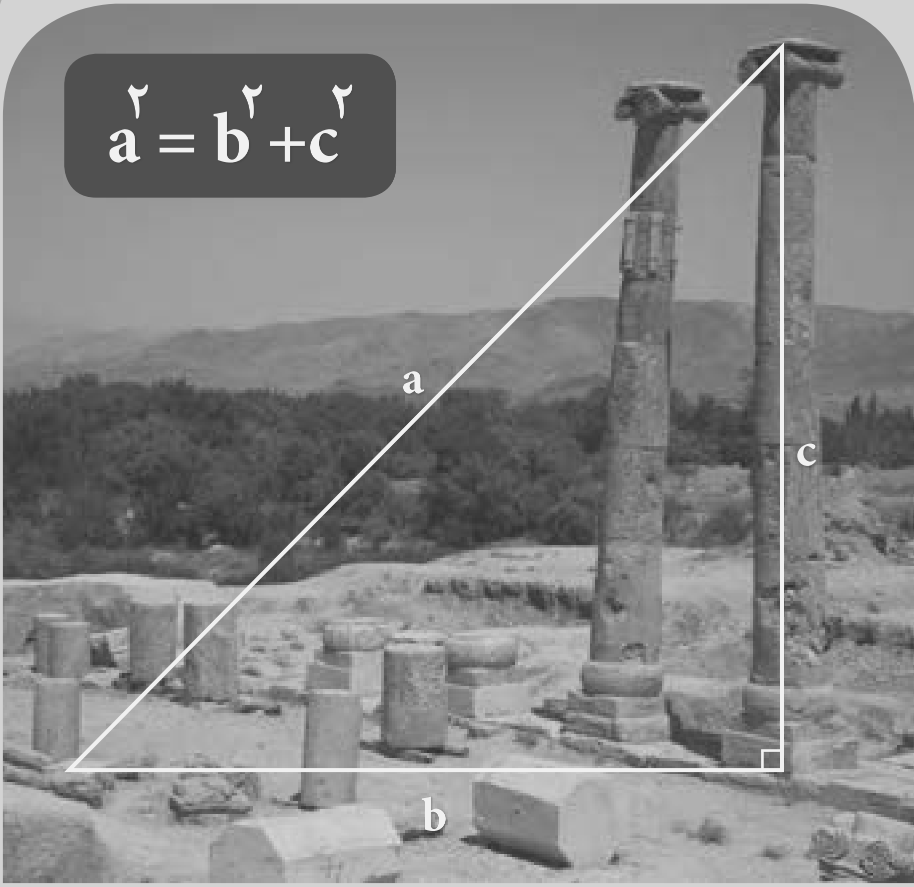
فصل ۵

عبارت‌های جبری



اثر باستانی «میلیونها» ــ استان مرکزی

عبارت‌های جبری کاربردهای فراوانی دارند، به‌طور مثال رابطهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه یک تساوی بین دو عبارت جبری است که از آن در محاسبات هندسی استفاده می‌شود.

نگاه کلی به فصل

درس اوّل : یادآوری و تکمیل مطالب مربوط به یک جمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌ها است. در این قسمت عبارت‌هایی که یک‌جمله‌ای محسوب نمی‌شوند مورد بررسی قرار می‌گیرند در ادامه یک جمله‌ای‌های متشابه، درجه یک‌جمله‌ای، یک‌جمله‌ای‌های غیرمتشابه و چندجمله‌ای‌ها تعریف دقیق شده و مثال‌هایی آورده شده است.

همچنین به معرفی اتحاد پرداخته و تفاوت بین اتحاد و معادله را با انجام یک فعالیت بررسی خواهیم کرد. سپس اتحاد مربع دوجمله‌ای و مفهوم تجزیه و تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کمک اتحادها در این درس آمده است.

درس دوم : در ادامه درس اوّل اتحاد مربع سه جمله‌ای، مزدوج و یک جمله مشترک آمده است. نکته مهمی که باید به آن توجه داشت، این است که در اثبات اتحادها از استدلال جبری و تعبیر هندسی استفاده شده است و دانش‌آموز باید بتواند اتحادهای جبری را به‌صورت یک عبارت کلامی بیان کند. در ادامه تجزیه چندجمله‌ای ها به کمک اتحادهای مزدوج و یک جمله مشترک با انجام چند فعالیت بررسی شده و اتحاد مربع دوجمله‌ای به‌عنوان حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک آمده است.

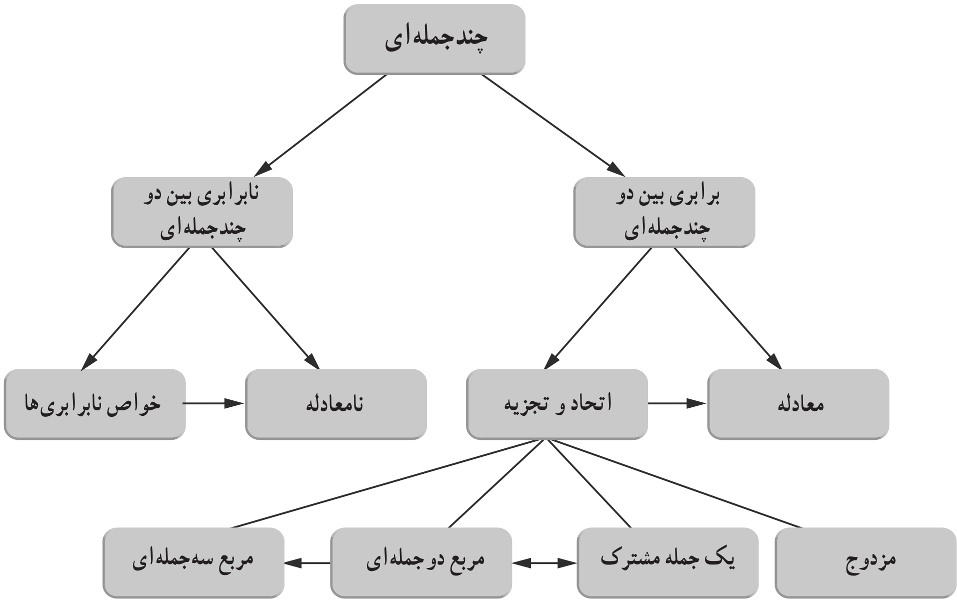
درس سوم : مفهوم نابرابری و تعریف آن بیان می‌شود. باید توجه داشت که این تعریف یک رابطهٔ دوسویه است و از هر دو طرف آن استفاده می‌شود.

$$a>b \Leftrightarrow \exists\, p>0 : a=b+p$$

پس مفهوم «$\geq$» و نامساوی مضاعف مطرح شده است. در ادامه خواص نابرابرها با استفاده ازیک فعالیت به‌صورت استدلال استقرایی مطرح شده است. می توان خواص نابرابری‌ها را به کمک تعریف آن اثبات کرد که در قسمت دانستنی برای معلم، خواهیم آورد.

در قسمت آخر مفهوم نامعادله یک‌مجهولی درجه اوّل و روش حل آن با استفاده از خواص نابرابرها آمده است و مجموعهٔ جواب نامعادله با بررسی چند مثال خاتمه‌بخش این فصل است.

نقشه مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

۱ــ کوتاه‌شدهٔ تاریخ جبر و نمادهای حرفی[1] : جبر به‌عنوان دانش حلّ معادله‌ها پدید آمد. در مصر و بابل کهن و همچنین در دوران‌های جدیدتر در هند، با مقدمه‌های جبر آشنا بودند و با توجه به داده‌های مسأله، می‌توانستند معادله راتشکیل دهند و برخی از گونه‌های آن را حل کنند. البته آنها از حرف برای نشان‌دادن داده‌ها و مجهول‌ها آگاهی نداشتند و نمی‌توانستند معادله‌ها را به صورت کلی خود تنظیم کنند. در دوران ریاضیات کاربردی، عنصرهای جبری، همچون ادامهٔ دانش حساب تلقی می‌شد. با وجود این، به ویژه بابلی‌ها تا مرز بالایی از جبر جلو رفته بودند و می‌توانستند مسأله‌های عملی را که منجر به گونه‌هایی از معادلهٔ درجهٔ دوم و در بعضی حالت‌ها، حتی درجهٔ سوم شود، حل کنند.

به واژهٔ «جبر» برای نخستین بار در سدهٔ نهم میلادی و در کارهای محمد فرزند موسیٰ مشهور به خوارزمی، برخورد می‌کنیم. خوارزمی کتاب «حساب جبر و مقابله» را به تشکیل و حلّ معادله‌ها اختصاص داده است. او از شش نوع معادله صحبت می‌کند که یکی از آنها، معادلهٔ درجهٔ اول و پنج گونهٔ دیگر درجهٔ دوم است (درواقع، معادلهٔ درجهٔ اول را هم حالت خاصی از معادلهٔ درجهٔ دوم، وقتی

۱ــ تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه

که ضریب درجهٔ دوم برابر صفر باشد، می‌گیرد). «حساب جبر و مقابله» همه چیز را با واژه‌ها بیان می‌کند و هیچ‌گونه نماد حرفی ندارد.

اصطلاح‌های «جبر» به معنای «جبران کردن»، و «مقابله» (مقابل هم قراردادن)، معرّف دو عمل سادهٔ جبری است؛ به نحوی که همهٔ جمله‌های سمت چپ و راست معادله، مثبت یا با ضریب مثبت باشند. واژهٔ «جبر» به همان معنایی آمده است که در این مصراع سعدی : «که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند» و از نظر عمل‌های جبری، به معنای انتقال جملهٔ منفی به طرف دیگر معادله است تا مثبت شود. اصطلاح «مقابله» هم به معنای مقابل قراردادن جمله‌ها در دو طرف برابری و حذف مقدارهای برابر از دو طرف است.

به این ترتیب «جبر و مقابله» به معنای ساده‌کردن معادله و ساده‌کردن جمله‌های متشابه است. نمادهای امروزی به تدریج و در طول زمان به وجود آمد.

«محمد کرجی» ریاضیدان ایرانی اول سدهٔ یازدهم میلادی، برای نشان دادن مجهول، نمادی را انتخاب کرد. معادله‌ها نزد ایرانی‌ها تا جایی رسید که «خیام» معادله‌های درجهٔ سوم را به یاری برش‌های مخروطی حل می‌کند. باید توجه داشت که ایرانیان به پیروی ازیونانی‌ها، از هندسه برای حل مسأله‌های جبری کمک می‌گرفتند. خوارزمی مسأله‌های خود را گاهی با شیوهٔ جبری و گاهی با کمک هندسه حل می‌کند. ولی خیام برای حلّ معادله‌های درجهٔ سوم، تنها از هندسه و برش‌های مخروطی استفاده می‌کند تا سرانجام جمشید کاشانی راه حلّی جبری برای معادلهٔ درجهٔ سوم می‌یابد که جواب را تا هر درجهٔ دقت به‌دست می‌دهد.

۲ــ یک‌جمله‌ای صفر و درجهٔ آن : یک نوع ساده از عبارت‌های جبری، چندجمله‌ای‌ها هستند. در این جا چندجمله‌ای با یک متغیر را بحث خواهیم کرد.

هر چندجمله‌ای یک متغیره، به‌صورت یک عبارت جبری روی یک متغیر است که در آن فقط از جمع و ضرب روی آن متغیر و اعداد استفاده شده است، مانند :

$$۲x^۳+۵x^۲+۴ \qquad \text{یا} \qquad -\frac{۲}{۵}x+۷x^۲-۳x^۵-\sqrt{۲}$$

چنانچه یک عبارت جبری فقط از ضرب اعداد در آن متغیر حاصل شود، به آن یک جمله گفته می‌شود، هریک جمله‌ای برحسب متغیر x را پس از ساده‌کردن به‌صورت ax^n نمایش می‌دهند که درآن $a\in\mathbb{R}$، $n\in w$ درجهٔ یک‌جمله‌ای و x متغیر آن یک‌جمله‌ای است، واضح است که :

$$ax^n=\begin{cases} a\in\mathbb{R} & n=۰ \\ ۰ & a=۰ \end{cases}$$

درنتیجه هر عدد حقیقی $a\in\mathbb{R}$ یک‌جمله‌ای برحسب متغیر x و از درجه صفر است. عدد ۰ نیز یک‌جمله‌ای محسوب می‌شود و برای آن درجه تعریف نمی‌کنیم. این گونه محدودیت‌ها در تعاریف را قبلاً دیده‌اید، برای مثال وقتی مفهوم عمل تقسیم تعریف می‌شود، در آن همواره مقسوم علیه را مخالف با صفر در نظر می‌گیریم و عمل تقسیم بر صفر را تعریف‌نشده تلقی می‌کنیم.

اگر اصرار داشته باشیم که برای یک‌جمله‌ای صفر درجه تعریف کنیم، باید این جمله را چنان در نظر بگیریم که در بیان‌کردن قضیه‌ها ثمری داشته باشد و به ویژگی مهمی اشاره کند. دو قضیه زیر را در چندجمله‌ای‌ها در نظر بگیرید.

قضیه ۱ : درجه حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای برابر با مجموع درجه‌های آن دو چندجمله‌ای است.

قضیه ۲ : درجه حاصل‌جمع دو چندجمله‌ای کوچک‌تر یا مساوی ماکزیمم درجهٔ آن دوچندجمله‌ای است.

اکنون اگر در قضیه ۱، $A=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ و $B=0$ قرار دهید، در این صورت مثال نقضی برای درستی این قضیه به‌دست آورده‌ایم.

برای اینکه از این تنگنا عبور کنیم، دو پیشنهاد مطرح می‌شود.

پیشنهاد اول : در قضیه‌های ۱ و ۲، دو چندجمله‌ای راناصفر در نظر بگیریم.

پیشنهاد دوم : صورت قضیه را تغییر ندهیم ولی برای یک‌جمله‌ای صفر، درجه تعریف کنیم. در این حالت اگر درجهٔ یک‌جمله‌ای صفر را $-\infty$ تعریف کنیم، روشن است که معنای قابل قبولی در قضیه‌های ۱ و ۲ خواهد داشت. برای مثال فرض کنید A یک‌جمله‌ای برحسب متغیر x و از درجهٔ n و Bچندجمله‌ای صفر و از درجهٔ $-\infty$ باشد، در این صورت $A\times B=0$ و درجهٔ حاصل‌ضرب $A\times B$ برابر با $-\infty$ است. از آنجا که $n+(-\infty)=-\infty$ پس درستی قضیه ۱ برقرار خواهد بود.

مسیرهایی برای توسعه

تعریف پیشرفته از چندجمله‌ای‌ها[1] : عملاً، هر چندجمله‌ای که به شکل استاندارد خود نوشته شده باشد، با دنباله ضرایب خود به‌طور کامل مشخص می‌شود. بنابراین، هر چندجمله‌ای را می‌توان متناظر یک دنباله از اعداد در نظر گرفت که از مرحله‌ای به بعد ثابت صفر است.

$$a_0+a_1x+...+a_nx^n\leftrightarrow(a_0,a_1,...,a_n,0,0,...)$$

۱ــ آیا عدد صفر چندجمله‌ای است؟ / دکتر ناصر بروجردیان / مجلّه ریاضی پایا ۶

در سطوح پیشرفته‌تر، برای تعریف چندجمله‌ای‌ها فقط همین دنباله ضرایب را در نظر می‌گیرند و هر دنباله از اعداد حقیقی که از مرحله‌ای به بعد ثابت صفر باشد را به عنوان یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی معرفی می‌کنند. روشن است که در این شیوه معرفی چندجمله‌ای‌ها، کسی چندجمله‌ای‌ها را به‌عنوان تابع در نظر نخواهد گرفت. البته این شیوه معرفی چندجمله‌ای‌ها، مناسب مدرسه نیست و در اینجا فقط برای روشن شدن مفاهیم، صرفاً برای معلمین این روش آورده شده است. با این شیوه معرفی چندجمله‌ای‌ها، جمع و ضرب آنها به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n, \ldots)$$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots).(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (c_0+c_1, \ldots, c_n, 0, 0, \ldots)$$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$$

توجه داشته باشید که این دنباله‌ها با اندیس صفر شروع می‌شوند. چندجمله‌ای‌هایی که اندیس ۱ به بعد آنها صفر است و فقط اندیس صفر آنها احیاناً ناصفر است با یک عدد حقیقی مشخص می‌شوند و جمع و ضرب آنها همان جمع و ضرب اعداد حقیقی است. یعنی،

$$(a_0, 0, 0, \ldots) + (b_0, 0, 0, \ldots) = (a_0+b_0, 0, 0, \ldots)$$

$$(a_0, 0, 0, \ldots).(b_0, 0, 0, \ldots) = (a_0 b_0, 0, 0, \ldots)$$

به همین خاطر به خود حق می‌دهیم، این چندجمله‌ای‌ها را با همان ضریب اندیس صفرشان نشان دهیم و اعداد حقیقی را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌ها در نظر بگیریم. پس عدد a به‌عنوان یک چندجمله‌ای همان دنباله $(a, 0, 0, \ldots)$ است. با توجه به تعریف جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها، جمع و ضرب یک عدد با چندجمله‌ای‌ها به شکل زیر خواهد بود.

$$a+(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a+b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$$

$$a\,(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (ab_0, ab_1, \ldots, ab_n, \ldots)$$

چندجمله‌ای $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ نقش ویژه‌ای بازی می‌کند و برای آن یک اسم خاص انتخاب می‌کنیم و مثلاً آن را با x نشان می‌دهیم. ضرب یک چندجمله‌ای در x موجب می‌شود ضرایب آن چندجمله‌ای، یک واحد به جلو حرکت کند، یعنی

$$x\,(b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (0, b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$$

به ویژه ضرب x در خودش به شکل زیر خواهد بود.

$$x^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$$x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$$

$\square$

با این علامت‌گذاری‌ها و قراردادها، هرچندجمله‌ای $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم.

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) = a_0(1, 0, 0, \ldots) + a_1(0, 1, 0, 0, \ldots) + \ldots + a_n(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$$
$$= a_0 + a_1 \chi + \ldots + a_n \chi^n$$

به‌این ترتیب به همان شکل مرسوم چندجمله‌ای‌ها می‌رسیم، ولی یک تفاوت اساسی وجود دارد که در اینجا χ یک متغیر عددی نیست و یک چندجمله‌ای خاص است، درواقع $\chi = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ مجموعه چندجمله‌ای‌ها، مجموعهٔ مشخصی از اشیاء معین است که بین آنها عملیات جمع و ضرب تعریف شده است و تمام خواص مهم اعمال جمع و ضرب برقرار است، غیر از اینکه چندجمله‌ای‌ها عموماً وارون‌پذیر نیستند. در واقع تنها چندجمله‌ای‌های وارون‌پذیر، اعداد ناصفرند.

چندجمله‌ای‌ها و توابع چندجمله‌ای : در هر چندجمله‌ای، اگر چندجمله‌ای خاص χ را به متغیر عددی x تبدیل کنیم، یک چندجمله‌ای معمولی به‌دست می‌آوریم که در مدرسه مطرح می‌شود و می‌توانیم آن را به‌عنوان یک تابع در نظر بگیریم. این گونه توابع را توابع چندجمله‌ای می‌نامند. توجه کنید که چندجمله‌ای و تابع چندجمله‌ای دو مفهوم متفاوتند، اگرچه تشخیص این تفاوت در سطح مدرسه آسان نیست. البته برای دانش‌آموزان تشخیص این تفاوت ساده‌تر است، زیرا دانش‌آموزان هنوز مفهوم تابع را نمی‌شناسند تا مشکلی برای تفکیک‌کردن داشته باشند. بیشترین مشکل برای خود معلمین است که هر دو مفهوم را می شناسند و باید بتوانند این دو مفهوم را برای خود از هم تفکیک کنند. چندجمله‌ای به‌عنوان تابع در ذهن معلمین قوی‌تر است، ولی معلمین باید بتوانند به چندجمله‌ای در شکل استاندارد آن نگاه کنند و آن را صرفاً به‌عنوان یک عبارت جبری یا دنباله ضرایب در نظر بگیرند. با این تفکیک دو مفهوم چندجمله‌ای و تابع چندجمله‌ای از هم جدا خواهند شد.

البته با وجود تفاوت مفهومی بین چندجمله‌ای‌ها و توابع چندجمله‌ای، بین آنها یک تناظر یک به یک برقرار است و هر چندجمله‌ای یک تابع چند جمله‌ای مشخص می‌کند و برعکس و دو چندجمله‌ای مساویند اگر و فقط اگر توابع چندجمله‌ای وابسته به آنها مساوی باشند. همچنین اعمال جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها متناظر اعمال جمع و ضرب توابع چندجمله‌ای می‌باشد. به همین خاطر است که تفکیک این دو مفهوم مشکل شده است.

درجه چندجمله‌ای‌ها : به‌طور شهودی، بزرگ‌ترین توانی از χ که در یک چندجمله‌ای رخ می‌دهد را درجهٔ آن چندجمله‌ای می‌نامند. در چندجمله‌ای‌هایی که حداقل یک جمله ناصفر دارند

این مفهوم بدون ابهام است ولی برای چندجمله‌ای صفر که همه جملات آن به‌صورت $0x^n$ است نمی‌توان بزرگ‌ترین n را تعیین کرد. بنابراین مفهوم درجه، فقط برای آن چندجمله‌ای‌هایی قابل تعریف است که حداقل یکی از ضرایب آنها ناصفر باشد. به‌طور دقیق‌تر درجهٔ یک چندجمله‌ای ناصفر مانند $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ برابر است با بزرگ‌ترین اندیس k که $a_k \neq 0$. روشن است که این تعریف فقط برای چندجمله‌ای‌های ناصفر اعتبار دارد و برای چندجمله‌ای صفر، درجه، تعریف نمی‌شود.

معرفی منابع برای معلمان

- جبر و مقابله / محمدبن موسی خوارزمی ترجمه حسین خدیوجم/ انتشارات اطلاعات
- تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه از سری کتاب‌های کوچک ریاضی
- عبارت‌ها و معادله‌های جبری / علی حسن‌زاده ماکویی/ انتشارات مدرسه
- همانی عبارت‌های جبری و کاربردهای آن / عبدالحسین مصحفی / انتشارات مدرسه
- نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میر شهرام صدر / انتشارات مدرسه

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $(\frac{1}{2}x^2y)^3$

ب) $(-3a^2b)(2ab^3)^2$

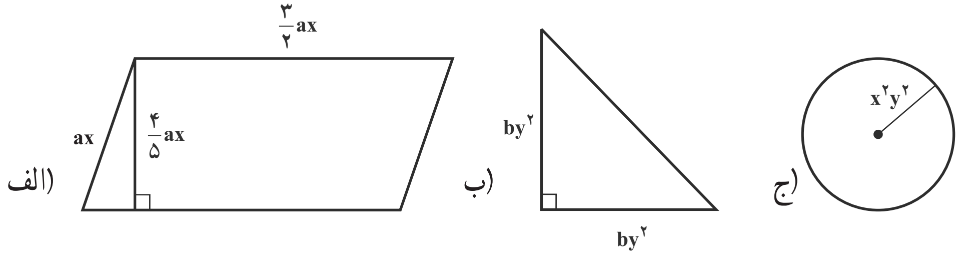
ج) $(-\frac{3}{4}a^2bc^3)^2(\frac{2}{3}ab^2c)$

د) $(-\frac{5}{7}a^2bxy^2)(-\frac{3}{5}ax^2y)$

هـ) $(\frac{3}{4}a^2bxy)^2(-\frac{4}{3}a^5b^2y^3)^3$

و) $(-\frac{2}{5}ab^5)(\frac{25}{2}a^5b)+3(a^2b^2)^3$

۲ــ محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



۳ــ درجه عبارت‌های زیر را نسبت به x، نسبت به y و نسبت به y و x تعیین کنید. سپس هریک از عبارت‌های زیر را یک‌بار برحسب توان‌های نزولی x و یک بار برحسب توان‌های نزولی y مرتب کنید.

الف) $-۳x^۲y+۴bx^۳y^۳-۹xy^۲+۵$

ب) $x^۶+x^۵y-x^۲y^۴+۲x^۳y^۳-x^۴y^۲+x+۱$

ج) $x^{k+۱}y^k-۳y^{k+۱}x^{k-۲}-۳y^{k+۳}+۵$

د) $\frac{۷}{۳}x^۳y-\frac{۱}{۲}xy^۳+\frac{۱}{۶}x^۲y^۲$

۴ــ اگر $A(x)=-x^۲-۱۰x+۱۲$ و $B(x)=-۳x^۲+۱-۲x$ و $C(x)=۴x^۲+۶x-۷$ حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید و سپس چندجمله‌ای به‌دست آمده را برحسب توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $A(x)+B(x)-۲C(x)$

ب) $\frac{۱}{۲}A(x)+B(x)-۳C(x)$

ج) $۲[A(x)-B(x)]+۳C(x)$

د) $۲B(x)-A(x).C(x)$

۵ــ اگر $A(x)=(x^m-۱)^۲$ و $B(x)=x^m-x^{۲m}-۱$ و $C(x)=x^{m+۱}$، حاصل عبارت‌های زیر را تعیین کنید، سپس چندجمله‌ای به‌دست آمده را برحسب توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $A(x)+\frac{B(x)}{۲}-۳C(x)$

ب) $A(x)+B(x)-۲C(x)$

۶ــ حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $(x^۲+\frac{۷}{۵}x^۳-\frac{۱}{۴})(x^۲-\frac{۷}{۵}x^۳+\frac{۱}{۴})$

ب) $(۲x+\frac{y}{۳})^۲$

ج) $(-۴+xy)(xy+۵)$

د) $(x+y-۲z)^۲$

هـ) $(a^۲-b)(b+a^۲)$

و) $(\frac{۲}{۳}x^۲y+\frac{۳}{۴}z^۷)^۲$

ز) $(x^۳-۵xy-۳x^۲)(x^۲-۳x+۵y)$

ح) $(۴x-y^۲)^۲$

ط) $(a+۲b+c-۳)(a+۳-۲b+c)$

ی) $(۳\frac{۱}{۲}k^۳-\frac{۱۲}{۵}L^۵)^۲$

ک) $(۷x^۴y^۳+۳x^۷y^۹)^۲$

ل) $(a+۵)(a-۳)(a^۲-۲a+۱۵)$

م) $(x^{k+۲}+y^{k+۲})(x^{k+۲}-y^{k+۲})$

ن) $(۲a-\sqrt{۳b}-\frac{۱}{۲})^۲$

ق) $(a^mb^n-c^md^n)(a^mb^n+c^md^n)$

ر) $(\frac{a+b}{۲})^۲-(\frac{a-b}{۲})^۲$

ش) $[(۲x-y)(۲x+y)]^۲$

ت) $(۲x^m-۱)(۲x^m+۱)(۴x^{۲m}+۱)$

ث) $(x^۲+x+۱)(x^۲+x-۲)(x^۴+۲x^۳+x+۲)$

خ) $(\frac{۳}{a}+\frac{a}{۳})(\frac{۳}{a}-\frac{a}{۳})$

۷ــ حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به‌دست آورید.

الف) $۲۵۶^۳-۲۵۰^۳-۶^۳$

ب) $۱۰۰۰۱^۲$

ج) $۷۵^۲-۲۷۵^۲$

د) ۴۲۳×۴۳۷

هـ) $۴۴۰^۲-۴۳۰^۲-۱۰^۲$

و) $۱۰۲^۳-۲^۳$

۸ــ به‌جای نقطه‌چین‌ها، عبارت مناسب بنویسید.

الف) $(۲x-\ldots)^۲=\ldots-۱۲x+\ldots$

ب) $(\ldots+\ldots)^۲=a^۲+۱۲ab^۲+\ldots$

ج) $(\ldots-۷y)(x^۲+\ldots)=(\ldots)^۲-۴۹y^۲$

د) $(\ldots+\ldots)^۲=\frac{۹}{۴}a^۲+\frac{۹}{۱۶}+\ldots$

چند مسئلهٔ کاربردی نامعادلهٔ یک‌مجهولی درجه اوّل

۹ــ زمین‌شناسی: در جریان حفّاری زمین در سال ۱۹۸۴، دانشمندان زمین‌شناس روسیه به این نتیجه رسیدند، که درجهٔ حرارت در x کیلومتری زیر سطح زمین از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$T=۲۵(x-۳)+۳۰ \qquad (۳\leq x\leq ۱۵)$$

که در این رابطه، T درجهٔ حرارت برحسب درجهٔ سانتی‌گراد است. مشخص کنید در چه محدوده‌ای از عمق زمین، درجهٔ حرارت بین $۲۰۰^\circ C$ تا $۳۰۰^\circ C$ تغییر می‌کند.

حل:

$$T=۲۰۰ \Rightarrow ۲۰۰=۲۵(x-۳)+۳۰ \Rightarrow x=۹/۸$$

$$T=۳۰۰ \Rightarrow ۳۰۰=۲۵(x-۳)+۳۰ \Rightarrow x=۱۳/۸$$

درنتیجه $۹/۸\leq x\leq ۱۳/۸$، یعنی در عمق ۹/۸ تا ۱۳/۸ کیلومتری زیر سطح زمین، درجهٔ حرارت بین $۲۰۰^\circ C$ تا $۳۰۰^\circ C$ تغییر می‌کند.

۱۰ــ هواشناسی: وقتی هوای گرم از سطح زمین به طرف بالا می‌رود، منبسط می‌شود و تقریباً بعد از ۴۰۰۰۰ پا. برای هر ۱۰۰۰ پا؛ ۵/۵ فارنهایت از درجهٔ هوا کم می‌شود. اگر درجهٔ حرارت در اطراف سطح زمین $۷۰^\circ f$ باشد، آنگاه درجه حرارت (T) در ارتفاع h از سطح زمین از رابطهٔ $T=۷۰-۰/۰۰۵۵h$ به‌دست می‌آید. حدود تغییرات ارتفاع را وقتی که درجه حرارت هوا از $-۴۰^\circ f$ تا $۲۶^\circ f$ تغییر می‌کند، به‌دست آورید.

حل:

$$\begin{cases}-۴۰\leq T\leq ۲۶\\ T=۷۰-۰/۰۰۵۵h\end{cases} \Rightarrow -۴۰\leq ۷۰-۰/۰۰۵۵h\leq ۲۶$$

$$\Rightarrow -۴۰-۷۰\leq -۰/۰۰۵۵h\leq ۲۶-۷۰ \Rightarrow -۱۱۰\leq -۰/۰۰۵۵h\leq -۴۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱۱۰}{۰/۰۰۵۵} \geq h \geq \frac{۴۴}{۰/۰۰۵۵} \Rightarrow ۲۰۰۰۰ \geq h \geq ۸۰۰۰$$

یعنی در ارتفاع ۸۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ پا بالاتر از سطح زمین، حرارت هوا بین $۴۰^\circ f-$ تا $۲۶^\circ f$ تغییر می‌کند.

۱۱ــ روان‌شناسی : آی‌کیوی (IQ) افراد مختلف از فرمول زیر به‌دست می‌آید :

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times ۱۰۰$$

که در آن MA سنّ هوشی و CA سنّ تقویمی افراد است. درصورتی که $۸۰ \leq IQ \leq ۱۴۰$؛ برای بچه‌های ۱۲ ساله حدود تغییرات سنّ هوشی را به‌دست آورید.

حل :

$$\begin{cases} ۸۰ \leq IQ \leq ۱۴۰ \\ IQ = \frac{MA}{CA} \times ۱۰۰ \\ CA = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow ۸۰ \leq \frac{MA}{۱۲} \times ۱۰۰ \leq ۱۴۰ \Rightarrow \frac{۱۲}{۱۰۰} \times ۸۰ \leq MA \leq \frac{۱۲}{۱۰۰} \times ۱۴۰$$

$$\Rightarrow ۹/۶ \leq MA \leq ۱۶/۸$$

درنتیجه سنّ هوشی بچه‌های ۱۲ ساله بین ۹/۶ تا ۱۶/۸ است.

۱۲ــ تجارت و اقتصاد : در یک تجارت سودآور واضح است، که باید سود (R) بیشتر از هزینهٔ (C) باشد؛ یعنی $R > C$. اگر معادلهٔ هزینهٔ یک شرکت تولیدی ساعت در یک هفته به‌صورت $C = ۳۰۰ + ۱/۵x$ و معادلهٔ سود شرکت در یک هفته به‌صورت $R = ۲x$ باشد، که در این معادله‌ها x تعداد ساعت‌های فروخته‌شده در یک هفته است؛ در این صورت این شرکت در هفته باید چند ساعت بفروشد، تا اینکه فعالیت تولیدی آن در واقع سودآور باشد.

حل :

$$\begin{cases} R > C \\ C = ۳۰۰ + ۱/۵x \\ R = ۲x \end{cases} \Rightarrow ۲x > ۳۰۰ + ۱/۵x \Rightarrow x > ۶۰۰$$

درنتیجه برای اینکه فعالیت این شرکت سودآور باشد، باید در هفته بیشتر از ۶۰۰ عدد ساعت بفروشد.

۱۳ــ مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد مشخص کنید :

الف) $۳-۲x \geq ۵(۳-۲x)$ ب) $۲(x-۳)+۵ < ۵-x$

ج) $-۲ \leq \frac{۷m}{-۳} + ۱$ د) $-۷n \geq ۲۱$

هـ) $-۲-\frac{q}{۴}\leq\frac{۱+q}{۳}$

و) $\frac{y-۳}{۴}-۱>\frac{y}{۲}$

ز) $۲\leq۳m-۷<۱۴+۲m$

ح) $\frac{p}{۳}-\frac{p-۲}{۲}\leq\frac{p}{۴}-۴$

ط) $\frac{۲x}{۵}-\frac{۱}{۲}(x-۳)\leq\frac{۲x}{۳}-\frac{۳}{۱۰}(x+۲)$

ی) $-۴\leq\frac{۹}{۵}x+۳۲\leq۶۸$

ک) $-۶\leq-\frac{۲}{۳}(۱-x)\leq۴$

ل) $۱۵\leq۷-\frac{۲}{۵}x\leq۲۱$

درس اوّل: عبارت‌های جبری و مفهوم اتحاد

اهداف

ــ یک‌جمله‌ای را تشخیص دهد و مفهوم ضریب عددی و قسمت حرفی را درک کند.

ــ مفهوم چندجمله‌ای را درک کند و بتواند چندجمله‌ای را برحسب توان‌های نزولی متغیر مرتب کند.

ــ مفهوم اتحاد را درک کند و فرق اتحاد با معادله را بداند

ــ اتحاد مربع دوجمله‌ای را به‌صورت عبارت کلامی بیان کند و درستی آن را از روش جبری و هندسی درک کند.

ــ مفهوم تجزیه را بداند.

ــ در صورت امکان با استفاده از ب.م.م چندجمله‌ای را تجزیه کند و به تجزیه سه‌جمله‌ای‌ها به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای مسلط شود.

روش تدریس

هدف فعالیت صفحه ۷۹ ارائه مفهوم یک‌جمله‌ای است، با انجام این فعالیت دانش آموزان باید بتوانند یک‌جمله‌ای‌ها را تشخیص دهند. سپس ضریب عددی و عبارت حرفی آنها را مشخص کنند.

$۲\sqrt{x}$ و $\sqrt[۳]{y}$ یک جمله‌ای نیستند زیرا از حاصل‌ضرب متغیرها با توان‌های صحیح و منفی در اعداد به‌دست نیامده‌اند.

$\frac{۱}{x}$ و $|x|$ یک‌جمله‌ای نیستند، زیرا به‌طور صریح از حاصل‌ضرب اعداد در متغیرها با توان‌های صحیح و نامنفی به‌دست نیامده‌اند.

$۲x^۲+۲x$ و $۱+x$ یک‌جمله‌ای نیستند، زیرا در آنها از عمل جمع استفاده کردیم، درحالی که در یک جمله‌ای‌ها فقط از عمل ضرب (با توجه به تعریف) استفاده می‌کنیم.

۳^x یک‌جمله‌ای نیست، زیرا از ضرب اعداد در متغیرها (با توجه به تعریف) به‌دست نمی‌آید.

در ادامهٔ این فعالیت می‌خواهیم، عملیات روی یک‌جمله‌ای‌ها را یادآوری و تکمیل کنیم.

در قسمت ۲ فعالیت صفحهٔ ۸۰، درجهٔ یک‌جمله‌ای را نسبت به یک یا دو متغیر با استفاده از تکمیل جدول آموزش می‌دهیم، سپس چندجمله‌ای و درجهٔ چندجمله‌ای رانسبت به یک یا چند متغیر آورده‌ایم.

در قسمت ۳ فعالیت، از دانش‌آموزان می‌خواهیم که چندجمله‌ای‌ها را نسبت به توان‌های

نزولی متغیر مرتب کنند و نتیجه این فعالیت آن است که «دو چندجمله‌ای وقتی با هم برابرند که صورت استاندارد آنها (یعنی برحسب توان‌های نزولی متغیر) با هم یکسان باشند».

در کار در کلاس صفحهٔ ۸۰ و ۸۱ می‌خواهیم عملیات روی چندجمله‌ای‌ها را با توجه به خاصیت توزیع‌پذیری یادآوری و تکمیل کنیم، سپس دانش‌آموزان چندجمله‌ای‌ها را ساده کنند.

نتیجه این کار در کلاس این است که «چندجمله‌ای‌ها فقط از جمع جبری یک‌جمله‌ای‌ها پدید نمی‌آیند، بلکه در بعضی مواقع از حاصل‌ضرب چندجمله‌ای‌ها در یکدیگر نیز حاصل می‌شوند».

هدف از فعالیت صفحه ۸۱ ارائهٔ مفهوم اتحاد است. با کامل‌کردن جدول ملاحظه می‌کنیم که مقادیر عددی دو ستون آخر با هم یکسان می‌شوند، سپس حاصل $(x+3)^2$ را با روش جبری به‌دست آورده و نتیجه می‌گیریم که حاصل آن x^2+6x+9 است و به همین دلیل؛ دو ستون آخر جدول مقادیر عددی یکسانی دارند. در قسمت ۲ و ۳ این فعالیت می‌خواهیم دانش‌آموزان با ضرب پرانتزها، اتحاد مربع دوجمله‌ای را درک کنند، سپس با مقایسه دو طرف برابری اتحاد بتوانند با یک عبارت کلامی، این اتحاد را بیان کنند. سپس درستی این اتحاد را با روش هندسی درک کنند. در حقیقت در بیان اتحادها از دیدگاه جبری، دیدگاه هندسی و بیان اتحاد به‌صورت کلامی استفاده شده است.

در قسمت ۴ این فعالیت می‌خواهیم حاصل مربع تفاضل دو جمله یعنی $(a-b)^2$ را پیدا کنیم و آن را با حاصل مربع مجموع دو جمله یعنی $(a+b)^2$ مقایسه کنیم و در نهایت آنها را با عبارت‌های کلامی مشابه هم بیان کنیم.

قسمت ۱ کار در کلاس صفحه ۸۳ می‌خواهد که با عبارت‌های کلامی به‌دست آمده برای اتحاد مربع دوجمله‌ای، حاصل عبارات داده شده را به‌دست آورید.

در قسمت ۲ این کار در کلاس می‌خواهیم که با درک عبارت کلامی متناظر با اتحاد مربع دوجمله‌ای جاهای خالی را پر کند و این قسمت پیش‌زمینه ورود به تجزیه سه‌جمله‌ای‌هایی است که با این اتحاد تجزیه می‌شوند.

فعالیت صفحهٔ ۸۳ ورود به تجزیهٔ چندجمله‌ای‌هااست، در ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع را به‌صورت زیر بنویسیم. در این صورت دوجمله‌ای $ab+ac$ را تجزیه کرده‌ایم :

$$ab+ac=a(b+c)$$

در اینجا a را (ب.م.م) جملات چندجمله‌ای معرفی کرده و به این روش در صورت وجود (ب.م.م) بین جملات می‌توان چندجمله‌ای را تجزیه کرد.

هدف از کار در کلاس صفحهٔ ۸۴ این است که سه‌جمله‌ای‌ها را با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای تجزیه کنیم. ابتدا باید تشخیص دهیم، کدام سه‌جمله‌ای‌ها به کمک این اتحاد با ضرایب گویا تجزیه می‌شوند. با توجه به سه‌جمله‌ای $a^۲+۲ab+b^۲$ در سه‌جمله‌ای‌هایی که دو جملهٔ مربع کامل داشته باشند؛ اولی و دومی را تشخیص می‌دهیم. سپس اگر جملهٔ دیگر، دو برابر حاصل‌ضرب اولی و دومی باشد، به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای آن را تجزیه می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که اگر بین جملات (ب.م.م) موجود بود، ابتدا به کمک (ب.م.م)گیری تجزیه می‌کنیم. سپس از اتحاد مربع دوجمله‌ای برای ادامه تجزیه استفاده می‌کنیم، مانند :

$$۱۸ab-۳a^۲b-۲۷b=۳b(۶a-a^۲-۹)$$

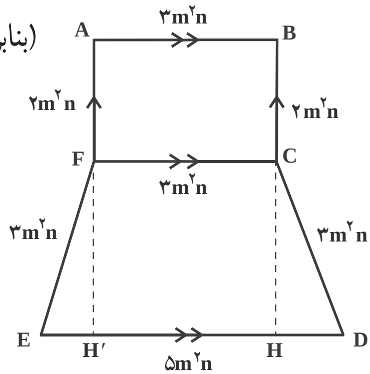
(ب.م.م) $=۳b$

$$=-۳b(a^۲-۶a+۹)$$

$$=-۳b(a-۳)^۲=-۳b(a-۳)(a-۳)$$

تمرین صفحهٔ ۸۵

۲ــ چون ذوزنقه FCDE متساوی‌الساقین است، پس $\hat{E}=\hat{D}$.



$$\begin{cases}\hat{E}=\hat{D}\\ FE=CD\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{CHD}\cong \overset{\Delta}{FH'B}$$ (بنابر وتر و یک زاویه)

$$\Rightarrow HD=EH'=m^۲n$$

$$\overset{\Delta}{CHD}:CD^۲=CH^۲+HD^۲$$

$$\Rightarrow (۳m^۲n)^۲=CH^۲+(m^۲n)^۲$$

$$\Rightarrow CH=۲\sqrt{۲}m^۲n$$

مساحت ذوزنقه + مساحت مستطیل = S (مساحت شکل)

$$=۳m^۲n\times ۲m^۲n+\frac{(۳m^۲n+۵m^۲n)\times ۲\sqrt{۲}m^۲n}{۲}=(۶+۸\sqrt{۲})m^۴n^۲$$

۶ــ هدف تمرین این است که بگوییم حاصل $(a-b)^2$ را می‌توان با استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله، مستقیماً محاسبه کرد.

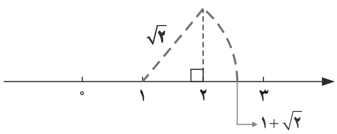
$$(a+(-b))^2=a^2+2(a)(-b)+(-b)^2$$
$$\Rightarrow (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

اشتباهات رایج

یکی از سؤال‌های متداول دانش‌آموزان در بحث عبارت‌های جبری، شمردن تعداد جمله‌های یک چندجمله‌ای‌است، آنها می‌گویند برای مثال $5x^2+7x$ دوجمله‌ای است. از طرفی 0 یک‌جمله‌ای محسوب می‌شود، اکنون آیا $5x^2+7x+0$ سه‌جمله‌ای است؟

در پاسخ به سؤال بالا می‌توان گفت: برای شمردن تعداد جمله‌های چندجمله‌ای، ابتدا باید آن را ساده کرد. برای این منظور جمله‌های متشابه را با یکدیگر جمع جبری می‌کنیم. سپس تعداد جمله‌های چندجمله‌ای ساده‌شده را می‌شماریم.

می‌دانیم ساده شدهٔ عبارت $5x^2+7x+0$ دوجمله‌ای $5x^2+7x$ است. پس اضافه‌کردن جملهٔ صفر، در تعداد جمله‌ها تأثیری ندارد.



توجه داشته باشید که عبارت $5x^2+7x+1+\sqrt{2}$ سه‌جمله‌ای محسوب می‌شود. زیرا $1+\sqrt{2}$ یک عدد حقیقی است و روی محور اعداد حقیقی یک نقطه منحصر به فرد است.

البته به‌طور دقیق‌تر می‌توان تعریف تعداد جمله‌های چندجمله‌ای را به‌صورت زیر آورد تا این‌گونه بدفهمی‌ها ایجاد نشود.

اگر در یک چندجمله‌ای ناصفر، k جمله غیرمتشابه ناصفر وجود داشته باشد، آن را یک $k-$جمله‌ای می‌نامند. با این تعریف، یک‌جمله‌ای‌های ناصفر، مجدداً یک‌جمله‌ای هستند، اما این تعریف، برای صفر، تعداد جمله، تعریف نمی‌کند. اما قبلاً، بنا به تعریف، صفر را یک‌جمله‌ای محسوب کرده‌ایم. اشکالی که این مطلب، پیش آورده، این است که اگر مثلاً دو یک‌جمله‌ای غیرمتشابه را جمع کنیم باید یک دوجمله‌ای به‌دست آوریم، در حالی که $x+0=x$. این پارادکس نشان می‌دهد که در جایی اشتباه کرده‌ایم و این اشتباه در همین فکر ساده است که «اگر دو یک‌جمله‌ای غیرمتشابه را جمع کنیم یک دوجمله‌ای به‌دست می‌آید». حرف درست آن است که «اگر دو یک‌جمله‌ای غیرمتشابه ناصفر را جمع کنیم یک دوجمله‌ای ساخته می‌شود». بنابراین، در اینجا نیز باید صفر را کنار بگذاریم و مطلب مورد نظر را برای چندجمله‌ای‌های ناصفر بیان کنیم.

درس دوم: چند اتحاد دیگر، تجزیه و کاربردها

اهداف

ــ اتحاد مربع سه‌جمله‌ای را به‌صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.

ــ اتحاد مزدوج را به‌صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.

ــ اتحاد یک جمله مشترک را به‌صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.

ــ چندجمله‌ای‌ها را به کمک اتحادهای مزدوج و یک جمله مشترک تجزیه کند.

روش تدریس

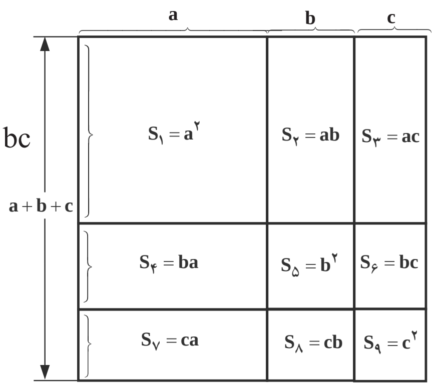
در درس اوّل اتحاد مربع دوجمله‌ای بررسی شد، در این فعالیت اتحاد مربع سه‌جمله‌ای با دو روش جبری بیان می‌شود. روش اول همان ضرب پرانتزها و استفاده از خاصیت‌پخشی است. در روش دوم از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم که در آن $(a+b)$ را جمله اول و c را جمله دوم در نظر می‌گیریم.

در اینجا از دانش‌آموزان بخواهید که برای این اتحاد یک عبارت کلامی بیان کنند، سپس به کمک عبارت کلامی در مرحلهٔ بعد حاصل $(a+b-c)^۲$ را به‌صورت زیر بیابند.

$$(a+b-c)^۲=(a+b+(-c))^۲=a^۲+b^۲+(-c)^۲+۲ab+۲a(-c)+۲b(-c)$$
$$=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲ac-۲bc$$

برای درک درستی این اتحاد، علاوه‌بر روش جبری می‌توان از دیدگاه هندسی نیز درستی این اتحاد را درک کرد. برای این منظور مربعی به ضلع $(a+b+c)$ را در نظر بگیرید، مساحت این مربع برابر با $(a+b+c)^۲$ است که می‌توان این مساحت را به‌صورت مجموع مساحت‌های چهارضلعی‌های به‌کار رفته در شکل زیر در نظر گرفت.

$$S=S_۱+S_۲+\dots+S_۹$$
$$(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc$$



در قسمت ۲ این فعالیت، اتحاد مزدوج بیان شده است، ابتدا با روش جبری این اتحاد بیان می‌شود، سپس از دیدگاه هندسی درستی اتحاد را درک‌کنیم، برای این منظور در سمت راست یک مربع به ضلع a را ملاحظه می‌کنید که مساحت آن برابر با a^2 است، اگر از این مربع مساحتی به اندازه b^2 (مساحت مربع به ضلع b) را جدا کنیم، آن‌گاه مساحت قسمت باقی‌مانده برابر با $S=(a^2-b^2)$ است. اکنون در قسمت پایین شکل سمت راست یک مستطیل با ابعاد b و $(a-b)$ را ملاحظه کنید، چنانچه این مستطیل را از قسمت خط‌چین جدا کنید و به پهلوی سمت راست شکل باقی مانده بچسبانید یک مستطیل به ابعاد $(a+b)$ و $(a-b)$ به‌دست می‌آید که مساحت آن برابر با $S=(a+b)(a-b)$ است درنتیجه :

$$S=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

توجه : بیان عبارت کلامی متناظر با این اتحاد ضروری است.

صفحه ۸۷، قسمت ۲ کار در کلاس، از دانش‌آموزان می‌خواهیم به کمک اتحاد مزدوج، حاصل‌ضرب پرانتزها رامحاسبه کنند، برای این منظور جمع جبری جملاتی که در هر دو پرانتز علامت یکسانی دارند، به‌عنوان اولی و بقیه جملات پرانتز اوّل را دومی در نظر می‌گیریم، برای مثال :

$$(-4y-2z)(2z-4y)=(-4y)^2-(2z)^2=16y^2-4z^2$$

چون $-4y$ در هر دو پرانتز یکسان است، پس اولی $=-4y$ درنتیجه دومی $=2z$ است.

$$(a-b-c+d)(b-a-c+d)=[(-c+d)+(a-b)][(-c+d)-(a-d)]$$

$$=(-c+d)^2-(a-d)^2$$

چون$(-c+d)$ در هر دو پرانتز یکسان است، پس اولی $=(-c+d)$، درنتیجه دومی $=(a-b)$.

در فعالیت صفحهٔ ۸۷ می‌خواهیم عبارت‌های جبری را که به‌صورت تفاضل دو مربع کامل هستند، به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنیم. برای این منظور اولی =A و دومی =B در نظر گرفته‌ایم. عبارت کلامی زیر می‌تواند در تجزیه‌کردن مفید واقع شود.

(دومی − اولی) (دومی + اولی) = مربع دومی − مربع اولی

در قسمت ۶ این فعالیت، متذکر شوید که تجزیه راتا جایی که همهٔ جملات قابل تجزیه‌شدن باشند، ادامه می‌دهیم.

$$x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=\underbrace{(x^2-y^2)}_{\updownarrow}(x^2+y^2)$$

$$=\overbrace{(x-y)(x+y)}(x^2+y^2)$$

در قسمت ۲ کار در کلاس صفحهٔ ۸۸؛ با چند تمرین، کاربرد اتحادها را در ساده‌شدن محاسبات عددی ملاحظه می‌کنید.

$$۴۹۷\times۵۰۳=(۵۰۰-۳)(۵۰۰+۳)=۵۰۰^{۲}-۳^{۲}=۲۵۹۹۹۱$$

$$(۱۰۰۱)^{۲}=(۱۰۰۰+۱)^{۲}=(۱۰۰۰)^{۲}+۲(۱۰۰۰)\times۱+۱^{۲}=۱۰۰۲۰۰۱$$

در فعالیت صفحهٔ ۸۸، اتحاد یک جمله مشترک بیان شده است. توجه کنید که دیدگاه هندسی برای درک بهتر این اتحاد در تمرین ۵ صفحه ۸۹ آمده ست.

در قسمت ۲ این فعالیت، می‌خواهیم تجزیه سه‌جمله‌ای‌ها را با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک انجام دهیم. برای این منظور معمولاً در سه‌جمله‌ای یک جمله مربع کامل داریم که از آنجا، جملهٔ مشترک را پیدا می‌کنیم. برای مثال برای تجزیه سه جمله‌ای $x^{۲}+۷x+۱۰$؛ چون $x^{۲}$ مربع کامل است، پس جملهٔ مشترک $x=$. حال دو عدد صحیح پیدا می‌کنیم که حاصل ضربشان $+۱۰$ و حاصل جمعشان $+۷$ باشد. چون علامت ۱۰ مثبت است. پس هر دو عدد هم علامت هستند، درنتیجه جدول زیر را برای دو عدد خواهیم داشت که فقط در یک حالت حاصل جمعشان برابر با $+۷$ است.

$xy=۱۰\Rightarrow$

	x	y	x+y	نتیجه
	$+۲$	$+۵$	$+۷$	✓
	-۲	-۵	-۷	×
	$+۱$	$+۱۰$	$+۱۱$	×
	-۱	-۱۰	-۱۱	×

درنتیجه داریم :

$$x^{۲}+۷x+۱۰=(x+۲)(x+۵)$$

مثال دیگر: $\underbrace{y^{۲}}_{\text{مربع کامل}}-y-۶=(y+۲)(y-۳)$

$xy=-۶<۰$

	x	y	x+y	نتیجه
	-۲	$+۳$	$+۱$	×
	$+۲$	-۳	-۱	✓
	$+۱$	-۶	-۵	×
	-۱	$+۶$	$+۵$	×

توجه : بعد از حل چند تمرین، از دانش‌آموزان بخواهید، جدول را ذهنی تصور کنند و جواب را بگویند.

تمرین صفحهٔ ۸۹

۴ــ هدف تمرین این است که با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک می‌توان درستی اتحاد مربع دوجمله‌ای رابه‌دست آورد. در حقیقت اتحاد مربع دوجمله‌ای حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک است.

$$(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab \quad (۱)$$

$$a=b\overset{(۱)}{\Rightarrow}(x+a)(x+a)=x^{۲}+(a+a)x+a\times a$$

$$\Rightarrow(x+a)^{۲}=x^{۲}+۲ax+a^{۲}$$

همچنین اگر a و b قرینه باشند، یعنی $b=-a$ در این صورت اتحاد مزدوج به‌دست می‌آید، یعنی اتحاد مزدوج نیز حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک است.

$$b=-a\Rightarrow(x+a)(x-a)=x^{۲}+(a+(-a))x+a\times(-a)$$

$$\Rightarrow(x+a)(x-a)=x^{۲}-a^{۲}$$

اهداف

ــ تعریف نابرابری را بداند و بتواند در حل مسائل از تعریف استفاده کند.

ــ در یک نابرابری مانند $\frac{a^2b}{c}>0$ علامت متغیرهای a، b و c را تعیین کند.

ــ خواص نابرابری‌ها را درک کند.

ــ با استفاده از خواص نابرابری‌ها، نامعادله درجهٔ اول یک‌مجهولی را حل کند و مجموعهٔ جواب آن را به‌دست آورد.

روش تدریس

هدف از فعالیت صفحهٔ ۹۰ ارائه مفهوم و تعریف نابرابری است. دانش‌آموزان قبلاً با مفهوم برابری با علامت «=» و نابرابری با علامت «≠» آشنا شده‌اند.

در حالتی که نابرابری بین دو عدد رخ می‌دهد در این صورت یکی از عددها از دیگری بزرگ‌تر است، مانند ۲≠۳ و در اینجا ۳ بزرگ‌تر از ۲ است و می‌نویسیم ۲<۳، اکنون می‌خواهیم مفهوم ۲<۳ را بیان کنیم. برای این منظور از مفهوم برابری استفاده می‌کنیم. ۲<۳، یعنی اینکه مقدار مثبتی وجود دارد که اگر آن را به کوچک‌تر یعنی ۲ اضافه کنیم، حاصل برابر با ۳ می‌شود و آن مقدار مثبت، عدد ۱ است.

در فعالیت، کفه‌های ترازو در حقیقت بیان‌کننده مفهوم بالا است، کفهٔ وزنه سنگین‌تر پایین‌تر است، پس :

$a \boxed{\neq} b$ ، $a \boxed{>} b$ ، $b \boxed{<} a$

همان‌طورکه قبلاً گفته شد، تعریف نابرابری یک رابطهٔ دوطرفه است که در این فعالیت خواسته شده برای رابطه‌های برابری زیر یک نابرابری بین متغیرها بنویسند.

الف) وقتی $x=y+4$، یعنی به y، ۴ واحد که اضافه شود، حاصل آن برابر x می‌شود، پس x از y بزرگ‌تر است.

ب) $m+1=n+3$، می‌توان نوشت $m=n+2$ و از اینجا واضح است که $m>n$.

ج) $a-2=b+3$، یعنی $a=b+5$ و درنتیجه $a>b$.

د) $2m=3n$، یعنی اگر m دوبرابر شود و n را سه برابر کنیم، حاصل آنها با هم برابر می‌شود.

از آنجا که n ,m هر دو مثبت هستند و m در عدد کوچک‌تری ضرب می‌شود، پس $m>n$.

یا به‌طور ساده از $2m=3n$ می‌توان نتیجه گرفت $m=\frac{3}{2}n$ ، یعنی اگر n در کسری بزرگ‌تر از واحد ضرب شود حاصل آن با m برابر می‌شود، پس m از n بزرگ‌تر است.

در قسمت ۲ کار در کلاس صفحهٔ ۹۱ می‌خواهیم با استفاده از نابرابری‌های داده شده نوعی استدلال کنیم و به کمک آن علامت متغیرها را پیدا کنیم.

الف) نادرست است. برای مثال $۰<۵+۳-$ و این درحالی است که $۰ \not> ۳-$.

ب) درست است، زیرا اگر حاصل‌ضرب دو عدد مثبت باشد، آن‌گاه هر دو مثبت یا هر دو منفی است یعنی b,a هم‌علامت هستند.

ج) اگر $\frac{ab}{c} < ۰$ در این صورت دو حالت زیر را داریم.

حالت اوّل : صورت منفی و مخرج مثبت است. یعنی :

$$\begin{cases} ab < ۰ \\ \\ c > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ \ , \ b < ۰ \\ \text{یا} \\ a < ۰ \ , \ b > ۰ \end{cases}$$

حالت دوم : صورت مثبت و مخرج منفی است، یعنی :

$$\begin{cases} ab > ۰ \\ \\ c < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ \ , \ b > ۰ \\ \text{یا} \\ a < ۰ \ , \ b < ۰ \end{cases}$$

درنتیجه ۴ حالت مختلف پاسخ علامت‌های c, b, a است. بنابراین قطعاً نمی‌توان گفت که هر سه عدد منفی هستند، پس قسمت ج نادرست است.

ج) درست است، چون همواره $a^۲$ نامنفی است، پس برای اینکه $a^۲b<۰$ باید b منفی باشد.

پاسخ قسمت ۳ کار در کلاس صفحهٔ ۹۱ :

- $۳x-۱>۷$
- $۸>-۲x+۳$

هدف از فعالیت صفحهٔ ۹۱، ارائه خواص نابرابری‌ها است. در اینجا می‌خواهیم دانش‌آموز با استدلال استقرایی خواص نابرابرها را کشف کند.

خاصیت‌ها را می‌توان با تعریف نابرابری به صورت زیر اثبات کرد.

اثبات خاصیت ۱ :

$$a > b \Rightarrow \exists p > ۰ : a = b + p \Rightarrow a + c = (b + c) + p$$
$$\Rightarrow a + c > b + c$$

اثبات خاصیت ۲ :

$$a > b \Rightarrow \exists p > ۰ : a = b + p \xRightarrow{c>۰} ac = bc + pc$$
$$\xRightarrow{pc>۰} ac > bc$$

اثبات خاصیت ۳ :

$$a > b \Rightarrow \exists p > ۰ : a = b + p \xRightarrow{c<۰} ac = bc + pc$$
$$\xRightarrow{pc<۰} ac + (-pc) = bc \xRightarrow{-pc>۰} bc > ac$$

در قسمت ۳ این فعالیت، می‌خواهیم مفهوم مجموعه جواب نامعادله درک شود، سپس در ادامه به کمک خواص نابرابری بتواند نامعادله یک‌مجهولی در جداول را حل کند و مجموعهٔ جواب آن را به‌دست آورد.

تمرین صفحهٔ ۹۳ :

۱ــ الف) $a-b=۱ \Rightarrow a=b+۱ \Rightarrow a>b$

ب) $u-v=-۲ \Rightarrow u+۲=v \Rightarrow v>u$

ج) $۲p - ۲ = ۲q - ۳ \Rightarrow ۲p + ۱ = ۲q \Rightarrow p + \frac{۱}{۲} = q \Rightarrow q > p$

د) $\frac{a-b}{۲} = -۳ \Rightarrow a - b = -۶ \Rightarrow a + ۶ = b \Rightarrow b > a$

۲ــ الف) چون $b^۲$ همواره نامنفی است، پس صورت کسر باید منفی باشد؛ یعنی :

$$ac < ۰ \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ , c < ۰ \\ \text{یا} \\ a < ۰ , c > ۰ \end{cases}$$

البته b می‌تواند مثبت یا منفی باشد، یعنی $b>۰$ یا $b<۰$.

ب)

$$\frac{a}{bc} > ۰ \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ , bc < ۰ \Rightarrow \begin{cases} b > ۰ , c < ۰ \\ \text{یا} \\ b < ۰ , c > ۰ \end{cases} \\ a < ۰ , bc > ۰ \Rightarrow \begin{cases} b > ۰ , c > ۰ \\ \text{یا} \\ b < ۰ , c < ۰ \end{cases} \end{cases}$$

۴ــ نادرست است، زیرا : $a^۲ > b^۲ \Rightarrow a^۲ - b^۲ > ۰ \Rightarrow (a+b)(a-b) > ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b>۰\ ,\ a-b>۰ \Rightarrow \begin{cases} a>b \\ \text{و} \\ a>-b \end{cases} \\ \text{یا} \\ a+b<۰\ ,\ a-b<۰ \Rightarrow \begin{cases} a<b \\ a<-b \end{cases} \end{cases}$$

مثال نقض : $۲^۲ < (-۳)^۲$ و این درحالی است که $۲ \not< -۳$.

۵ــ از آنجا که $a,b>۰$، پس $a+b>۰$ و داریم :

$a^۲ > b^۲ \Rightarrow a^۲ - b^۲ > ۰ \Rightarrow (a-b)(a+b) > ۰$

$\xRightarrow{(a+b)>۰} (a-b) > ۰ \Rightarrow a > b$

۶ــ الف) فرض کنید پول علی برابر با x باشد، پس $۳x \geq ۲x + ۳۰۰$.

ب) $\frac{۱}{۲}a + ۴b \leq ۶$.

۷ــ دو نفر روی هم در هر روز نیاز به $۳ \times (۸۵ + ۶۵) = ۴۵۰$ کیلو کالری انرژی دارند. فرض کنیم آنها x روز می‌توانند با این مواد غذایی در جنگل دوام آورند، پس داریم :

$۴۵۰x \leq ۴۵۰۰ \Rightarrow x \leq ۱۰$

درنتیجه آنها حداکثر ۱۰ روز می‌توانند در جنگل با این مواد غذایی دوام بیاورند.