



توان و ریشه

وَ جَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ
هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم
(سوره انبیا، آیه ۳۰)

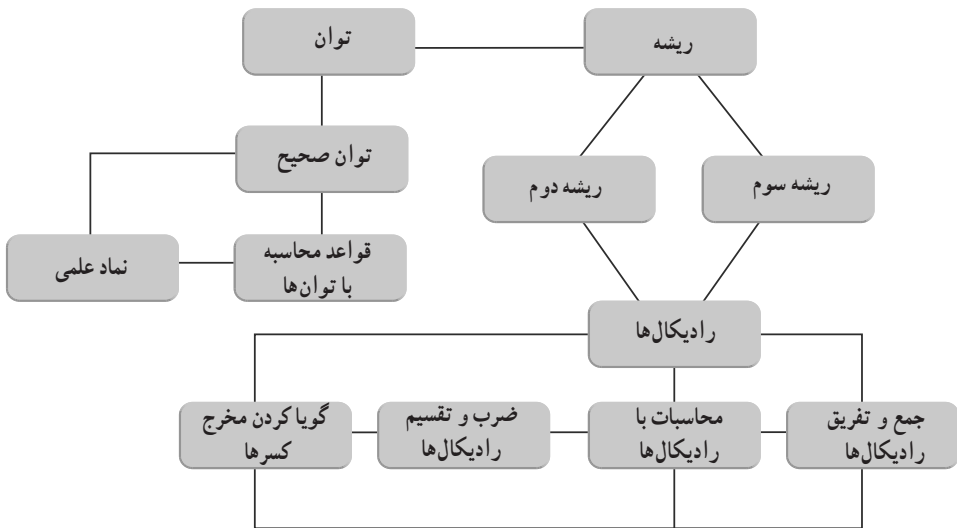


یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر
۳۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مولکول است که می‌توان آن را به صورت $3/3 \times 10^{19}$ نمایش
داد. هرگونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

نگاه کلی به فصل

دانش آموزان از سال هفتم با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اند. در سال هشتم نیز ضمن تعمیق مفاهیم، برخی قواعد و رویه‌ها آموزش داده شده است. همچنین دانش آموزان در سال‌های هفتم و هشتم با مفهوم جذر و روش تقریبی محاسبه آن آشنا شده‌اند. ریشه‌های دوم یک عدد نامنفی نیز در طی این دو سال مطرح شده است. در کتاب ریاضی پایه نهم توان صحیح و ریشه سوم یک عدد در فصل چهارم آموزش داده می‌شود. همچنین نماد علمی و برخی محاسبات در مورد رادیکال‌ها و قواعدی در مورد کار با عبارت‌های رادیکالی مطرح می‌شود. لازم به ذکر است که در این کتاب تأکیدی بر ریشه‌های بالاتر از سه وجود ندارد و در سال‌های بعد به موازات معرفی توان‌های گویا در مورد ریشه‌های بالاتر از ۳ نیز بحث و گفت‌وگو خواهد شد.

نقشه مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

اعداد تواندار از جمله مباحث پرکاربرد در ریاضیات می‌باشد. در دوره‌های مقدماتی اعداد تواندار با توان طبیعی، ارتباط بین توان و ضرب را نشان می‌دهند. در پایه‌های بالاتر، اعداد تواندار با توان منفی اتصالی بین توان و کسر برقرار می‌کنند و در ادامه اعداد تواندار با توان گویا اتصال بین

توان و ریشه‌گیری را نشان می‌دهند. اعداد تواندار با توان گنگ رابطه‌ای بین توان و حدیک دنباله را نشان می‌دهند (سلطانی، ۱۳۹۲).

عددهای حقیقی را می‌توان به دو دسته گویا و گنگ تقسیم‌بندی کرد. علاوه بر این یک دسته‌بندی دیگر نیز وجود دارد: عددهای جبری و عددهای متعالی. عددهای جبری اعدادی هستند که جواب‌های معادله‌های جبری با ضرایب‌های صحیح هستند و بقیه عددهای باقیمانده، عددهای متعالی نامیده می‌شوند. بعضی از عددهای جبری گویا و برخی گنگ هستند، اما همه عددهای متعالی گنگ هستند. برخلاف عددهای گویا که نسبت به اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (به‌جز صفر) بسته هستند، عددهای گنگ از این ویژگی برخوردار نمی‌باشند. اگر x یک عدد گنگ و γ عدد گویایی غیر از صفر باشد، آنگاه $x + \gamma$ ، $x - \gamma$ ، γx ، و $\frac{x}{\gamma}$ عددهای گنگی خواهند بود. همچنین $-\alpha$ و α^{-1} نیز گنگ هستند.

بنابراین با توجه به گنگ بودن مثلاً $\sqrt{3}$ می‌توان گنگ بودن همه اعداد زیر را نتیجه گرفت:

$$-\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} + 7, 5 - \sqrt{3}, -2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{5}, \frac{2}{\sqrt{3}}$$

معرفی منابع برای معلمان

- اعداد گویا و گنگ، ایوان نیون، ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
- ساویزی، بهناز و شاهورانی، احمد (۱۳۹۳). ردپای مبهم اعداد گنگ در ذهن دانش‌آموزان، رشد آموزش ریاضی شماره ۱۱۵.

مسیرهایی برای توسعه

برخی از مسائل مطرح شده در ادامه، ویژه دانش‌آموزانی است که توانایی فراتری دارند و برای آزمون‌های کلاسی معمول توصیه نمی‌شوند.

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\text{آ)} \frac{(0/6)^0 - (0/1)^{-1}}{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \right] + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$$

$$\text{ب) } \left[-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} \right]^{-1} + \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \right]^{-1}$$

۲- اگر x یک عدد حقیقی باشد در مورد اینکه کدام یک از x^2 و x^2 بزرگ ترند بحث کنید.

$$\text{۳- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید: } \left(\frac{8}{4-4}\right) \div \left(\frac{4^3}{4-2}\right)$$

۴- در معادله $2^x + 2^{x+1} = 96$ مقدار x چقدر است؟

۵- حاصلضرب عددی در مجذورش 10^{-3} است. آن عدد را به دست آورید.

۶- علامت دو عدد $A = [-(-4)^{-2}]^{-4}$ و $B = [-(-5)^2]^5$ کدام است؟

(۱) A مثبت و B منفی

(۲) A منفی و B مثبت

(۳) A و B هر دو مثبت

(۴) A و B هر دو منفی

۷- مجذور عبارت $\frac{0/2 \times 0/0012}{0/006 \times 0/001}$ را به دست آورید.

۸- حاصل عبارت زیر را به دست آورید: $(x < 0)$

$$\frac{\sqrt{x^2 - x}}{x^2}$$

۹- اگر $x < 0$ حاصل عبارت مقابل را بدون قدر مطلق بنویسید.

$$\left| x - \sqrt{(x-1)^2} \right|$$

۱۰- حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$5\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{54} + 7\sqrt[3]{128} - 3\sqrt[3]{16}$$

نمونه سؤال های ارزشیابی

۱- حاصل هر عبارت را به صورت یک عدد تواندار بنویسید:

$$\text{آ) } \left(\frac{12}{8}\right)^5 \times \left(\frac{4}{16}\right)^{-5}$$

$$\text{ب) } 14^{-2} \div \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

۲- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\text{آ) } (-x^{-2}y)^{-3}$$

$$\text{ب) } 2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1}$$

۳- ساده شده کسر مقابل چقدر است؟

$$\frac{25^{-2} \times 2^{-6}}{2^{-7} \times 5^{-4}}$$

۴- هر یک از اعداد داده شده را با نماد علمی نمایش دهید.

$$283 =$$

$$1400 =$$

$$0.000301 =$$

$$28/345 =$$

۵- نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید:

$$2/4 \times 10^{-5} =$$

$$7/9 \times 10^5 =$$

$$3/0.1 \times 10^{-6} =$$

$$8/234 \times 10^6 =$$

۶- اگر $x > 0$ و $y < 0$ حاصل عبارت $\sqrt{(xy)^2}$ برابر کدام یک از عبارتهای زیر است؟

ب) $-xy$

آ) xy

۱۵، ۸، و -125

۷- ریشه سوم اعداد روبه‌رو را به دست آورید.

۸- حاصل را به دست آورید:

آ) $\frac{\sqrt{6} \times \sqrt{4}}{\sqrt{8}}$

ب) $\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{32}}{\sqrt{16}}$

۹- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

آ) $(\sqrt{8} + \sqrt{2})(\sqrt{4} + \sqrt{2})$

ب) $\sqrt{27} + \sqrt{12} + \sqrt{72} - \sqrt{32}$

۱۰- مخارج کسرهای زیر را گویا کنید:

آ) $\frac{4}{5\sqrt{2}}$

ب) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

ج) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}}$

۱۱- در جای خالی علامت مناسب $<$ یا $=$ یا $>$ بگذارید:

آ) $\sqrt[3]{27} - \sqrt{8} \bigcirc \sqrt{3}$

ب) $\sqrt{8^2 + 6^2} \bigcirc \sqrt[3]{1000}$

ج) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \bigcirc \sqrt{25}$

هدف: آشنایی با توان منفی یک عدد (ناصفر)

روش تدریس

با توجه به آشنایی دانش‌آموزان با توان‌های طبیعی یک عدد و نیز توان صفر، به کمک فعالیت داده شده می‌توان توان منفی یک عدد (غیرصفر) را آموزش داد. در واقع به کمک جدول فعالیت صفحه ۶۰ و با کمک الگویی باید به دانش‌آموزان کمک کرد تا اعداد داده شده در جاهای خالی را حدس بزنند. هم‌سطرهای اول جدول و هم‌سطرهای دوم آن باهم ارتباط دارند. ضمناً هر عدد در سطر بالا با عدد توانی زیر آن در سطر دوم ارتباط دارد. انتظار می‌رود که دانش‌آموزان با توجه به آگاهی خود از عددهای صحیح در جاهای خالی اعداد -۱ ، -۲ ، -۳ ، -۴ و -۵ را حدس بزنند. در نهایت توان صحیح و قاعده مربوط به آن به صورت رسمی تر و در قالب یک قاعده کلی بیان شده است. باید به دانش‌آموزان برای حل کار در کلاس‌ها فرصت داد و حتی در مورد راه‌های دیگر دانش‌آموزان از آنها نظرخواست. بسیاری از مسائل و تمرین‌ها نیاز به تکمیل توسط دانش‌آموز دارد. دبیر محترم با توجه به سطح کلاس و نیاز راهنمایی لازم را ارائه خواهد کرد.

در تمرین ۱ صفحه ۶۳ برخی از مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان به چالش کشیده می‌شوند. مثلاً خیلی از دانش‌آموزان حاصل $۳^{-۲}$ را برابر $۶-$ می‌گیرند. باید دلیل نادرستی این پاسخ توسط دانش‌آموزان توضیح داده شود.

در تمرین ۳ برای مقایسه عددهای داده شده باید ابتدا آنها را برحسب توانی از ۲ بنویسند، در تمرین ۵ باید مقدار x را به کمک حدس زدن یا حل معادله به دست آورند.

توصیه‌های آموزشی

برای اینکه از توانایی دانش‌آموزان اطمینان حاصل کنید مناسب است پس از بررسی و حل تمرین‌ها از آنها بخواهید که مسائل مشابهی را برای دوستانشان طرح کنند. همچنین تأکید بر گفتمان کلاسی و ارائه دلیل از سوی دانش‌آموزان بسیار ضروری است.

اشتباهات رایج

برخی دانش‌آموزان توان منفی یک عدد را در خود عدد ضرب می‌کنند. برخی دیگر علامت توان منفی را در علامت عدد ضرب می‌کنند.

اهداف

- نمایش یک عدد به صورت نماد علمی
- نوشتن نمایش اعشاری عددی که نماد علمی آن داده شده است.
- ساده کردن برخی محاسبات

روش تدریس

نماد علمی دارای کاربردهای فراوانی در ریاضیات و سایر علوم است. به کمک جدول فعالیت صفحه ۶۵ ابتدا دانش‌آموزان مشاهده می‌کنند که هنگام ضرب یا تقسیم یک عدد در توانی از 10° یا بر توانی از 10° چه اتفاقی رخ می‌دهد. به دانش‌آموزان فرصت دهید تا این محاسبات را انجام دهند و نتیجه را با زبان خود بیان کنند. اگر لازم شد عددهای دیگری مثال بزنید و حتی در صورت لزوم پاسخ دانش‌آموزان را دقیق نمایید. در بخش دوم فعالیت صفحه ۶۵ مثالی کاربردی از سرعت نور ارائه شده است که لزوم استفاده از نماد علمی را نشان می‌دهد. سادگی در محاسبات، و نمایش اعداد و نیز هماهنگی و نظم از ویژگی‌های کار با نماد علمی است.

در صفحه ۶۷ تمرین ۱- الف) داریم:

$$\frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}} = \frac{3^{-5} \times 25}{6^{-5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \times 25 = 2^5 \times 25 = 32 \times 25 = 800$$

تمرین ۸، یک سؤال باز پاسخ است. یک روش برای حل این تمرین، این است که دانش‌آموزان با جایگذاری اعداد صحیح درستی نامساوی‌ها را بررسی کنند. مثلاً عددهای 10° و 10^{-1} را آزمایش کنند.

توصیه‌های آموزشی

ارائه مثال‌های کاربردی به دانش‌آموزان لزوم کار با نمادهای علمی را توجیه‌پذیر می‌نماید. همچنین می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید که برخی محاسبات را بدون استفاده از نماد علمی انجام دهند تا به مشکلات احتمالی بیشتر واقف شوند.

اشتباهات رایج

برخی از دانش‌آموزان هنگام ضرب یک عدد در توانی از 10° یا هنگام تقسیم آن بر توانی از 10° ،

در تعیین جای ممیزها دچار اشتباه می‌شوند. همچنین، برخی مشکلات مربوط به درک اعداد اعشاری در هنگام کار با نماد علمی خود را نمایان می‌سازد. به‌طور مثال برخی از آنها صفرهای بعد از ممیز را در عددی مانند $۳/۰۰۰۱$ یا $۰/۰۰۰۱$ به حساب نمی‌آورند.

هدف: آشنایی با ریشه سوم یک عدد

روش تدریس

با توجه به آشنایی دانش آموزان با ریشه های دوم یک عدد، فعالیت صفحه ۶۸ بر همین مبنا طراحی شده است. در جدول اول صفحه ۶۸ ریشه های دوم هر عدد در سطر بالا و عدد مورد نظر در سطری پایین داده شده است. با توجه به جاهای خالی ارتباط دوطرفه بین هر عدد و ریشه های دوم آن برقرار می شود. در جدول دوم با تکمیل جاهای خالی موضوع ریشه سوم آموزش داده می شود. نوع ستون های جدول دوم نشان می دهند که یک عدد بیش از یک ریشه سوم ندارد. توضیحات بالای صفحه ۶۹ موضوع آموزش ریشه سوم را تمام خواهد کرد. سعی کنید به صورت تعاملی و با گفت و گو این بحث را در کلاس مطرح کنید. در مورد ضرب و تقسیم رادیکال ها (با ریشه های سوم) که در صفحه ۷۰ مطرح می شود، شیوه کار همانند آموزش ضرب و تقسیم رادیکال ها (ریشه دوم) در پایه هشتم است. البته کار در کلاس صفحه ۷۰ نشان می دهد که رابطه برای جمع رادیکال ها (ریشه سوم) برقرار نمی باشد.

تمرین ۵ صفحه ۷۲/ هدف این تمرین حل نامعادله نیست. بلکه حدس و آزمایش عددها و بررسی درستی نامساوی است. ممکن است برخی دانش آموزان متوجه شوند که جواب های بی شماری برای مسئله وجود دارد. بحث و گفت و گوی کلاسی مفید است.

تمرین ۶ صفحه ۷۲/ بهتر است بر حسب اینکه x یک عدد مثبت یا منفی باشد بحث شود.

توصیه های آموزشی

باید به پاسخ های نادرست دانش آموزان هم بها داد و اگر اشتباهات در کلاس درس مطرح و برطرف شوند دیگر شاهد تکرار آنها در امتحانات نخواهیم بود. توصیه اکید این است که قبل از درک مناسب ریشه سوم و اعمال روی آنها به ریشه های بالاتر پرداخته نشود. به طور رسمی هدف این کتاب آموزش ریشه های بالاتر نیست.

اشتباهات رایج

یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان برابر گرفتن عبارت های $(\sqrt{x})^2$ و $\sqrt{x^2}$ است. اشتباه دیگر این است که عبارتی مانند $\sqrt{4}$ را برابر ± 2 در نظر می گیرند.

هدف: محاسبات با رادیکال‌ها و ساده کردن جملات متشابه

روش تدریس

فعالیت صفحه ۷۳ سعی دارد که ارتباطی بین جبر و هندسه برقرار نماید و از دانش قبلی دانش‌آموزان بهره برد. همچنین ضرورت تسلط بر محاسبات به کمک رادیکال‌ها را نشان دهد. در این فعالیت به کمک رابطه فیثاغورس طول ضلع مربع به دست می‌آید و از آنجا محیط و مساحت مربع حساب می‌شود.

در کار در کلاس نمونه‌ای از جمع و تفریق رادیکال‌ها ارائه شده است و بقیه موارد باید توسط دانش‌آموزان انجام شود. توجه دانش‌آموزان به شرایط لازم برای جمع یا تفریق دو یا چند عبارت رادیکالی مهم است. در صفحه ۷۴ برای محاسبات رادیکالی فعالیتی طراحی شده است که باید دانش‌آموزان آن را کامل نمایند. مقایسه روش‌های حل مختلف که به پاسخ یکسانی منجر می‌شوند برای دانش‌آموزان بسیار آموزنده خواهد بود در گویا کردن مخرج رادیکال‌ها نیز هدف مطرح کردن عبارت‌های پیچیده و استفاده از اتحادهای جبری مطرح نشده در کتاب نیست. تأکید باید در سطح ارائه شده در کتاب درس باشد.

توصیه‌های آموزشی

هدف اصلی این فصل آشنایی دانش‌آموزان با توان‌های صحیح یک عدد (غیرصفر) و نیز آشنایی با ریشه سوم است. آشنایی با توان‌های گویا و ریشه‌های بالاتر در سال دهم انجام خواهد گرفت. توصیه می‌شود که زودتر از موعد به این موارد پرداخته نشود و در عوض بر مباحث مطرح شده در کتاب تأکید شود.

اشتباهات رایج

برخی دانش‌آموزان حاصل دو عبارت $\sqrt[3]{-8}$ و $\sqrt[3]{(-8)^2}$ را برابر در نظر می‌گیرند. برخی از اشتباهات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد رادیکال‌ها به مشکلات آنها در مفهوم توان بازمی‌گردد.

حل تمرین های فصل ۵

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) 3^{-2} $\begin{cases} \frac{1}{9} \\ -6 \end{cases}$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

ب) 3^{-1} $\begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1}$$

ج) $3^{-1} \times 4^{-1}$ $\begin{cases} 12^{-1} \\ 7^{-1} \end{cases}$

$$3^{-1} \times 4^{-1} = (3 \times 4)^{-1} = 12^{-1}$$

د) $3^{-1} + 4^{-1}$ $\begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ 7^{-1} \end{cases}$

$$\begin{aligned} 3^{-1} + 4^{-1} &= \frac{1}{3^1} + \frac{1}{4^1} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ه) 5^{-2} $\begin{cases} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \end{cases}$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

و) $(-2)^2$ $\begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \end{cases}$

$$(-2)^2 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود 10^{-24} گرم است. جرم یک وزنه 100 کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

$$100 \times 1000 = 100000 = 10^5 \text{ گرم}$$

$$10^5 \div 10^{-24} = 10^5 \div \frac{1}{10^{24}} = 10^5 \times 10^{24} = 10^{29}$$

۳- عددهای $۱۶^۲$ و $۸^۴$ و $۲^{۱۱}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

$$۸^۴ = (۲^۳)^۴ = ۲^{۱۲}$$

$$۱۶^۳ = (۲^۴)^۳ = ۲^{۱۲}$$

$$۲^{۱۱} < ۸^۴ = ۱۶^۳$$

۴- در جاهای خالی علامت $>$ ، $<$ یا $=$ قرار دهید:

الف) $۳^{-۱} \ominus ۳^{-۲}$

ب) $۲^۰ \ominus ۲^{-۵}$

ج) $(۰/۵)^{-۲} \ominus (۰/۶)^{-۲}$

$$\frac{۱}{۳} > \frac{۱}{۹}$$

$$۱ > \frac{۱}{۲۵}$$

$$۴ > \frac{۱۰۰}{۳۶} = \frac{۲۵}{۹}$$

د) $۵^{-۱} \ominus ۰$

ه) $\left(\frac{-۸}{۱۵}\right)^۰ \ominus ۱$

و) $-۵^{-۲} \ominus (-۵)^{-۲}$
- +

$$\frac{۱}{۵} > ۰$$

۵- در هر یک از تساوی‌های زیر x چه عددی است؟

الف) $۵^x \times ۵^{-۲} = ۵^۴$

ب) $۵^x \div ۵^{-۲} = ۵^۴$

$۵^{x-۲} = ۵^۴$

$۵^{x-(۲)} = ۵^۴$

$x-۳ = ۴$

$x+۳ = ۴$

$x=۷$

$x=۱$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $a^۴ \times a^۵ = a^۲۰$

ه) $(-۳)^۰ + (۳^{-۱})^{-۱} = ۴$

ب) $a^۴ \times a^۵ = a^۹$

و) $۳^{-۱} \times ۴^{-۱} = ۱۲^{-۲}$

ج) $(a^m)^n = (a^n)^m$ $a > ۰$

ز) $۶^{-۲} = -\frac{۲}{۶}$

د) $۳^{-۲} = -۹$

ح) $۳^{-۱} < ۳^{-۱}$

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف) $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱} \times ۲۷^{-۳}$

ب) $(۰/۲)^{-۴} \times ۲۵^{-۲}$

$$= ۳^{۱۰} \times (۳^۲)^{-۲} = ۳^{۱۰} \times ۳^{-۴} = ۳$$

$$= \left(\frac{۲}{۱۰}\right)^{-۴} \times (۵^۲)^{-۲} = \left(\frac{۱۰}{۲}\right)^۴ \times ۵^{-۴} \\ = ۵^۴ \times ۵^{-۴} = ۵^۰ = ۱$$

$$= \frac{3 \cdot 10^{-5} \times 5^2}{6 \cdot 10^{-5}} = \frac{5^2}{2} = 5^2 \times 2^5$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$\times 1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102$$

$$\sqrt{5/9} \times 10^{-1} = 0.59$$

$$\sqrt{4/3} \times 10^2 = 4300$$

$$\times 7/0.04 \times 10^{-2} = 0.7004$$

$$\sqrt{6/18} \times 10^7 = 61800000$$

$$\sqrt{8/257} \times 10^4 = 82570$$

۳- شعاع خورشید تقریباً 695000 کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

$$6950000 = 6.95 \times 10^5$$

۴- اندازه یک باکتری 0.0000005 متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

$$5 \times 10^{-7}$$

۵- قطر خورشید حدود $1/4 \times 10^9$ متر و قطر زمین حدود $1/3 \times 10^7$ متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

$$\frac{1/4 \times 10^9}{1/3 \times 10^7} \approx \frac{10^9}{10^7} = 100 \quad \text{تقریباً } 100 \text{ برابر}$$

$1/4$ را تقریباً با $1/3$ برابر گرفته ایم.

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید :

$$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^9 = 8 \times 10^2$$

$$\begin{aligned} \frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}} &= 0.5 \times 10^{-4} \times 10^{19} \\ &= 0.5 \times 10^{15} \\ &= 5 \times 10^{14} \end{aligned}$$

۷- فاصله مریخ از زمین $9/17 \times 10^7$ کیلومتر و فاصله کیوان از زمین $6/287 \times 10^8$ کیلومتر

است. با مقایسه این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک تر است؟ مریخ

$$6/287 \times 10^8$$

$$9/17 \times 10^7$$

$$62/87 \times 10^7$$

>

$$9/17 \times 10^7$$

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$$2/7 \times 10^0 > 0.2$$

$$0.3 > 0.03 \times 10^0$$

$$-2, -1, 0, 1, \dots$$

$$0, -1, -2, \dots$$

۹- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$1/5 \times 10^{-2}, 1/2 \times 10^6, 5/35 \times 10^{-2}, 3/7 \times 10^{-2}$$

$$5/35 \times 10^{-2} < 1/5 \times 10^{-2} < 3/7 \times 10^{-2} < 1/2 \times 10^6$$

تمرین

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

$$-\frac{7}{4}, +\frac{7}{4}, -\frac{1}{9}, +\frac{1}{9}, -\sqrt{15}, +\sqrt{15}, -12, +12, -\sqrt{12}, +\sqrt{12}, -\sqrt{18}, +\sqrt{18}$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید :

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 1^0$$

$$6, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{-5}, -\frac{1}{6}, \sqrt[3]{1^0}$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$\begin{array}{l} \times \sqrt{(-1)^2} = -1 \quad \checkmark \sqrt[3]{(-1)^3} = -1 \quad \checkmark \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5 \quad \checkmark \sqrt[3]{(-5)^3} = -5 \\ \checkmark -\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16} \quad \checkmark \sqrt{1/44} = 1/2 \quad \times (\sqrt{-1})^2 = 1 \quad \checkmark \sqrt[3]{-64} = -4 \end{array}$$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{125} \times \sqrt{36} & \sqrt{-1} \times \sqrt{81} & \sqrt{\frac{81}{3}} \\ \swarrow & \searrow & \swarrow \\ 3 & 3^0 & -9 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqrt{-25} \times \sqrt{5} & & -5 \end{array}$$

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای a قرار دهیم، نامساوی زیر درست

باشد:

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4} \rightarrow \sqrt[3]{a} < 2 = \sqrt[3]{8} \rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{8}$$

پس $a < 8$

۷, ۶, ۵ ...

۶- رابطه $\sqrt{(-x)^2} = x$ به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

$$\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

در صورتی که $|x| = x$ است که x عددی نامنفی باشد.

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{(-0)^2} = \sqrt{0} = 0$$

$$x = 4 \Rightarrow \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$x = -9 \Rightarrow \sqrt{-(-9)^2} = \sqrt{9^2} = 9 \neq -9$$

۷- اگر مساحت کل یک مکعب $96a^2$ باشد، حجم آن را بر حسب a به دست آورید.

مساحت یک وجه $16a^2 = 96a^2 \div 6$

$$(4a)^2 = 16a^2$$

$$\sqrt{16a^2} = 4a \text{ ضلع}$$

۸- اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد، حاصل $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$ را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = |x| - |y| = x - (-y) = x + y$$

۹- عبارتهای زیر را مانند نمونه ساده کنید: $\sqrt{9^0} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{1^0} = 3\sqrt{1^0}$

$$\sqrt{15^0}, \quad \sqrt{8^0}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt[3]{125^2}$$

$$\sqrt{15^0} = \sqrt{3 \times 3 \times 5^2} = 5\sqrt{3} \quad \sqrt{24} = \sqrt{3 \times 2^3} = \sqrt{3 \times 2 \times 2^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{8^0} = \sqrt{2^3 \times 5} = 2\sqrt{5} \quad \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{(5^2)^3} = 5^2$$

۱۰- آیا تساویهای زیر درست است؟ بله

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = (\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{-2})$$

$$\sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{(-1)^3 \times 4^3} = -1\sqrt[3]{4}$$

$$= \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

۱۱- حاصل را به دست آورید :

$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} =$	$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$	$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{60}}{\sqrt[3]{5}} =$
$6\sqrt[3]{64} = 6\sqrt[3]{4^3}$	$= \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$	$\sqrt[3]{\frac{18 \times 60}{5}}$
$= 6 \times 4 = 24$		$= \sqrt[3]{216} = 6$

تمرین

۱- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

<p>الف) $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$</p> $= 10\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 12\sqrt{2}$ $= 26\sqrt{2}$	<p>ج) $\sqrt[3]{27^2}$</p> $= \sqrt[3]{(3^3)^2}$ $= \sqrt[3]{(3^2)^3} = 9$	<p>ه) $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$</p> $= \sqrt{20} + 2 - \sqrt{50} - \sqrt{10}$ $= 2\sqrt{5} + 2 - 5\sqrt{2} - \sqrt{10}$
<p>ب) $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$</p> $= 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$	<p>د) $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$</p> $= \sqrt[3]{\frac{-3^3}{4^3}} = \frac{-3}{4}$	<p>و) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$</p> $= 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

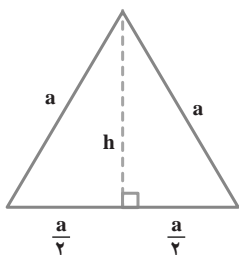
۲- اگر $x < 0$ باشد حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$2\sqrt{x^2} - x = 2|-x| - x = 2(-x) - x = -2x - x = -3x$$

۳- محیط و مساحت مربعی به طول ضلع $3\sqrt{5}$ سانتی متر را به دست آورید.

$$\text{محیط} = 4 \times 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$$\text{مساحت} = (3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$$



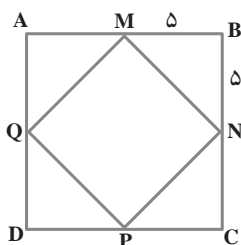
۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع را به ضلع a نشان می‌دهد. اندازه ارتفاع h را برحسب a به دست آورید؛ سپس مساحت آن را برحسب a بنویسید.

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \times a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$



۵- نقاط M, N, P, Q وسط‌های اضلاع مربع $ABCD$ هستند. اگر مساحت مربع $ABCD$ ، 100 متر مربع باشد، محیط مربع $MNPQ$ چقدر است؟

$$\sqrt{100} = 10$$

$$MN^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$$

$$MN = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \quad \text{محیط} = 4 \times 5\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$$

۶- در جاهای خالی علامت $<$ یا $=$ یا $>$ بگذارید:

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} \otimes \sqrt{5+4}$$

$$4 \otimes \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$2 + \sqrt{5} \quad \text{۳}$$

$$\sqrt{16} \quad \sqrt{13}$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \ominus \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \ominus 5$$

$$\sqrt{25}$$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید:

الف) $\sqrt{\square} = 10$ ب) $2\sqrt{\square} = 6$ ج) $\sqrt{\frac{\square}{9}} = \frac{1}{3}$ د) $\sqrt{\square} = 2$

$$\text{هـ)} \frac{2^{-5}}{2(-8)} = \sqrt{64} \quad \text{و)} \frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3^{(-1)} \quad \text{ز)} \frac{m^6 \times m^{-2}}{m(3)} = m \quad \text{ح)} 9\sqrt{-27} = \frac{(12)^3}{(-4)^3}$$

۸- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \frac{5}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} &= \frac{5\sqrt{3}}{2} & \text{ب)} \quad \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} & \text{ج)} \quad \frac{2}{\sqrt{v}} \times \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{v}} = \frac{2\sqrt{v}}{v} \\ & & & & & = \frac{2\sqrt[3]{a}}{a} \end{aligned}$$

۹- آیا تساوی $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$ همیشه درست است؟ توضیح دهید.

الف) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر $x \geq 0$ ، تساوی

درست است.

چون اگر x عددی منفی باشد عدد زیر رادیکال درست است منفی شده و اعداد منفی جذر ندارند.