از رابطهٔ فوق مقدار زاویهٔ ($\frac{A}{۲}$) را محاسبه نموده و سپس زاویهٔ A را محاسبه می‌نماییم. با توجه به اینکه زوایای B و C با هم برابرند، خواهیم داشت:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۲\hat{B} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - A}{۲}}$$

پرسش کلاسی

مثال: برای اندازه‌گیری زاویهٔ A در گوشهٔ یک زمین، دو طول مساوی ۵ متری در روی دو ضلع آن جدا کرده و سپس ضلع سوم آن‌را اندازه‌گیری نموده‌ایم (شکل ۴ـ۴). اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟



شکل ۴ـ۴ ▲

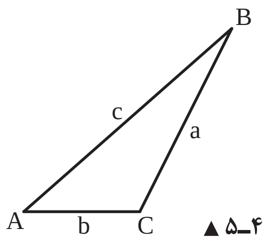
حل:

$$\sin\frac{A}{۲} = \frac{b}{۲a} = \frac{۷/۷۶}{۲\times۵} = ۰/۷۷۶ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲} = ۵۰^\circ ۵۴' \Rightarrow \hat{A} = ۱۰۱^\circ ۴۸'$$

ج. محاسبهٔ زوایای داخلی مثلث غیرمشخص:

۱ــ رابطهٔ کسینوس‌ها: هر گاه سه ضلع مثلثی معلوم باشد با استفاده از رابطه کسینوس‌ها می‌توان زوایای مثلث را محاسبه نمود.

در مثلث ABC شکل ۴ــ۵ داریم:



شکل ۴ــ۵ ▲

$$a^{2}=b^{2}+c^{2}-2bc\cos A$$
$$b^{2}=a^{2}+c^{2}-2ac\cos B$$
$$c^{2}=a^{2}+b^{2}-2ab\cos C$$

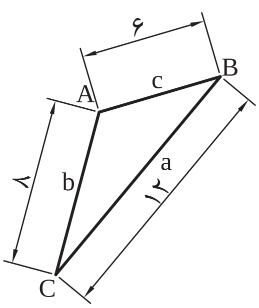
با استفاده از روابط بالا که به رابطهٔ کسینوس‌ها معروف است، می‌توانیم زوایای مثلث را به‌صورت روبه‌رو بنویسیم:

$$\cos A=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}$$
$$\cos B=\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}$$
$$\cos C=\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}$$

پرسش کلاسی

مثال ۱: زوایای مثلث ABC (شکل ۴ــ۶) چند درجه است؟

حل:



شکل ۴ــ۶ ▲

$$\cos A=\frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2bc}=\frac{8^{2}+6^{2}-12^{2}}{2\times 8\times 6}=\frac{64+36-144}{2\times 8\times 6}$$

$$\cos A=-0/4583\Rightarrow \hat{A}\simeq 117^{\circ}17'$$

برای زاویهٔ B داریم:

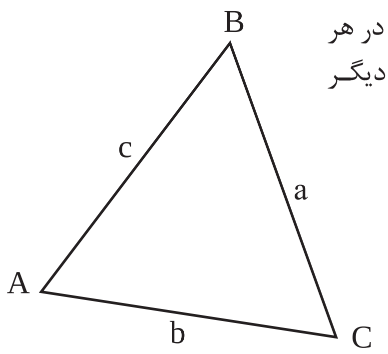
$$\cos B=\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2ac}=\frac{12^{2}+6^{2}-8^{2}}{2\times 12\times 6}=\frac{144+36-64}{2\times 12\times 6}=0/8056\Rightarrow \hat{B}=36^{\circ}20'$$

برای زاویهٔ C داریم:

$$\cos C=\frac{a^{2}+b^{2}-c^{2}}{2ab}=\frac{12^{2}+8^{2}-6^{2}}{2\times 12\times 8}=\frac{144+64-36}{2\times 12\times 8}=0/8958\Rightarrow \hat{C}\simeq 26^{\circ}23'$$

برای اطمینان از درستی محاسبات، زوایای به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم که باید جمع آنها 180° شود.

۲ـ رابطه سینوس‌ها: هرگاه دو ضلع و زاویه مقابل به یکی از آنها در هر مثلث معلوم باشد با استفاده از رابطه سینوس‌ها می‌توان زوایای دیگر مثلث را محاسبه کرد.



شکل ۴ـ۷ ▲

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=117^\circ 17'+36^\circ 20'+26^\circ 23'=180^\circ$$

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

پرسش کلاسی

مثال۲: در مثلث ABC شکل ۴ـ۷ اگر a=۱۵m و b=۱۰m و A=۶۰° باشد، زوایای B و C را به‌دست آورید.

حل:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{15}{\sin 60}=\frac{10}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\frac{10\times\sin 60}{15}$$

$$\Rightarrow \sin B=0/577\Rightarrow B=\sin^{-1}(0/577)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{B}=35/26^\circ}$$

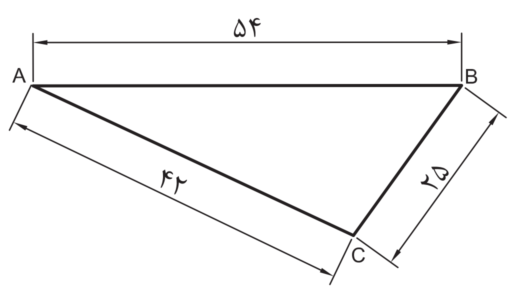
برای محاسبه زاویه C کافی‌است مجموع زوایای A و B را از ۱۸۰° کم نماییم.

$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})\Rightarrow \hat{C}=180^\circ-(60+35/26)$$

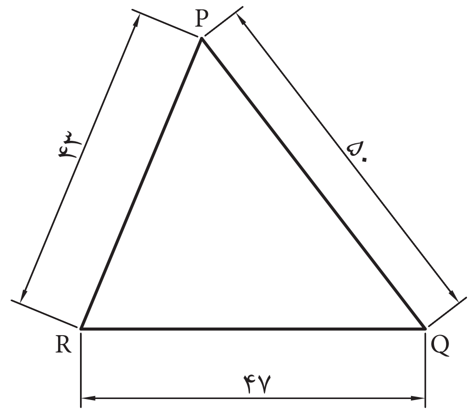
$$\Rightarrow \boxed{\hat{C}=84/74^\circ}$$

تمرین

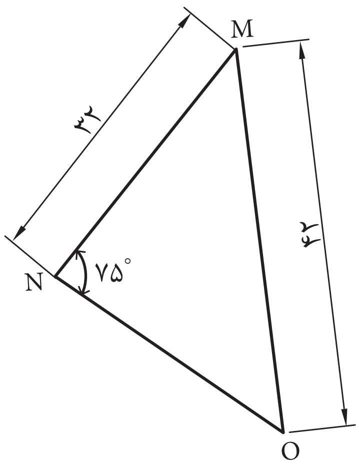
زوایای مثلث‌های شکل‌های ۴ـ۸، ۴ـ۹ و ۴ـ۱۰ را محاسبه کنید.



شکل ۴ـ۸▲



شکل ۴ـ۹ ▲



شکل ۴ـ۱۰ ▲

د. محاسبه زوایای داخلی یک چندضلعی منتظم

به یک n ضلعی که اضلاع آن با هم برابر باشند، n ضلعی منتظم گفته می‌شود.

مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی برابر است با: $(n-۲)۱۸۰^\circ$

پرسش کلاسی

مثال: مجموع زوایای داخلی یک ۵ ضلعی برابر است با: $(۵-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۵۴۰^\circ$

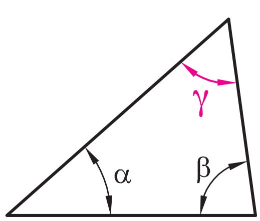
اندازهٔ هر زاویهٔ یک n ضلعی منتظم عبارت‌است از: $\frac{n-۲}{n}\times ۱۸۰^\circ$

پرسش کلاسی

مثال: اندازهٔ هر زاویهٔ یک ۸ ضلعی منتظم عبارت‌است از: $\frac{۸-۲}{۸}\times ۱۸۰^\circ = ۱۳۵^\circ$

تمرین

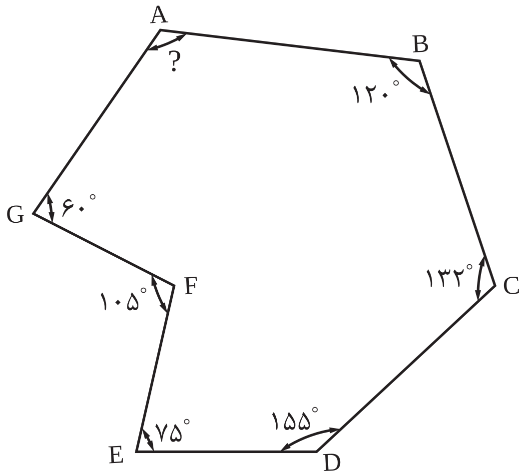
۱ـ در مثلث شکل ۴ـ۱۱ مقدار زاویهٔ γ را به‌دست آورید.
($\alpha=۲۴^\circ ۱۸'$ و $\beta=۴۷^\circ$)

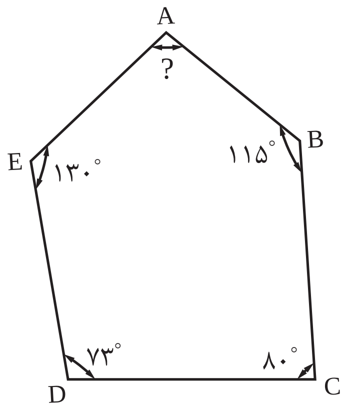


شکل ۴ـ۱۱ ▲

تمرین

۲ـ در شکل‌های ۴ـ۱۲ و ۴ـ۱۳ مقدار زاویۀ A را محاسبه نمایید.





شکل ۴ـ۱۳ ▲

شکل ۴ـ۱۲ ▲