

حجم و مساحت

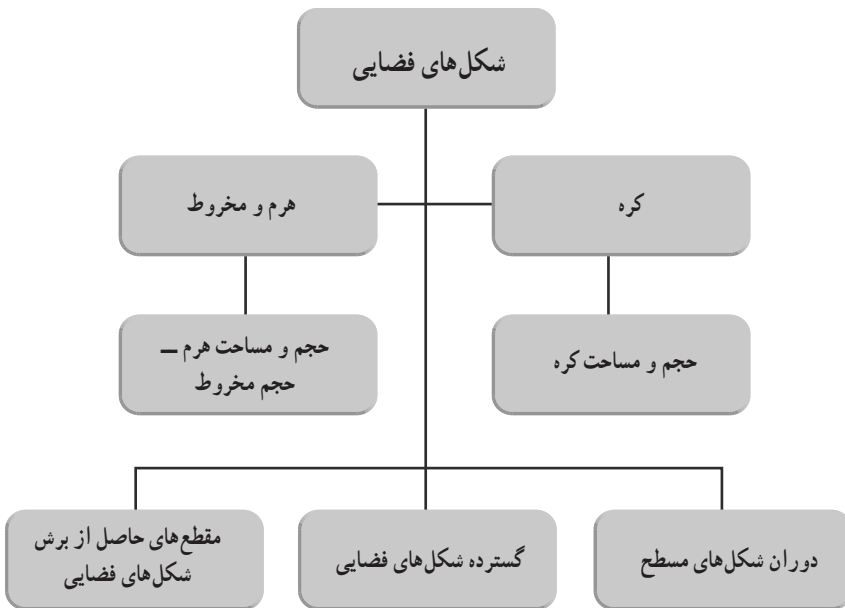


گنبد قابوس بنایی تاریخی از سده چهارم هجری است که در شهر گنبدکاووس در استان گلستان قرار دارد. این بنا بلندترین برج تمام آجری جهان به شمار می‌رود. این برج استوانه‌ای که گنبدی مخروطی شکل روی آن قرار گرفته است ۵۵ متر ارتفاع دارد. ستون‌هایی به شکل منشور روی بدنه استوانه‌ای این برج قرار گرفته است. شما در این فصل با حجم‌های استوانه، مخروط و منشور آشنا می‌شوید.

نگاه کلی به فصل

در کتاب ریاضی هفتم در مورد شکل‌های فضایی، توضیحاتی داشتیم و تقسیم‌بندی کلی آنها به سه دسته حجم‌های منشوری، حجم‌های کره‌ی و حجم‌های هرمی را انجام دادیم. همچنین در آنجا با دستورات محاسبه مساحت جانبی و کل و حجم منشور و حجم‌های منشوری آشنا شدیم. در این کتاب دنباله این کار را با ارائه مفاهیم و دستورات مرتبط با حجم‌های کره‌ی و هرمی می‌گیریم. ابتدا دستور حجم کره را به روش تجربی به دست می‌آوریم، سپس به دستور مساحت رویه کره با همان روش می‌پردازیم. در درس دوم دستور حجم هرم را به روشی نسبتاً دقیق به دست می‌آوریم و کمی هم به مساحت آن توجه می‌کنیم و دستور حجم مخروط را نیز از تعمیم آن به دست می‌آوریم و در درس سوم (درس آخر) جمع‌بندی از دستورات قبلی محاسبه سطح و حجم داریم و در کنار آن نگاهی به تقویت قوه شهود فضایی دانش‌آموزان نیز داریم. برای این منظور تمریناتی در ارتباط با ایجاد شکل‌های فضایی از طریق دوران شکل‌های مسطح هندسی و نیز کار با گسترده شکل‌های فضایی و نیز تصور هندسی نسبت به برش‌های مقطعی شکل‌های فضایی داریم.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

یکی از کاربردهای اصلی هندسه، در معماری بناها بوده است و در تاریخ کشورمان از دوران کهن تا معاصر صدها نمونه ممتاز از تأثیر آشنایی دانشمندان، ریاضی دانان و مهندسان و معماران ایرانی با دانش هندسه به وضوح دیده می شود. بنای تاریخی گنبد قابوس واقع در شهر گنبد کاووس که در قرن چهارم هجری بنا شده است یک نمونه از این بناها است. در این بنا حجم های هندسی مانند استوانه، مخروط و منشور به چشم می خورند. تقارن و زیبایی اثر، نمایانگر تسلط کامل معماران آن با دانش هندسه فضایی می باشد.

دانستنی هایی برای معلم

مباحث هندسه فضایی از دیر باز مورد توجه ریاضی دانان و حکمای قدیم بوده اند. وجود اهرام ثلاثه در مصر باستان به خوبی بیانگر آشنایی هندسه دانان مصری با شکل های فضایی بوده است. حکما و ریاضی دانان یونان باستان نیز در این زمینه تحقیقات و بحث های بسیاری داشته اند. یکی از قدیمی ترین این بحث ها، موضوع تضعیف مکعب بوده است. مسئله ای مشهور در تاریخ ریاضیات که قرن ها باعث بحث های مختلف شده است و امروزه لاینحل بودن آن به اثبات رسیده است. تضعیف مکعب، یعنی ساختن مکعبی که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروض باشد (فقط به کمک خط کش غیر مدرج و پرگار) که معادل با رسم خط راستی به طول $\sqrt[3]{2}$ می باشد. در یونان باستان، ائودوکسوس (حدود ۳۷۰ قبل از میلاد) و اراتستن (حدود ۲۳۰ قبل از میلاد) و آپولونیوس (حدود ۲۲۵ قبل از میلاد) از جمله افرادی بوده اند که برای این کار روش هایی ارائه کرده اند. مسئله تضعیف مکعب به همراه دو مسئله مشهور دیگر (تثلیث زاویه و تریب دایره) از مسائل بحث برانگیز در طی قرن ها بوده اند. یکی دیگر از ریاضی دانان یونان قدیم که کارهای برجسته ای در هندسه فضایی انجام داد، نابغه آن عصر، یعنی ارشمیدس بود. ارشمیدس تحقیقات مفصلی در زمینه محاسبات مربوط به کره، استوانه و مخروط و قطعات آنها انجام داد. یونانیان قدیم با چند وجهی های منتظم (چهاروجهی منتظم یا هرم منتظم مثلث القاعده - شش وجهی منتظم یا مکعب - هشت وجهی منتظم، دوازده وجهی منتظم و بیست وجهی منتظم) آشنا بودند و حتی نسبت به آنها دیدگاه های فلسفی خاصی داشتند. قرن ها بعد اوایلر ریاضی دان بنام سوئسی رابطه معروف خود را درباره تعداد رئوس، یال ها و وجه های هر چندوجهی منتظم، اثبات کرد. این رابطه قبلاً توسط دکارت نیز کشف شده بود. مطابق این دستور اگر E تعداد یال ها، F تعداد وجه ها و V تعداد

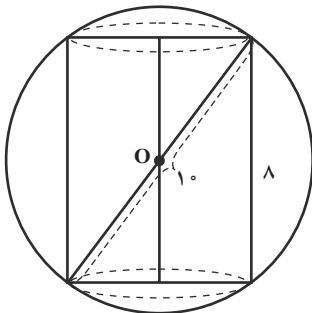
رئوس یک چندوجهی محدب باشد، آنگاه : $E=V+F-2$. ریاضی دان اروپایی دیگر که در زمینه هندسه فضایی کارهای ماندگاری انجام داد، کاوالیری بود که در سال ۱۵۹۸ در میلان به دنیا آمد و زیر نظر گاليله درس خوانده بود و در فاصله سال‌های ۱۶۲۹ - ۱۶۴۷ استاد ریاضیات دانشگاه بولونیا بود. اصول بنیان گذاشته توسط او کاربردهای زیادی در محاسبه سطح و حجم دارند. این دو اصل عبارت‌اند از :

۱- اگر دو قطعه چنان باشند که بین یک جفت خط موازی قرار گیرند و هر خط موازی آن دو خط، روی این دو قطعه، پاره خط‌های برابر جدا کند، آنگاه مساحت‌های این دو قطعه برابر است.

۲- اگر دو شکل فضایی بین یک جفت صفحه موازی قرار گیرند و هر صفحه موازی آن دو صفحه، روی این دو شکل سطح مقطع‌های برابر ایجاد کنند، آنگاه حجم‌های این دو شکل برابر است.

به کمک این اصول دستورهای مربوط به حجم هرم و کره به طور دقیق اثبات می‌شود.

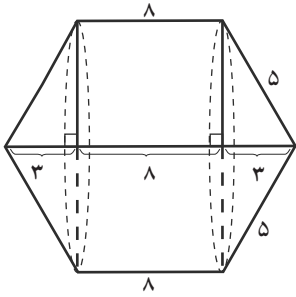
مسیرهایی برای توسعه



۱- در فعالیت مربوط به محاسبه حجم کره، با مفهوم محیط شدن و محاط شدن آشنا می‌شویم. این یکی از مباحثی است که قابلیت توسعه و تعمیق دارد و می‌توان براساس آن مسائل بیشتری را مطرح کرد، از جمله این مسئله :

- استوانه‌ای به ارتفاع ۸ سانتی متر در کره‌ای به قطر ۱۰ سانتی متر محاط شده است. حجم استوانه و حجم فضای ما بین کره و استوانه را به دست آورید.

۲- در کار در کلاس صفحه ۱۳۶ همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با تغییر مکان رأس هرم‌ها روی وجه بالایی مکعب، حجم هرم‌ها تغییر نمی‌کند. این می‌تواند مقدمه‌ای بر شکل‌گیری مفهوم مکان هندسی در ذهن دانش‌آموزان باشد : «مکان هندسی رأس هرم‌هایی با قاعده مستطیل ABCD که حجم ثابتی داشته باشند، صفحه‌ای موازی این مستطیل است، از اینجا می‌توان بدون نام بردن از اصطلاح «مکان هندسی» درکی شهودی از آن ایجاد کرد و مثال‌هایی از هندسه مسطحه آورد تا این مفهوم در ذهن دانش‌آموزان جایی باز کند.



۳- دوران شکل‌های هندسی و ایجاد شکل‌های فضایی و محاسبه حجم آنها نیز می‌تواند به توسعه مفاهیم این فصل بیانجامد. از جمله این مسئله:

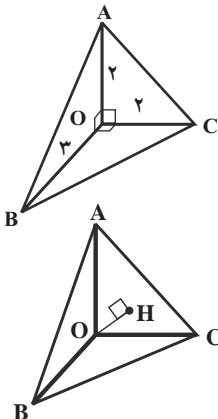
حجم حاصل از دوران یک دوزنقه متساوی الساقین به قاعده‌های ۱۴ و ۸ سانتی‌متر و ساق‌های ۵ سانتی‌متر حول قاعده بزرگ آن را به دست آورید.

معرفی منابع برای معلمان

دایرة‌المعارف هندسه جلد ۱۵ و ۱۶ نوشته: محمد هاشم رستمی انتشارات مدرسه وابسته به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

- ۱- مساحت رویه کره‌ای، مساوی 100π واحد مربع است. حجم این کره را به دست آورید.
- ۲- اگر شعاع کره‌ای را دو برابر کنیم، مساحت آن چند برابر می‌شود؟ حجم آن چند برابر می‌شود؟
- ۳- کره‌ای در یک مکعب محاط شده است. نسبت حجم کره به حجم مکعب را به دست آورید.
- ۴- رأس یک نیم کره، نقطه‌ای از آن است که از قاعده نیم کره بیشترین فاصله را دارد. فاصله رأس نیم کره از مرکز قاعده و از محیط قاعده را بر حسب شعاع کره (R) به دست آورید.
- ۵- مخروطی در یک کره محاط شده است، به طوری که رأس مخروط بر رأس نیم کره واقع است و قاعده‌های مخروط و نیم کره نیز بر هم منطبق است. نسبت حجم مخروط به حجم نیم کره را به دست آورید.



- ۶- در شکل مقابل OA و OB و OC دایره دو بر هم عمودند. حجم هرم AOBC را به دست آورید.
- ۷- در شکل مقابل OA و OB و OC دایره دو بر هم عمودند و $OA=OB=OC=2$.

- الف) حجم هرم AOBC را به دست آورید.
- ب) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.
- ج) با توجه به حجم هرم، با قاعده مثلث ABC، فاصله O از این

قاعده (OH) را به دست آورید.

۸- مثلث قائم الزاویه‌ای را که اضلاع زاویه قائمه آن ۶ و ۸ سانتی متر هستند، یک بار حول ضلع ۶ سانتی متری و بار دیگر حول ضلع ۸ سانتی متری دوران می‌دهیم. نسبت حجم‌های دو شکل ایجاد شده را به دست آورید.

۹- نیم‌دایره‌ای به شعاع R را به شکل یک مخروط در می‌آوریم. حجم مخروط را بر حسب R به دست آورید. اگر همین نیم‌دایره را حول قطر آن دوران دهیم، حجم حاصل چقدر است؟ نسبت حجم این دو شکل (مخروط و شکل حاصل از دوران) را به دست آورید.

اهداف

- آشنایی با دستور محاسبه حجم کره با داشتن اندازه شعاع آن
- آشنایی با دستور محاسبه مساحت رویه کره با داشتن اندازه شعاع آن

ابزار مورد نیاز :

- ۱- ورقه طلقی شکل شفاف
- ۲- چسب و ابزار برش به مقدار کافی
- ۳- ورقه‌های کاغذی
- ۴- توپ پلاستیکی کوچک

روش تدریس

در ابتدای درس، پس از یادآوری انواع حجم‌ها از کتاب هفتم، تعریف کره با استفاده از مشابهت بین مفاهیم دایره (در صفحه) و کره در فضا انجام می‌گیرد: کره مجموعه نقاطی از فضا است که همه آن نقطه‌ها از یک نقطه در فضا به نام مرکز، به یک فاصله ثابت و مشخص هستند. به این اندازه، شعاع کره می‌گوییم.

در ادامه با انجام دو فعالیت، دانش‌آموزان با دستورات محاسبه حجم و سطح کره به طور عملی آشنا می‌شوند، بدون اینکه نیازی به حفظ کردن آنها داشته باشند. هدف از انجام این دو فعالیت این است که دانش‌آموزان با این دو اصل آشنا شوند:

۱- حجم کره‌ای به شعاع R ، $\frac{2}{3}$ حجم استوانه‌ای است که این کره در آن قابل محاط شدن است.

۲- مساحت رویه کره‌ای به شعاع R چهار برابر مساحت دایره‌ای به همین شعاع است. با انجام درست فعالیت اول، اصل اول توسط دانش‌آموزان به خوبی درک شده و به خاطر سپرده می‌شود. دانش‌آموزان باید خود با دست‌ورزی و سعی و خطا، استوانه طلقی‌ای که از اطراف بر کره (توپ پلاستیکی) محیط می‌شود را بسازند و سپس توپ را از استوانه خارج کرده و به ترتیبی که در کتاب بیان شده است، آن را از خط برش آن نصف کرده و به دو نیم کره تفکیک کنند. یکی از دو نیم کره را در استوانه قرار دهند (هدف از این کار این است که برابری شعاع نیم کره و شعاع قاعده استوانه به صورت عملی دیده شود) آنگاه با ریختن آب توسط نیم کره دیگر، اولاً برابری حجم‌های دو نیم کره یادآوری شود، ثانیاً نتیجه شود که حجم استوانه سه برابر حجم نیم کره است. بنابراین حجم استوانه $\frac{1}{5}$ ($\frac{3}{4}$)

برابر حجم کره و لذا حجم کره $\frac{2}{3}$ حجم استوانه است.

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \times 2R = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (\text{کره})$$

در کار در کلاس صفحه ۱۳۲ نیز روی همین موضوع کار شده است و محاسبه‌ای عملی در ارتباط با حجم کره‌ای محاط در استوانه انجام می‌گیرد تا همان فعالیت دوباره به صورت محاسباتی تکرار شود.

در فعالیت صفحه ۱۳۳، با استفاده از یکی از همان دو نیم کره پلاستیکی دستور محاسبه مساحت رویه نیم کره و از آنجا مساحت رویه کره به صورت تجربی به دست می‌آید. دانش‌آموزان باید سعی کنند به کمک دو ورقه کاغذی دایره شکل که شعاع آنها با شعاع نیم کره برابر است، روی نیم کره را به طور کامل بپوشانند. یکی از راه‌های این کار، تقسیم هر دایره به هشت قطاع برابر است. البته بدیهی است که این پوشاندن سطح به صورت تقریبی و با خطا انجام می‌شود، ولی شهودی که از رابطه بین مساحت رویه نیم کره و مساحت دایره قاعده آن به دست می‌دهد این آمادگی ذهنی را به دانش‌آموزان می‌دهد که مساحت رویه نیم کره دو برابر مساحت دایره و در نتیجه مساحت رویه کره ۴ برابر مساحت این دایره است:

$$S = 4\pi R^2$$

در کار در کلاس این صفحه نیز محاسباتی در همین ارتباط داریم. نکته قابل توجه آن است که تفاوت بین مساحت کل یک نیم دایره توپر و یک نیم کره تو خالی در این محاسبه‌ها تجربه می‌شود. در تمرین ۱ هدف کارکردن بر روی اعداد بزرگ و یادآوری نماد علمی است. شعاع کره زمین

۶۴۰۰ یا 6.4×10^3 کیلومتر و در نتیجه مساحت رویه کره زمین برابر است با:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi(6.4 \times 10^3)^2 = 1.6384 \times 10^8 \text{ km}^2$$

و نسبت مساحت کشور عزیزمان به مساحت رویه کره زمین برابر است با:

$$\frac{1.648 \times 10^6}{1.6384 \times 10^8} \approx 1.006 \times 10^{-2} = 0.01006\%$$

یعنی مساحت کشور ما تقریباً یک درصد مساحت کره زمین است!

در تمرین ۲ توجه می‌کنیم که ارتفاع کپسول با ارتفاع استوانه برابر نیست (بدهمی رایج) ارتفاع نیم کره بالایی، مساوی شعاع قاعده استوانه، یعنی 30° سانتی متر است و لذا ارتفاع استوانه 70° سانتی متر

است. پس حجم کپسول برابر است با :

$$V = \pi (0/3)^2 \times 0/7 + V \text{ (استوانه)} = V \text{ (کپسول)}$$

$$\frac{2}{3} \pi (0/3)^2 = 0/081 \pi \approx 0/254 \text{ m}^3 = 254 \text{ lit}$$

برای محاسبه سطح کپسول، برای پاسخ به قسمت بعدی مسئله، دقت کنیم که مساحت قاعده نیم کره نباید محاسبه شود (بدهمی رایج) همچنین مساحت کل استوانه هم نباید محاسبه شود زیرا قاعده بالایی آن رنگ نمی شود! بنابراین :

مساحت نیم کره + مساحت جانبی استوانه + مساحت قاعده = S (کپسول)

$$= \pi (0/3)^2 + 2\pi (0/3)(0/7) + 2\pi (0/3)^2 =$$

$$= 0/69\pi \approx 2/1666 \text{ m}^2$$

$$2/1666 \times 100 = 216/66 \text{ g} \quad \text{پس مقدار رنگ لازم برابر است با :}$$

توصیه های آموزشی و بدفهمی های رایج

توصیه می شود که در حل مسائل این بخش، دانش آموزان به طور فعال با ماشین حساب کار کنند و سعی شود از مثال های عینی استفاده شود که معمولاً اندازه ها، عددهای صحیح نیستند. همچنین به تبدیل های واحدها دقت شود. برای محاسبه حجم و سطح لازم است که همه متغیرها دارای واحد (یکای) اندازه گیری همسان باشند. به عنوان مثال، اگر حجم بر حسب مترمکعب خواسته شده است، لازم است که شعاع یا ارتفاع با واحد متر بیان شود و این یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان است.

همچنین توصیه می شود که حجم هایی که اندازه آنها به دست می آید، با حجم هایی که دانش آموزان می توانند آنها را مجسم کنند مقایسه شود، مانند کاری که در رابطه با حجم کپسول انجام شده است و به واحد لیتر تبدیل شده است. مثلاً می توان اشاره کرد که حجم کپسول که حدود 254 لیتر است، چند برابر حجم یک بطری نوشابه 1/5 لیتری است.

اهداف

- آشنایی با دستور محاسبه حجم هرم
- آشنایی با دستور محاسبه حجم مخروط

روش تدریس

در ابتدای این درس تعریف‌های اولیه مربوط به هرم انجام می‌گیرد. نکته‌ای که باید به آن توجه کرد و ابهام دانش‌آموزان را نسبت به آن رفع نمود، این است که قاعده هرم نیز جزء وجه‌های آن است و در فعالیت ابتدای درس نیز روی این امر تأکید شده است. در قسمت دوم فعالیت (صفحه ۱۳۵ و ۱۳۶) هدف این است که دانش‌آموزان به‌طور شهودی به این حقیقت واقف شوند که اگر دو هرم دارای مساحت‌های قاعده یکسان و ارتفاع‌های برابر باشند، حجم‌های برابر دارند. اثبات دقیق این موضوع به کمک اصل کاوالیری انجام می‌شود. کار در کلاس صفحه ۱۳۶ هم معطوف به همین موضوع است. در فعالیت صفحه ۱۳۷ می‌خواهیم از همین موضوع استفاده کرده و دستور حجم هرم را استخراج نماییم. توصیه می‌شود که پرسش‌های انجام یافته را قدم به قدم با دانش‌آموزان مطرح نموده و پاسخ بگیریم.

پرسش ۱: چهارضلعی $ABED$ ، چه نوع چهارضلعی است؟ چرا مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت‌اند؟

پاسخ: با توجه به تعریف منشور، این چهارضلعی مستطیل است و قطر هر مستطیل، آن را به دو مثلث هم‌نهشت و هم مساحت تفکیک می‌کند.

پرسش ۲: چرا هرم‌های $CBED$ و $CBAD$ دارای حجم‌های برابر هستند؟

پاسخ: این دو هرم در رأس C مشترک‌اند و قاعده‌های آنها طبق آنچه که در پرسش (۱) دیدیم هم مساحت‌اند، پس ارتفاع آنها برابر است (عمودی که از رأس C بر هر دو قاعده رسم می‌شود) و لذا طبق نتیجه فعالیت قبل، حجم‌های یکسان دارند.

پرسش ۳: چرا مثلث‌های DEF و ABC هم مساحت‌اند؟

پاسخ: زیرا وجه‌های روبه‌رو (قاعده‌های) منشور هستند و در نتیجه هم‌نهشت و هم مساحت‌اند.

پرسش ۴: چرا هرم‌های $CDEF$ و $DABC$ دارای حجم‌های برابر هستند؟

پاسخ: زیرا قاعده‌های آنها (مثلث‌های DEF و ABC) هم مساحت‌اند و ارتفاع‌های آنها (CF

و AD) برابرند.

پرسش ۵: با توجه به پاسخ‌های سؤال‌های ۲ و ۴ چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

پاسخ: سه هرم مشخص شده در شکل، حجم‌های برابر دارند و در نتیجه حجم هر یک، مساوی یک سوم حجم منشور است. کار در کلاس و فعالیت بعدی نیز به کار با دستور حجم هرم اختصاص دارد. در فعالیت (۱) کاربرد قضیه فیثاغورس را در محاسبه ارتفاع هرم منتظم با قاعده مربع می‌بینیم و از آنجا می‌توانیم حجم هرم را به دست آوریم. همانطور که می‌بینیم مثلث OBC متساوی‌الساقین است، پس OM میانه و ارتفاع این مثلث بوده و در مثلث قائم‌الزاویه OBM داریم: $OB = ۱۰$ و $BM = \frac{BC}{۲} = ۶$ در نتیجه: $OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = ۸$ و در مثلث قائم‌الزاویه OHM ، HM موازی و نصف AB و در نتیجه مساوی ۶ سانتی‌متر است، پس: $OH = \sqrt{OM^2 - HM^2} = \sqrt{۲۸}$ و از آنجا می‌توان حجم هرم را به دست آورد. در قسمت دوم، به تعریف مخروط از روی هرم منتظم می‌رسیم و از آنجا دستور محاسبه حجم مخروط را به دست می‌آوریم.

در کار در کلاس صفحه ۱۳۹، که یادآوری از فعالیتی از کتاب ریاضی هشتم می‌باشد، مخروطی را به کمک قطاع می‌سازیم. توصیه می‌شود که این کار را به صورت عملی و با استفاده از برش‌هایی از یک دایره کاغذی، نمایش دهیم. در این صورت بدیهی است که مولد مخروط (پاره‌خطی که از رأس به محیط قاعده مخروط وصل می‌شود) مساوی شعاع قطاع یعنی ۱۰ cm بوده و با توجه به اندازه شعاع قاعده مخروط (۶ cm) به کمک قضیه فیثاغورس می‌توان ارتفاع مخروط را به دست آورد و از آنجا حجم مخروط را محاسبه کرد.

تمرین ۲ شبیه فعالیت صفحه قبل است:

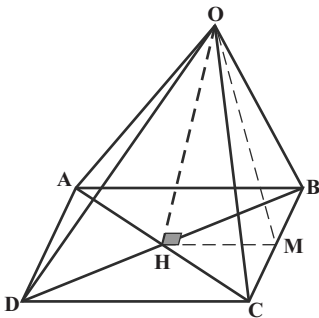
$$BC = ۴ \Rightarrow BM = ۲ \text{ و } OB = OC = ۸$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = \sqrt{۶۰}$$

$$HM = \frac{AB}{۲} = ۲$$

$$OH = \sqrt{OM^2 - HM^2} = \sqrt{۵۶} = ۲\sqrt{۱۴}$$

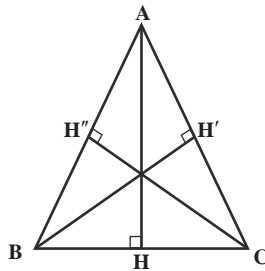
$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times ۱۶ \times ۲\sqrt{۱۴} = \frac{۳۲\sqrt{۱۴}}{۳}$$



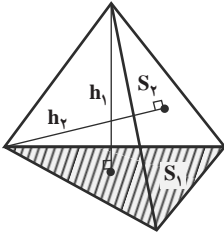
توصیه‌های آموزشی

توصیه می‌شود که به دانش‌آموزان تأکید شود که در هرم‌های چهاروجهی (هرم‌هایی که قاعده آنها مثلث است) رأس هر م می‌تواند هر یک از چهار رأس باشد و قاعدهٔ هرم نیز متغیر است و با تغییر رأس، تغییر می‌کند. درست مانند مثلث در صفحه که مساحت آن مساوی نصف حاصل ضرب هر ضلع (قاعده) در ارتفاع وارد بر آن ضلع است:

$$S = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} BH' \times AC = \frac{1}{2} CH'' \times AB$$



در مورد این گونه‌ها نیز داریم:



$$V = \frac{1}{3} s_1 h_1 = \frac{1}{3} s_2 h_2 =$$

$$\frac{1}{3} s_3 h_3 = \frac{1}{3} s_4 h_4$$

اهداف

- توانایی انجام محاسبه در هندسه فضایی (یافتن اندازه‌های پاره‌خط‌های مجهول، مساحت روبه‌ها و حجم‌ها)
- یادآوری گسترده شکل‌های فضایی و اندازه‌ها روی آن
- توانایی تجسم فضایی و نیز توصیف دوران یافته شکل‌های مسطح که منجر به ایجاد شکل‌های فضایی شناخته شده می‌شود.

روش تدریس

در ابتدای این بخش، فعالیتی مطرح شده که بی‌مقدمه، گسترده شکل‌های فضایی را مطرح کرده و اندازه‌ها را روی آن مشخص می‌کند. دانش‌آموزان باید بتوانند با توجه به اندازه‌های روی شکل فضایی آن اندازه‌ها را در گسترده آن شکل، همانندسازی کرده و از روی آنها مساحت‌ها را اندازه‌گیری کنند. یکی از محاسباتی که در اینجا یادآوری می‌شود، استفاده از قضیه فیثاغورس برای محاسبه مساحت مثلث‌های متساوی‌الساقین با استفاده از طول‌های ساق و قاعده آنها است.

مانند محاسبه مساحت کل هرمی با قاعده مربع به ضلع ۴ و وجه‌های جانبی مثلث‌های متساوی‌الساقین با ساق‌های ۸، که با رسم ارتفاع هر مثلث و این واقعیت که ارتفاع وارد بر قاعده این مثلث‌ها میانه نیز هست، به کمک قضیه فیثاغورس طول ارتفاع مساوی $\sqrt{6}$ به دست آمده و مساحت هر مثلث متساوی‌الساقین برابر است با: $S = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ و مساحت گسترده هرم برابر است با: $16\sqrt{15} + 16$ که همان مساحت کل هرم است. کار در کلاس صفحه بعد نیز همین هدف را تعقیب می‌کند و دستوری برای محاسبه مساحت کل یک هرم منتظم چهاروجهی

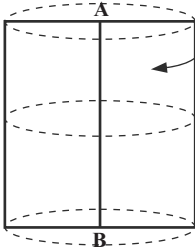
$$S = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \sqrt{3} a^2$$

به دست می‌دهد:

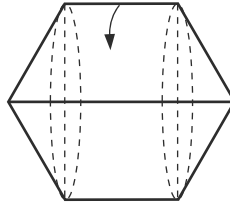
بخش (۲) کار در کلاس هم همین بحث را پی می‌گیرد (محاسبه مساحت جانبی هرمی با قاعده شش ضلعی منتظم، که مساوی شش برابر مساحت مثلثی متساوی‌الساقین است).

فعالیت صفحه ۱۴۱، به هدف سوم، یعنی دوران شکل‌های هندسی و رابطه آن با شکل‌های فضایی می‌پردازد. دانش‌آموزان باید به این توانایی برسند که بتوانند دوران یافته شکل‌های مسطح را در فضا تجسم کرده و آنها را رسم کنند. پیشنهاد می‌شود که در کلاس درس این کار به صورت عملی و به کمک ورقه‌های مقوایی صلب و تخت انجام گیرد تا دانش‌آموزان به تصور بهتری دست یابند. به

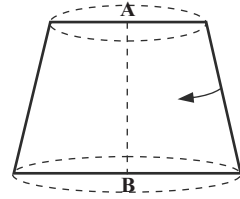
نمونه‌های زیر توجه شود :



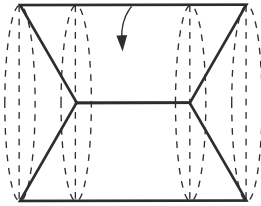
دوران یافته مستطیل
حول ضلع AB (استوانه)



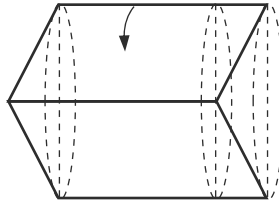
دوران یافته دوزنقه
متساوی الساقین حول قاعده
بزرگ آن (یک استوانه و دو
مخروط متصل به آن)



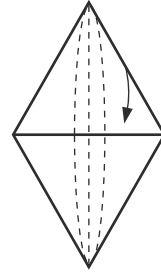
دوران یافته دوزنقه
متساوی الساقین حول محور
تقارن AB (مخروط ناقص)



دوران یافته دوزنقه
متساوی الساقین حول قاعده
کوچک (استوانه‌ای که دو
مخروط از آن حذف شده‌اند)



دوران یافته متوازی الاضلاع
حول ضلع بزرگ آن (یک استوانه که از یک
طرف یک مخروط از آن حذف شده و از
طرف دیگر مخروط به آن وصل شده است)



دوران یافته مثلث
متساوی الاضلاع حول یک
ضلع آن (دو مخروط که
قاعده مشترک دارند)

در کار در کلاس صفحه ۱۴۲، دانش‌آموزان می‌توانند با تجربه قبلی خود، تشخیص دهند که از دوران ربع دایره، حول شعاع آن، یک نیم‌کره ایجاد می‌شود و با داشتن طول شعاع آن، حجم آن را به دست آورند.

در فعالیت بعدی (در سه قسمت) تمرکز بر روی تقویت حس شهود و تجسم فضایی دانش‌آموزان است. در قسمت اول و دوم، تجسم نگاه فضایی به یک شکل و تصویری که در ذهن از آن (از سمت و سوهای مختلف) ایجاد می‌شود مد نظر است. در قسمت سوم و چهارم تمرکز بر روی تقویت حس شهود و تجسم نسبت به مقطع‌های حاصل از برش شکل‌های فضایی است. کار در کلاس صفحه ۱۴۲

نیز همین موضوع را دنبال می‌کند. پیشنهاد می‌شود که این فعالیت نیز به صورت عملی در کلاس درس اجرا شود و دانش‌آموزان با استفاده از اشیاء مناسب و قابل برش در کلاس یا منزل آن را انجام دهند و تجربه کنند.

در تمرین ۱ نسبت حجم به سطح در مورد این چهار شکل به ترتیب برابر است با:

$$۱) \text{ مکعب به ضلع } a : \frac{V}{S} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{1}{6}a$$

$$۲) \text{ کره به شعاع } a : \frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{1}{3}a$$

$$۳) \text{ استوانه به شعاع قاعده و ارتفاع } a : \frac{V}{S} = \frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{1}{4}a$$

$$۴) \text{ استوانه به ارتفاع و قطر قاعده } a : \frac{V}{S} = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{3\pi a^2} = \frac{1}{12}a$$

و چنانچه دیده می‌شود در مورد کره، این نسبت از همه موارد دیگر، بزرگ‌تر است. این نسبت بیانگر آن است که به لحاظ اقتصادی، ساختن شکل‌ها به شکل کره به صرفه‌تر است، یعنی در میان اشکال هندسی با مساحت برابر، حجم کره بیشتر است، زیرا توزیع حجم آن در سطح واحد، بیشتر است.

هدف از تمرین ۲، ایجاد یک شهود ابتدایی نسبت به شکلی فضایی است که از یک ورقه مسطح ساخته می‌شود و در سال‌های بالاتر مسائلی از آن مطرح می‌شود. برای آنکه ۴ کره در این جعبه در باز جا شوند، باید داشته باشیم: $4x = a - 2x$ و در نتیجه:

$$a = 6x$$

لازم به ذکر است که البته کره‌ها از بالا، از جعبه بیرون می‌مانند و نصف آنها داخل جعبه قرار

می‌گیرد.

حل تمرین های

تمرین

۱- قطر تقریبی کره زمین حدود ۱۲۸۰۰ کیلومتر است.

الف) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب کیلومتر با نماد علمی بنویسید.

$$\text{قطر (الف)} = 128 \times 10^4$$

$$\text{شعاع} = 64 \times 10^4$$

ب) قطر و شعاع کره زمین را بر حسب متر با نماد علمی بنویسید.

$$\text{قطر (ب)} = 128 \times 10^7$$

$$\text{شعاع} = 64 \times 10^7$$

ج) مساحت تقریبی رویه (سطح) کره زمین را بر حسب کیلومتر مربع و متر مربع با نماد علمی بنویسید.

$$\text{ج) } S = 4\pi R^2$$

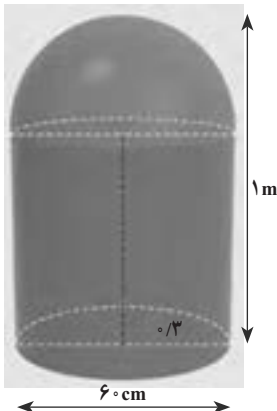
$$S = 4\pi (64 \times 10^7)^2 = 1.6384 \times 10^8 \text{ km}^2$$

$$S = 4\pi (64 \times 10^7)^2 = 5.145 \times 10^{14} \text{ m}^2$$

د) مساحت کشور جمهوری اسلامی ایران حدود ۱/۶۴۸/۰۰۰ کیلومتر مربع است. مساحت

ایران چه کسری از مساحت کره زمین است؟ این نسبت را با درصد نشان دهید.

$$\text{د) } \frac{1/648 \times 10^6}{1.6384 \times 10^8} \approx \%1$$



۲- یک کپسول گاز از قرار گرفتن یک نیم کره روی یک

استوانه به صورت مقابل درست شده است. اگر قطر دایره قاعده

کپسول ۶۰ سانتیمتر و ارتفاع آن یک متر باشد، حجم کپسول را بر

حسب متر مکعب به دست آورید.

اگر بخواهیم سطح کل این کپسول را رنگ کنیم، چند کیلوگرم

رنگ لازم است به شرط اینکه رنگ آمیزی هر متر مربع به ۱۰۰ گرم

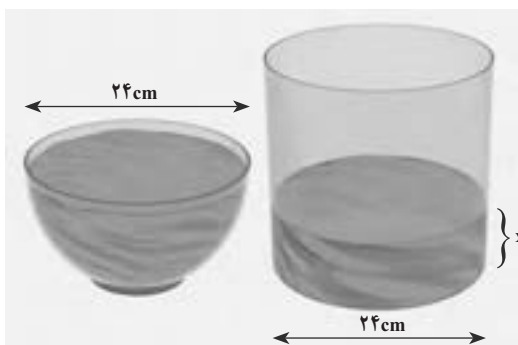
رنگ نیاز داشته باشد؟

$$V = 0.3^2 \times \pi \times 0.7 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \pi \times 0.3^2$$

$$= 0.06\pi + 0.018\pi = 0.078\pi \approx 0.24 \text{ m}^3$$

$$S = 0.3^2 \times \pi + 0.6 \times \pi \times 0.7 + \frac{1}{2} \times 4 \times \pi \times 0.3^2 = 0.09\pi + 0.42\pi + 0.18 = 2.17 \text{ m}^2$$

$$\text{رنگ لازم} = 2.17 \times 0.1 = 0.217 \text{ kg}$$



۳- پیمانه‌ای به شکل نیم کره و به قطر دهانه ۲۴ سانتیمتر را از آب پر و آب آن را در لیوانی استوانه‌ای شکل با همان قطر خالی می‌کنیم؛ آب در لیوان تا چه ارتفاعی بالا می‌آید؟

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 12^3 = 1152\pi$$

$$\text{حجم آب درون استوانه} = 12^2 \times \pi \times x$$

$$1152\pi = 12^2 \times \pi \times x$$

$$x = \frac{1152\pi}{144\pi} = 8 \text{ cm}$$

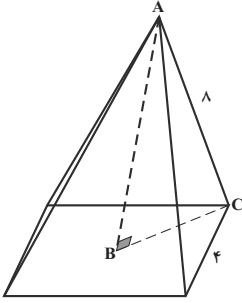
ارتفاع آب درون استوانه

تمرین

۱- حجم هرمی را به دست آورید که قاعده آن مستطیلی به ابعاد ۵ و ۶ سانتیمتر و ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر باشد.

$$V = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times 5 \times 6 \times 10 = 100 \text{ cm}^3$$

۲- حجم هرمی با قاعده مربع را به دست آورید که ضلع قاعده آن ۴ cm باشد و وجه‌های جانبی



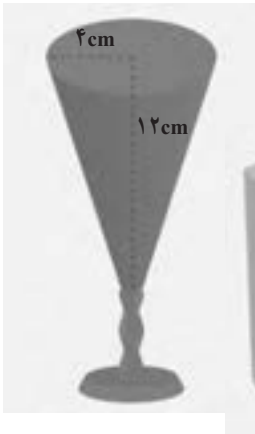
آن مثلث‌های متساوی‌الساقینی به ساق‌های ۸cm باشد.

قطر قاعده به کمک رابطه فیثاغورث برابر $4\sqrt{2}$ است.

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 \quad BC = 2\sqrt{2} \text{ پس}$$

$$AB^2 = 8^2 - (2\sqrt{2})^2 = 64 - 8 = 56 \quad AB = \sqrt{56}$$

$$V = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3} \times 16 \times \sqrt{56} = \frac{16}{3} \sqrt{56} = \frac{32\sqrt{14}}{3}$$



۳- ظرفی به شکل مخروط با شعاع دهانه ۴cm و به ارتفاع ۱۲cm را

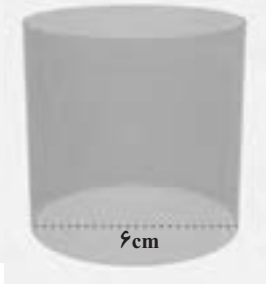
از آب پر می‌کنیم و در لیوانی استوانه‌ای شکل، که شعاع قاعده آن ۶cm است،

خالی می‌کنیم؛ آب تا چه ارتفاعی در لیوان بالا می‌آید؟

حجم آب درون استوانه = حجم آب مخروط

$$\frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 12 = \pi \times 3^2 \times h$$

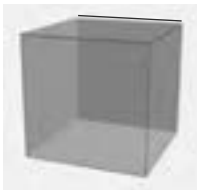
$$h = \frac{64}{9}$$



تمرین

۱- حجم و سطح کل شکل‌های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

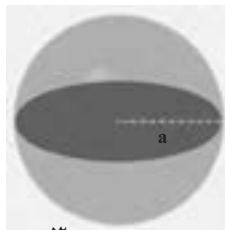
مکعب به ضلع a



$$V = a^3$$

$$S = 6a^2$$

کره به شعاع a

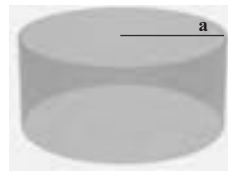


$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$S = 4\pi a^2$$

استوانه به ارتفاع و

شعاع قاعده a



$$V = \pi a^3$$

$$S = 2\pi a^2 + 2\pi a^2$$

$$= 4\pi a^2$$

استوانه به ارتفاع

و قطر قاعده a



$$V = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{\pi a^3}{4}$$

$$S = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi + a^2$$

$$= \frac{3a^2\pi}{2}$$

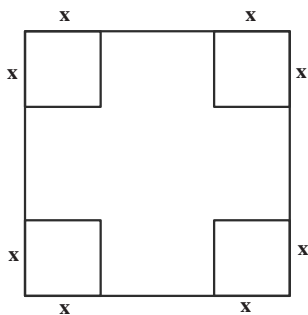
در هر مورد، نسبت حجم به سطح ($\frac{V}{S}$) را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟

$$\frac{v}{s} = \frac{a}{6}$$

$$\frac{v}{s} = \frac{a}{3}$$

$$\frac{v}{s} = \frac{a}{4}$$

$$\frac{v}{s} = \frac{a}{6}$$



۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد.

$$4x = a - 2x$$

$$a = 6x$$

$$x = \frac{a}{6}$$

