فصل ۸

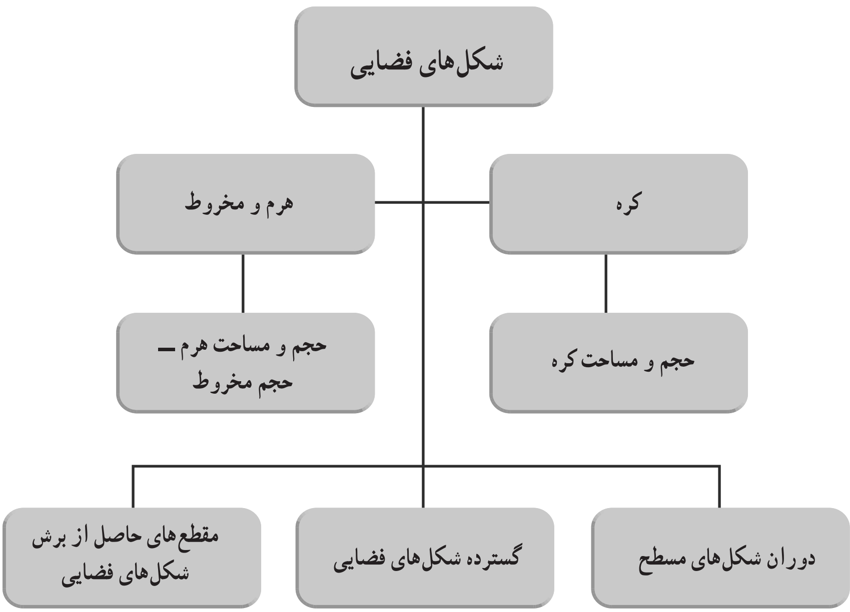
حجم و مساحت

گنبد قابوس بنایی تاریخی از سدهٔ چهارم هجری است که در شهر گنبدکاووس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج استوانه‌ای که گنبدی مخروطی شکل روی آن قرار گرفته است ۵۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل منشور روی بدنهٔ استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شما در این فصل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

نگاه کلی به فصل

در کتاب ریاضی هفتم در مورد شکل‌های فضایی، توضیحاتی داشتیم و تقسیم‌بندی کلی آنها به سه دستهٔ حجم‌های منشوری، حجم‌های کروی و حجم‌های هرمی را انجام دادیم. همچنین در آنجا با دستورات محاسبهٔ مساحت جانبی و کل و حجم منشور و حجم‌های منشوری آشنا شدیم. در این کتاب دنبالهٔ این کار را با ارائه مفاهیم و دستورات مرتبط با حجم‌های کروی و هرمی پی می‌گیریم. ابتدا دستور حجم کره را به روش تجربی به دست می‌آوریم، سپس به دستور مساحت رویهٔ کره با همان روش می‌پردازیم. در درس دوّم دستور حجم هرم را به روشی نسبتاً دقیق به دست می‌آوریم و کمی هم به مساحت آن توجه می‌کنیم و دستور حجم مخروط را نیز از تعمیم آن به دست می‌آوریم و در درس سوّم (درس آخر) جمع‌بندی از دستورات قبلی محاسبهٔ سطح و حجم داریم و در کنار آن نگاهی به تقویت قوّهٔ شهود فضایی دانش‌آموزان نیز داریم. برای این منظور تمریناتی در ارتباط با ایجاد شکل‌های فضایی از طریق دوران شکل‌های مسطح هندسی و نیز کار با گستردهٔ شکل‌های فضایی و نیز تصور هندسی نسبت به برش‌های مقطعی شکل‌های فضایی داریم.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

یکی از کاربردهای اصلی هندسه، در معماری بناها بوده است و در تاریخ کشورمان از دوران کهن تا معاصر صدها نمونهٔ ممتاز از تأثیر آشنایی دانشمندان، ریاضی‌دانان و مهندسان و معماران ایرانی با دانش هندسه به وضوح دیده می‌شود. بنای تاریخی گنبد قابوس واقع در شهر گنبد کاووس که در قرن چهارم هجری بنا شده است یک نمونه از این بناها است. در این بنا حجم‌های هندسی مانند استوانه، مخروط و منشور به چشم می‌خورند. تقارن و زیبایی اثر، نمایانگر تسلط کامل معماران آن با دانش هندسهٔ فضایی می‌باشد.

دانستنی‌هایی برای معلم

مباحث هندسهٔ فضایی از دیر باز مورد توجه ریاضی‌دانان و حکمای قدیم بوده‌اند. وجود اهرام ثلاثه در مصر باستان به خوبی بیانگر آشنایی هندسه‌دانان مصری با شکل‌های فضایی بوده است. حکما و ریاضی‌دانان یونان باستان نیز در این زمینه تحقیقات و بحث‌های بسیاری داشته‌اند. یکی از قدیمی‌ترین این بحث‌ها، موضوع تضعیف مکعب بوده است. مسئله‌ای مشهور در تاریخ ریاضیات که قرن‌ها باعث بحث‌های مختلف شده است و امروزه لاینحل بودن آن به اثبات رسیده است. تضعیف مکعب، یعنی ساختن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروض باشد (فقط به کمک خط‌کش غیر مدرج و پرگار) که معادل با رسم خط راستی به طول $\sqrt[3]{۲}$ می‌باشد. در یونان باستان، ائودوکسوس (حدود ۳۷۰ قبل از میلاد) و اراتستن (حدود ۲۳۰ قبل از میلاد) و آپولونیوس (حدود ۲۲۵ قبل از میلاد) از جملهٔ افرادی بوده‌اند که برای این کار روش‌هایی ارائه کرده‌اند. مسئله تضعیف مکعب به همراه دو مسئلهٔ مشهور دیگر (تثلیث زاویه و تربیع دایره) از مسائل بحث برانگیز در طی قرن‌ها بوده‌اند. یکی دیگر از ریاضی‌دانان یونان قدیم که کارهای برجسته‌ای در هندسه فضایی انجام داد، نابغهٔ آن عصر، یعنی ارشمیدس بود. ارشمیدس تحقیقات مفصلی در زمینهٔ محاسبات مربوط به کره، استوانه و مخروط و قطعات آنها انجام داد. یونانیان قدیم با چند وجهی‌های منتظم (چهاروجهی منتظم یا هرم منتظم مثلث‌القاعده – شش‌وجهی منتظم یا مکعب – هشت‌وجهی منتظم، دوازده‌وجهی منتظم و بیست‌وجهی منتظم) آشنا بودند و حتی نسبت به آنها دیدگاه‌های فلسفی خاصی داشتند. قرن‌ها بعد اویلر ریاضی‌دان بنام سوئیسی رابطهٔ معروف خود را درباره تعداد رئوس، یال‌ها و وجه‌های هر چندوجهی منتظم، اثبات کرد. این رابطه قبلاً توسط دکارت نیز کشف شده بود. مطابق این دستور اگر E تعداد یال‌ها، F تعداد وجه‌ها و V تعداد

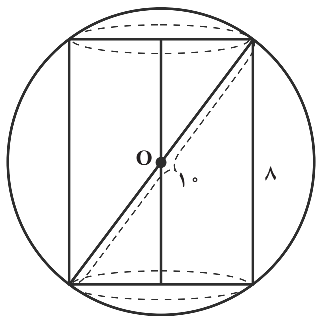
رئوس یک چندوجهی محدب باشد، آنگاه : E=V+F−۲. ریاضی‌دان اروپایی دیگر که در زمینهٔ هندسهٔ فضایی کارهای ماندگاری انجام داد، کاوالیری بود که در سال ۱۵۹۸در میلان به دنیا آمد و زیر نظر گالیله درس خوانده بود و در فاصلهٔ سال‌های ۱۶۲۹ − ۱۶۴۷ استاد ریاضیات دانشگاه بولونیا بود. اصول بنیان گذاشته توسط او کاربردهای زیادی در محاسبهٔ سطح و حجم دارند. این دو اصل عبارت‌اند از :

۱ــ اگر دو قطعه چنان باشند که بین یک جفت خط موازی قرار گیرند و هر خط موازی آن دو خط، روی این دو قطعه، پاره خط‌های برابر جدا کند، آنگاه مساحت‌های این دو قطعه برابر است.

۲ــ اگر دو شکل فضایی بین یک جفت صفحهٔ موازی قرار گیرند و هر صفحه موازی آن دو صفحه، روی این دو شکل سطح مقطع‌های برابر ایجاد کنند، آنگاه حجم‌های این دو شکل برابر است.

به کمک این اصول دستورهای مربوط به حجم هرم و کره به طور دقیق اثبات می‌شود.

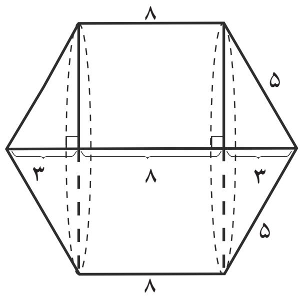
مسیرهایی برای توسعه



۱ــ در فعالیت مربوط به محاسبهٔ حجم کره، با مفهوم محیط شدن و محاط شدن آشنا می‌شویم. این یکی از مباحثی است که قابلیت توسعه و تعمیق دارد و می‌توان براساس آن مسائل بیشتری را مطرح کرد، از جمله این مسئله :

ــ استوانه‌ای به ارتفاع ۸ سانتی‌متر در کره‌ای به قطر ۱۰ سانتی‌متر محاط شده است. حجم استوانه و حجم فضای ما بین کره و استوانه را به دست آورید.

۲ــ در کار در کلاس صفحهٔ ۱۳۶ همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با تغییر مکان رأس هرم‌ها روی وجه بالایی مکعب، حجم هرم‌ها تغییر نمی‌کند. این می‌تواند مقدمه‌ای بر شکل‌گیری مفهوم مکان هندسی در ذهن دانش‌آموزان باشد : «مکان هندسی رأس هرم‌هایی با قاعدهٔ مستطیل ABCD که حجم ثابتی داشته باشند، صفحه‌ای موازی این مستطیل است، از اینجا می‌توان بدون نام بردن از اصطلاح «مکان هندسی» درکی شهودی از آن ایجاد کرد و مثال‌هایی از هندسهٔ مسطحه آورد تا این مفهوم در ذهن دانش‌آموزان جایی باز کند.



۳ـ دوران شکل‌های هندسی و ایجاد شکل‌های فضایی و محاسبهٔ حجم آنها نیز می‌تواند به توسعهٔ مفاهیم این فصل بیانجامد. از جمله این مسئله :

حجم حاصل از دوران یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به قاعده‌های ۱۴ و ۸ سانتی‌متر و ساق‌های ۵ سانتی‌متر حول قاعدهٔ بزرگ آن را به دست آورید.

معرفی منابع برای معلمان

دایرةالمعارف هندسه جلد ۱۵ و ۱۶ نوشتهٔ : محمدهاشم رستمی انتشارات مدرسه وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

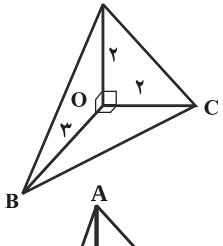
۱ـ مساحت رویهٔ کره‌ای، مساوی ۱۰۰π واحد مربع است. حجم این کره را به دست آورید.

۲ـ اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم، مساحت آن چند برابر می‌شود؟ حجم آن چند برابر می‌شود؟

۳ـ کره‌ای در یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم کره به حجم مکعب را به دست آورید.

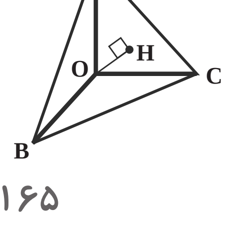
۴ـ رأس یک نیم کره، نقطه‌ای از آن است که از قاعدهٔ نیم‌کره بیشترین فاصله را دارد. فاصلهٔ رأس نیم کره از مرکز قاعده و از محیط قاعده را برحسب شعاع کره (R) به دست آورید.

۵ـ مخروطی در یک نیم‌کره محاط شده است، به طوری که رأس مخروط بر رأس نیم کره واقع است و قاعده‌های مخروط و نیم‌کره نیز بر هم منطبق است. نسبت حجم مخروط به حجم نیم کره را به‌دست آورید.



۶ـ در شکل مقابل OA و OB و OC دوبه‌دو بر هم عمودند. حجم هرم AOBC را به‌دست آورید.

۷ـ در شکل مقابل OA و OB و OC دوبه‌دو بر هم عمودند و OA=OB=OC=۲.



الف) حجم هرم AOBC را به دست آورید.

ب) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

ج) با توجه به حجم هرم، با قاعدهٔ مثلث ABC، فاصلهٔ O از این

قاعده (OH) را به دست آورید.

۸ ــ مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۶ و ۸ سانتی‌متر هستند، یک بار حول ضلع ۶ سانتی‌متری و بار دیگر حول ضلع ۸ سانتی‌متری دوران می‌دهیم. نسبت حجم‌های دو شکل ایجاد شده را به‌دست آورید.

۹ــ نیم‌دایره‌ای به شعاع R را به شکل یک مخروط در می‌آوریم. حجم مخروط را بر حسب R به دست آورید. اگر همین نیم‌دایره را حول قطر آن دوران دهیم، حجم حاصل چقدر است؟ نسبت حجم این دو شکل (مخروط و شکل حاصل از دوران) را به دست آورید.

اهداف

ــ آشنایی با دستور محاسبهٔ حجم کره با داشتن اندازهٔ شعاع آن
ــ آشنایی با دستور محاسبهٔ مساحت رویهٔ کره با داشتن اندازهٔ شعاع آن

ابزار مورد نیاز :

۱ــ ورقهٔ طلقی شکل شفاف ۲ــ چسب و ابزار برش به مقدار کافی
۳ــ ورقه‌های کاغذی ۴ــ توپ پلاستیکی کوچک

روش تدریس

در ابتدای درس، پس از یادآوری انواع حجم‌ها از کتاب هفتم، تعریف کره با استفاده از مشابهت بین مفاهیم دایره (در صفحه) و کره در فضا انجام می‌گیرد : کره مجموعه نقاطی از فضا است که همهٔ آن نقطه‌ها از یک نقطه در فضا به نام مرکز، به یک فاصلهٔ ثابت و مشخص هستند. به این اندازه، شعاع کره می‌گوییم.

در ادامه با انجام دو فعالیت، دانش‌آموزان با دستورات محاسبهٔ حجم و سطح کره به طور عملی آشنا می‌شوند، بدون اینکه نیازی به حفظ کردن آنها داشته باشند. هدف از انجام این دو فعالیت این است که دانش‌آموزان با این دو اصل آشنا شوند :

۱ــ حجم کره‌ای به شعاع R، $\frac{۲}{۳}$ حجم استوانه‌ای است که این کره در آن قابل محاط شدن است.

۲ــ مساحت رویهٔ کره‌ای به شعاع R چهار برابر مساحت دایره‌ای به همین شعاع است. با انجام درست فعالیت اوّل، اصل اوّل توسط دانش‌آموزان به خوبی درک شده و به خاطر سپرده می‌شود. دانش‌آموزان باید خود با دست‌ورزی و سعی و خطا، استوانهٔ طلقی‌ای که از اطراف بر کره (توپ پلاستیکی) محیط می‌شود را بسازند و سپس توپ را از استوانه خارج کرده و به ترتیبی که در کتاب بیان شده است، آن را از خط برش آن نصف کرده و به دو نیم کره تفکیک کنند. یکی از دو نیم کره را در استوانه قرار دهند (هدف از این کار این است که برابری شعاع نیم کره و شعاع قاعدهٔ استوانه به صورت عملی دیده شود) آنگاه با ریختن آب توسط نیم کره دیگر، اولاً برابری حجم‌های دو نیم کره یادآوری شود، ثانیاً نتیجه شود که حجم استوانه سه برابر حجم نیم کره است. بنابراین حجم استوانه ۱/۵ $(\frac{۳}{۲})$

برابر حجم کره و لذا حجم کره $\frac{۲}{۳}$ حجم استوانه است.

$$\text{(کره)}\ V = \frac{۲}{۳}\ \text{(استوانه)}\ V = \frac{۲}{۳} \times \pi R^{۲} \times ۲R = \frac{۴}{۳} \pi R^{۳}$$

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۳۲ نیز روی همین موضوع کار شده است و محاسبه‌ای عملی در ارتباط با حجم کره‌ای محاط در استوانه انجام می‌گیرد تا همان فعالیت دوباره به‌صورت محاسباتی تکرار شود.

در فعالیت صفحهٔ ۱۳۳، با استفاده از یکی از همان دو نیم کرهٔ پلاستیکی دستور محاسبهٔ مساحت رویهٔ نیم‌کره و از آنجا مساحت رویهٔ کره به‌صورت تجربی به‌دست می‌آید. دانش‌آموزان باید سعی کنند به کمک دو ورقهٔ کاغذی دایره شکل که شعاع آنها با شعاع نیم‌کره برابر است، روی نیم‌کره را به‌طور کامل بپوشانند. یکی از راه‌های این کار، تقسیم هر دایره به هشت قطاع برابر است. البته بدیهی است که این پوشاندن سطح به‌صورت تقریبی و با خطا انجام می‌شود، ولی شهودی که از رابطه بین مساحت رویهٔ نیم‌کره و مساحت دایرهٔ قاعده آن به‌دست می‌دهد این آمادگی ذهنی را به‌دانش‌آموزان می‌دهد که مساحت رویهٔ نیم‌کره دو برابر مساحت دایره و در نتیجه مساحت رویهٔ کره ۴ برابر مساحت این دایره است :

$$S = ۴\pi R^{۲}$$

در کار در کلاس این صفحه نیز محاسباتی در همین ارتباط داریم. نکتهٔ قابل توجه آن است که تفاوت بین مساحت کل یک نیم‌دایره توپر و یک نیم‌کرهٔ تو خالی در این محاسبه‌ها تجربه می‌شود.

در تمرین ۱ هدف کارکردن برروی اعداد بزرگ و یادآوری نماد علمی است. شعاع کره زمین ۶۴۰۰ و یا $۶/۴ \times ۱۰^{۳}$ کیلومتر و در نتیجه مساحت رویهٔ کره زمین برابر است با :

$$S = ۴\pi R^{۲} = ۴\pi(۶/۴ \times ۱۰^{۳})^{۲} = ۱/۶۳۸۴ \times ۱۰^{۸}\ km^{۲}$$

و نسبت مساحت کشور عزیزمان به مساحت رویهٔ کره زمین برابر است با :

$$\frac{۱/۶۴۸ \times ۱۰^{۶}}{۱/۶۳۸۴ \times ۱۰^{۸}} \approx ۱/۰۰۶ \times ۱۰^{-۲} = \%۱/۰۰۶$$

یعنی مساحت کشور ما تقریباً یک درصد مساحت کره زمین است!

در تمرین ۲ توجه می‌کنیم که ارتفاع کپسول با ارتفاع استوانه برابر نیست (بدفهمی رایج) ارتفاع نیم‌کرهٔ بالایی، مساوی شعاع قاعدهٔ استوانه، یعنی ۳۰ سانتی‌متر است و لذا ارتفاع استوانه ۷۰ سانتی‌متر

است. پس حجم کپسول برابر است با :

$$V(\text{کپسول}) = V(\text{استوانه}) + V(\text{نیم‌کره}) \quad V = \pi(۰/۳)^۲ \times ۰/۷ + \frac{۲}{۳}\pi(۰/۳)^۳ = ۰/۰۸۱\pi \approx ۰/۲۵۴\ m^۳ = ۲۵۴\ lit$$

برای محاسبهٔ سطح کپسول، برای پاسخ به قسمت بعدی مسئله، دقت کنیم که مساحت قاعدهٔ نیم‌کره نباید محاسبه شود (بدفهمی رایج) همچنین مساحت کل استوانه هم نباید محاسبه شود زیرا قاعده بالایی آن رنگ نمی‌شود؛ بنابراین :

$$S(\text{کپسول}) = \text{مساحت قاعده} + \text{مساحت جانبی استوانه} + \text{مساحت نیم‌کره}$$

$$= \pi(۰/۳)^۲ + ۲\pi(۰/۳)(۰/۷) + ۲\pi(۰/۳)^۲ =$$

$$= ۰/۶۹\pi \approx ۲/۱۶۶۶\ m^۲$$

پس مقدار رنگ لازم برابر است با : $۲/۱۶۶۶ \times ۱۰۰ = ۲۱۶/۶۶g$

توصیه‌های آموزشی و بدفهمی‌های رایج

توصیه می‌شود که در حل مسائل این بخش، دانش‌آموزان به‌طور فعال با ماشین‌حساب کار کنند و سعی شود از مثال‌های عینی استفاده شود که معمولاً اندازه‌ها، عددهای صحیح نیستند. همچنین به تبدیل‌های واحدها دقت شود. برای محاسبهٔ حجم و سطح لازم است که همهٔ متغیرها دارای واحد (یکای) اندازه‌گیری همسان باشند. به‌عنوان مثال، اگر حجم برحسب مترمکعب خواسته شده است، لازم است که شعاع یا ارتفاع با واحد متر بیان شود و این یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان است.

همچنین توصیه می‌شود که حجم‌هایی که اندازهٔ آنها به‌دست می‌آید، با حجم‌هایی که دانش‌آموزان می‌توانند آنها را مجسم کنند مقایسه شود، مانند کاری که در رابطه با حجم کپسول انجام شده است و به‌واحد لیتر تبدیل شده است. مثلاً می‌توان اشاره کرد که حجم کپسول که حدود ۲۵۴ لیتر است، چند برابر حجم یک بطری نوشابهٔ ۱/۵ لیتری است.

اهداف

ـ آشنایی با دستور محاسبهٔ حجم هرم
ـ آشنایی با دستور محاسبهٔ حجم مخروط

روش تدریس

در ابتدای این درس تعریف‌های اولیهٔ مربوط به هرم انجام می‌گیرد. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد و ابهام دانش‌آموزان را نسبت به آن رفع نمود، این است که قاعدهٔ هرم نیز جزء وجه‌های آن است و در فعالیت ابتدای درس نیز روی این امر تأکید شده است. در قسمت دوم فعالیت (صفحهٔ ۱۳۵ و ۱۳۶) هدف این است که دانش‌آموزان به‌طور شهودی به این حقیقت واقف شوند که اگر دو هرم دارای مساحت‌های قاعده یکسان و ارتفاع‌های برابر باشند، حجم‌های برابر دارند. اثبات دقیق این موضوع به کمک اصل کاوالیری انجام می‌شود. کار در کلاس صفحهٔ ۱۳۶ هم معطوف به همین موضوع است. در فعالیت صفحهٔ ۱۳۷ می‌خواهیم از همین موضوع استفاده کرده و دستور حجم هرم را استنتاج نمائیم. توصیه می‌شود که پرسش‌های انجام یافته را قدم به قدم با دانش‌آموزان مطرح نموده و پاسخ بگیریم.

پرسش ۱ : چهارضلعی ABED، چه نوع چهارضلعی است؟ چرا مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت‌اند؟

پاسخ : با توجه به تعریف منشور، این چهار ضلعی مستطیل است و قطر هر مستطیل، آن را به دو مثلث هم‌نهشت و هم مساحت تفکیک می‌کند.

پرسش ۲ : چرا هرم‌های CBED و CBAD دارای حجم‌های برابر هستند؟

پاسخ : این دو هرم در رأس C مشترک‌اند و قاعده‌های آنها طبق آنچه که در پرسش (۱) دیدیم هم مساحت‌اند، پس ارتفاع آنها برابر است (عمودی که از رأس C بر هر دو قاعده رسم می‌شود) و لذا طبق نتیجهٔ فعالیت قبل، حجم‌های یکسان دارند.

پرسش ۳ : چرا مثلث‌های DEF و ABC هم مساحت‌اند؟

پاسخ : زیرا وجه‌های روبه‌رو (قاعده‌های) منشور هستند و در نتیجه هم‌نهشت و هم مساحت‌اند.

پرسش ۴ : چرا هرم‌های CDEF و DABC دارای حجم‌های برابر هستند؟

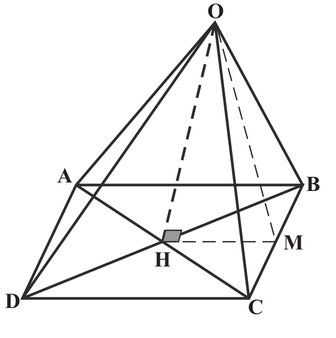
پاسخ : زیرا قاعده‌های آنها (مثلث‌های DEF و ABC) هم مساحت‌اند و ارتفاع‌های آنها (CF و AD) برابرند.

پرسش ۵ : با توجه به پاسخ‌های سؤال‌های ۲ و ۴ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

پاسخ : سه هرم مشخص شده در شکل، حجم‌های برابر دارند و در نتیجه حجم هر یک، مساوی یک سوم حجم منشور است. کار در کلاس و فعالیت بعدی نیز به‌کار با دستور حجم هرم اختصاص دارد. در فعالیت (۱) کاربرد قضیهٔ فیثاغورس را در محاسبهٔ ارتفاع هرم منتظم با قاعدهٔ مربع می‌بینیم و از آنجا می‌توانیم حجم هرم را به دست آوریم. همانطور که می‌بینیم مثلث OBC متساوی‌الساقین است، پس OM میانه و ارتفاع این مثلث بوده و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBM داریم : $OB = ۱۰$ و $BM = \frac{BC}{۲} = ۶$ در نتیجه : $OM = \sqrt{OB^۲ - BM^۲} = ۸$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM، HM موازی و نصف AB و در نتیجه مساوی ۶ سانتی‌متر است، پس : $OH = \sqrt{OM^۲ - HM^۲} = \sqrt{۲۸}$ و از آنجا می‌توان حجم هرم را به‌دست آورد. در قسمت دوم، به تعریف مخروط از روی هرم منتظم می‌رسیم و از آنجا دستور محاسبهٔ حجم مخروط را به‌دست می‌آوریم.

در کار در کلاس صفحهٔ ۱۳۹، که یادآوری از فعالیتی از کتاب ریاضی هشتم می‌باشد، مخروطی را به کمک قطاع می‌سازیم. توصیه می‌شود که این کار را به‌صورت عملی و با استفاده از برش‌هایی از یک دایرهٔ کاغذی، نمایش دهیم. در این صورت بدیهی است که مولد مخروط (پاره‌خطی که از رأس به محیط قاعدهٔ مخروط وصل می‌شود) مساوی شعاع قطاع یعنی ۱۰cm بوده و با توجه به اندازهٔ شعاع قاعده مخروط (۶cm) به کمک قضیهٔ فیثاغورس می‌توان ارتفاع مخروط را به‌دست آورد و از آنجا حجم مخروط را محاسبه کرد.

تمرین ۲ شبیه فعالیت صفحهٔ قبل است :



$$BC = ۴ \Rightarrow BM = ۲ \text{ و } OB = OC = ۸$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{OB^۲ - BM^۲} = \sqrt{۶۰}$$

$$HM = \frac{AB}{۲} = ۲$$

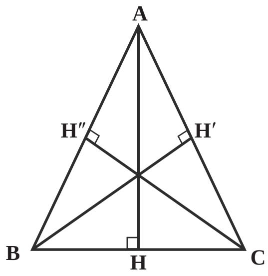
$$OH = \sqrt{OM^۲ - HM^۲} = \sqrt{۵۶} = ۲\sqrt{۱۴}$$

$$V = \frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳} \times ۱۶ \times ۲\sqrt{۱۴} = \frac{۳۲\sqrt{۱۴}}{۳}$$

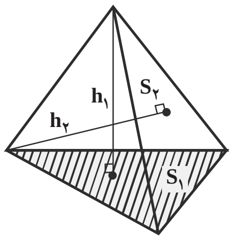
توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود که به دانش‌آموزان تأکید شود که در هرم‌های چهاروجهی (هرم‌هایی که قاعدهٔ آنها مثلث است) رأس هرم می‌تواند هر یک از چهار رأس باشد و قاعدهٔ هرم نیز متغیر است و با تغییر رأس، تغییر می‌کند. درست مانند مثلث در صفحه که مساحت آن مساوی نصف حاصل‌ضرب هر ضلع (قاعده) در ارتفاع وارد بر آن ضلع است :

$$S=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}BH'\times AC=\frac{۱}{۲}CH''\times AB$$



در مورد این گونه هرم‌ها نیز داریم :



$$V=\frac{۱}{۳}s_{۱}h_{۱}=\frac{۱}{۳}s_{۲}h_{۲}=$$
$$\frac{۱}{۳}s_{۳}h_{۳}=\frac{۱}{۳}s_{۴}h_{۴}$$

اهداف

ــ توانایی انجام محاسبه در هندسهٔ فضایی (یافتن اندازه‌های پاره‌خط‌های مجهول، مساحت رویه‌ها و حجم‌ها)

ــ یادآوری گستردهٔ شکل‌های فضایی و اندازه‌ها روی آن

ــ توانایی تجسم فضایی و نیز توصیف دوران یافتهٔ شکل‌های مسطح که منجر به ایجاد شکل‌های فضایی شناخته شده می‌شود.

روش تدریس

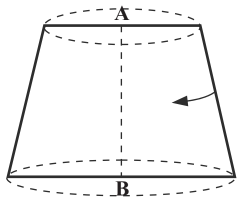
در ابتدای این بخش، فعالیتی مطرح شده که بی‌مقدمه، گستردهٔ شکل‌های فضایی را مطرح کرده و اندازه‌ها را روی آن مشخص می‌کند. دانش‌آموزان باید بتوانند با توجه به اندازه‌های روی شکل فضایی آن اندازه‌ها را در گستردهٔ آن شکل، همانندسازی کرده و از روی آنها مساحت‌ها را اندازه‌گیری کنند. یکی از محاسباتی که در اینجا یادآوری می‌شود، استفاده از قضیهٔ فیثاغورس برای محاسبهٔ مساحت مثلث‌های متساوی‌الساقین با استفاده از طول‌های ساق و قاعده آنها است.

مانند محاسبهٔ مساحت کل هرمی با قاعدهٔ مربع به ضلع ۴ و وجه‌های جانبی مثلث‌های متساوی‌الساقین با ساق‌های ۸، که با رسم ارتفاع هر مثلث و این واقعیت که ارتفاع وارد بر قاعده این مثلث‌ها میانه نیز هست، به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول ارتفاع مساوی $\sqrt{۸^۲-۲^۲}=\sqrt{۶۰}$ به‌دست آمده و مساحت هر مثلث متساوی‌الساقین برابر است با: $S=\frac{۱}{۲}\times۴\times\sqrt{۶۰}=۴\sqrt{۱۵}$ و مساحت گستردهٔ هرم برابر است با: $۱۶\sqrt{۱۵}+۱۶$ که همان مساحت کل هرم است. کار در کلاس صفحهٔ بعد نیز همین هدف را تعقیب می‌کند و دستوری برای محاسبهٔ مساحت کل یک هرم منتظم چهاروجهی به‌دست می‌دهد: $S=۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\sqrt{۳}a^۲$

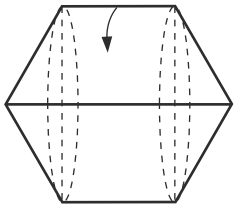
بخش (۲) کار در کلاس هم همین بحث را پی می‌گیرد (محاسبهٔ مساحت جانبی هرمی با قاعدهٔ شش ضلعی منتظم، که مساوی شش برابر مساحت مثلثی متساوی‌الساقین است).

فعالیت صفحهٔ ۱۴۱، به هدف سوم، یعنی دوران شکل‌های هندسی و رابطهٔ آن با شکل‌های فضایی می‌پردازد. دانش‌آموزان باید به این توانایی برسند که بتوانند دوران یافتهٔ شکل‌های مسطح را در فضا تجسم کرده و آنها را رسم کنند. پیشنهاد می‌شود که در کلاس درس این کار به‌صورت عملی و به کمک ورقه‌های مقوایی صُلب و تخت انجام گیرد تا دانش‌آموزان به تصور بهتری دست یابند. به

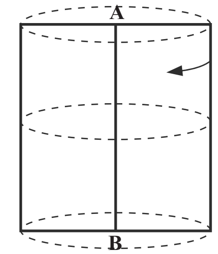
نمونه‌های زیر توجه شود :



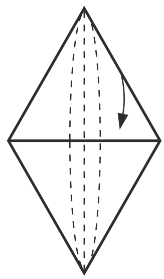
دوران یافتهٔ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حول محور تقارن AB (مخروط ناقص)



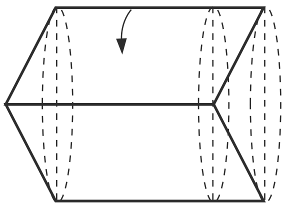
دوران یافتهٔ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حول قاعدهٔ بزرگ آن (یک استوانه و دو مخروط متصل به آن)



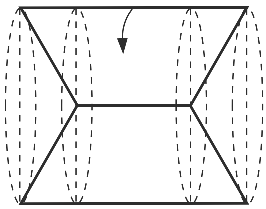
دوران یافتهٔ مستطیل حول ضلع AB (استوانه)



دوران یافتهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع حول یک ضلع آن (دو مخروط که قاعدهٔ مشترک دارند)



دوران یافتهٔ متوازی‌الاضلاع حول ضلع بزرگ آن (یک استوانه که از یک طرف یک مخروط از آن حذف شده و از طرف دیگر مخروط به آن وصل شده است)



دوران یافتهٔ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین حول قاعدهٔ کوچک (استوانه‌ای که دو مخروط از آن حذف شده‌اند)

در کار درکلاس صفحهٔ ۱۴۲، دانش‌آموزان می‌توانند با تجربهٔ قبلی خود، تشخیص دهند که از دوران ربع دایره، حول شعاع آن، یک نیم‌کره ایجاد می‌شود و با داشتن طول شعاع آن، حجم آن را به‌دست آورند.

در فعالیت بعدی (در سه قسمت) تمرکز بر روی تقویت حس شهود و تجسم فضایی دانش‌آموزان است. در قسمت اول و دوم، تجسم نگاه فضایی به یک شکل و تصویری که در ذهن از آن (از سمت و سوهای مختلف) ایجاد می‌شود مدّ نظر است. در قسمت سوم و چهارم تمرکز بر روی تقویت حس شهود و تجسم نسبت به مقطع‌های حاصل از برش شکل‌های فضایی است. کار در کلاس صفحهٔ ۱۴۲

نیز همین موضوع را دنبال می‌کند. پیشنهاد می‌شود که این فعالیت نیز به‌صورت عملی در کلاس درس اجرا شود و دانش‌آموزان با استفاده از اشیاء مناسب و قابل برش در کلاس یا منزل آن را انجام دهند و تجربه کنند.

در تمرین ۱ نسبت حجم به سطح در مورد این چهار شکل به ترتیب برابر است با :

۱) مکعب به ضلع a : $\frac{V}{S}=\frac{a^۳}{۶a^۲}=\frac{۱}{۶}a$

۲) کره به شعاع a : $\frac{V}{S}=\frac{\frac{۴}{۳}\pi a^۳}{۴\pi a^۲}=\frac{۱}{۳}a$

۳) استوانه به شعاع قاعده و ارتفاع a : $\frac{V}{S}=\frac{\pi a^۳}{۴\pi a^۲}=\frac{۱}{۴}a$

۴) استوانه به ارتفاع و قطر قاعده a : $\frac{V}{S}=\frac{\frac{\pi a^۳}{۴}}{\frac{۳\pi a^۲}{۲}}=\frac{۱}{۶}a$

و چنانچه دیده می‌شود در مورد کره، این نسبت از همهٔ موارد دیگر، بزرگ‌تر است. این نسبت بیانگر آن است که به لحاظ اقتصادی، ساختن شکل‌ها به شکل کره به صرفه‌تر است، یعنی در میان اشکال هندسی با مساحت برابر، حجم کره بیشتر است، زیرا توزیع حجم آن در سطح واحد، بیشتر است.

هدف از تمرین ۲، ایجاد یک شهود ابتدایی نسبت به شکلی فضایی است که از یک ورقهٔ مسطح ساخته می‌شود و در سال‌های بالاتر مسائلی از آن مطرح می‌شود. برای آنکه ۴ کره در این جعبهٔ در باز جا شوند، باید داشته باشیم : $a-۲x=۴x$ و در نتیجه : $a=۶x$

لازم به ذکر است که البته کره‌ها از بالا، از جعبه بیرون می‌مانند و نصف آنها داخل جعبه قرار می‌گیرد.

حل تمرین‌های فصل ۸

تمرین

۱ــ قطر تقریبی کرهٔ زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

الف) قطر = $۱/۲۸ \times ۱۰^{۴}$

شعاع = $۶/۴ \times ۱۰^{۳}$

ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید.

ب) قطر = $۱/۲۸ \times ۱۰^{۷}$

شعاع = $۶/۴ \times ۱۰^{۶}$

ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.

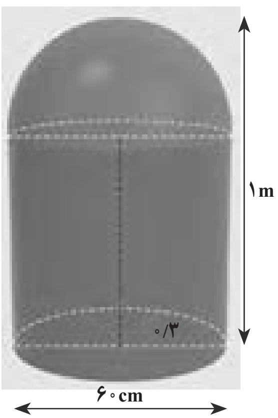
ج) $S = ۴\pi R^{۳}$

$S = ۴\pi\ (۶/۴ \times ۱۰^{۳})^{۲} = ۱/۶۳۸۴ \times ۱۰^{۸} km^{۲}$

$S = ۴\pi\ (۶/۴ \times ۱۰^{۶})^{۲} = ۵/۱۴۵ \times ۱۰^{۱۴} m^{۲}$

د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱٬۶۴۸٬۰۰۰ کیلومترمربع است. مساحت ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

د) $\dfrac{۱/۶۴۸ \times ۱۰^{۶}}{۱/۶۳۸۴ \times ۱۰^{۸}} \approx$ ٪۱



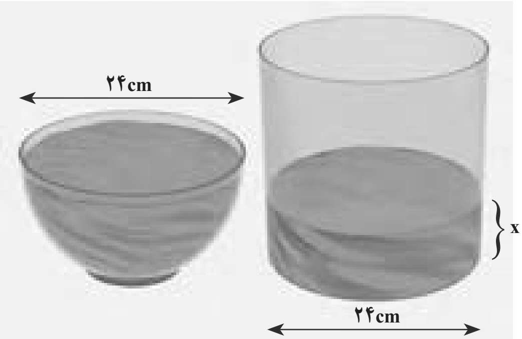
۲ــ یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم‌کره روی یک استوانه به‌صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده کپسول ۶۰ سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر حسب متر مکعب به‌دست آورید.

اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم رنگ لازم است به‌شرط اینکه رنگ‌آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم رنگ نیاز داشته باشد؟

$$V = ۰/۳^۲ \times \pi \times ۰/۷ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۴}\pi \times ۰/۳^۳$$
$$= ۰/۰۶\pi + ۰/۰۱۸\pi = ۰/۰۷۸\pi \simeq ۰/۲۴m^۳$$

$$S = ۰/۳^۲ \times \pi + ۰/۶ \times \pi \times ۰/۷ + \frac{۱}{۲} \times ۴ \times \pi \times ۰/۳^۲ = ۰/۰۹\pi + ۰/۴۲\pi + ۰/۱۸ = ۲/۱۷m^۲$$

رنگ لازم = ۲/۱۷ × ۰/۱ = ۰/۲۱۷kg



۳ــ پیمانه‌ای به شکل نیم‌کره و به قطر دهانه **۲۴** سانتیمتر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

حجم نیم‌کره $= \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۳} \times \pi \times ۱۲^۳ = ۱۱۵۲\pi$

حجم آب درون استوانه $= ۱۲^۲ \times \pi \times x$

$۱۱۵۲\pi = ۱۲^۲ \times \pi \times x$

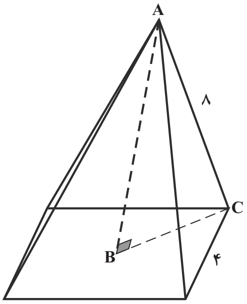
ارتفاع آب درون استوانه $x = \frac{۱۱۵۲\cancel{\pi}}{۱۴۴\cancel{\pi}} = ۸cm$

تمرین

۱ــ حجم هرمی را به‌دست آورید که قاعدهٔ آن مستطیلی به ابعاد ۶ و ۵ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰سانتیمتر باشد.

$$V = \frac{۱}{۳}sh = \frac{۱}{۳} \times ۵ \times ۶ \times ۱۰ = ۱۰۰ cm^۳$$

۲ــ حجم هرمی با قاعدهٔ مربع را به‌دست آورید که ضلع قاعدهٔ آن ۴cm باشد و وجه‌های جانبی



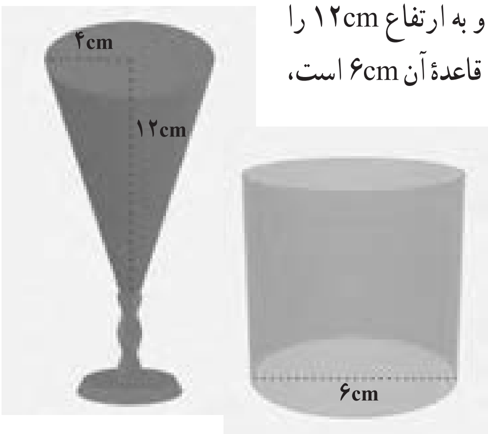
آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸cm باشد.

قطر قاعده به کمک رابطه فیثاغورث برابر $۴\sqrt{۲}$ است.

پس $BC = ۲\sqrt{۲}$ $\qquad AB^{۲} = AC^{۲} - BC^{۲}$

$AB = \sqrt{۵۶}$ $\qquad AB^{۲} = ۸^{۲} - (۲\sqrt{۲})^{۲} = ۶۴ - ۸ = ۵۶$

$$V = \frac{۱}{۳}sh = \frac{۱}{۳} \times ۱۶ \times \sqrt{۵۶} = \frac{۱۶}{۳}\sqrt{۵۶} = \frac{۳۲\sqrt{۱۴}}{۳}$$



۳ــ ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانهٔ ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعدهٔ آن ۶cm است، خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

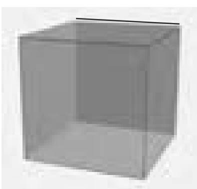
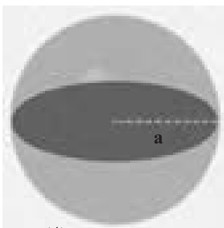
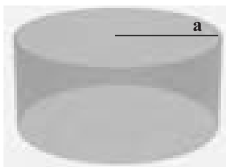
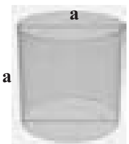
حجم آب درون استوانه = حجم آب مخروط

$$\frac{۱}{۳}\cancel{\pi} \times ۴^{۲} \times ۱۲ = \cancel{\pi} \times ۳^{۲} \times h$$

$$h = \frac{۶۴}{۹}$$

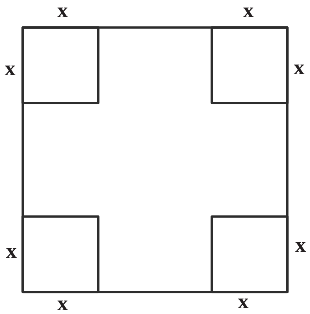
تمرین

۱ــ حجم و سطح کل شکل‌های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

مکعب به ضلع a	کره به شعاع a	استوانه به ارتفاع و شعاع قاعدهٔ a	استوانه به ارتفاع و قطر قاعدهٔ a
			
$V=a^{۳}$	$V = \frac{۳}{۴}\pi a^{۳}$	$V = \pi a^{۳}$	$V = \pi(\frac{a}{۲})^{۲}a = \frac{\pi a^{۳}}{۴}$
$S= ۶a^{۲}$	$S= ۴\pi a^{۲}$	$S= ۲\pi a^{۲}+۲\pi a^{۲}$ $=۴\pi a^{۲}$	$S = ۲(\frac{a}{۲})^{۲}\pi + a^{۲}$ $= \frac{۳a^{۲}\pi}{۲}$

در هر مورد، نسبت حجم به سطح ($\frac{V}{S}$) را به‌دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ‌تر است؟

$\frac{v}{s}=\frac{a}{6}$ $\qquad$ $\frac{v}{s}=\frac{a}{3}$ $\qquad$ $\frac{v}{s}=\frac{a}{4}$ $\qquad$ $\frac{v}{s}=\frac{a}{6}$



۲ــ از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.

$4x = a - 2x$

$a = 6x$

$x = \frac{a}{6}$