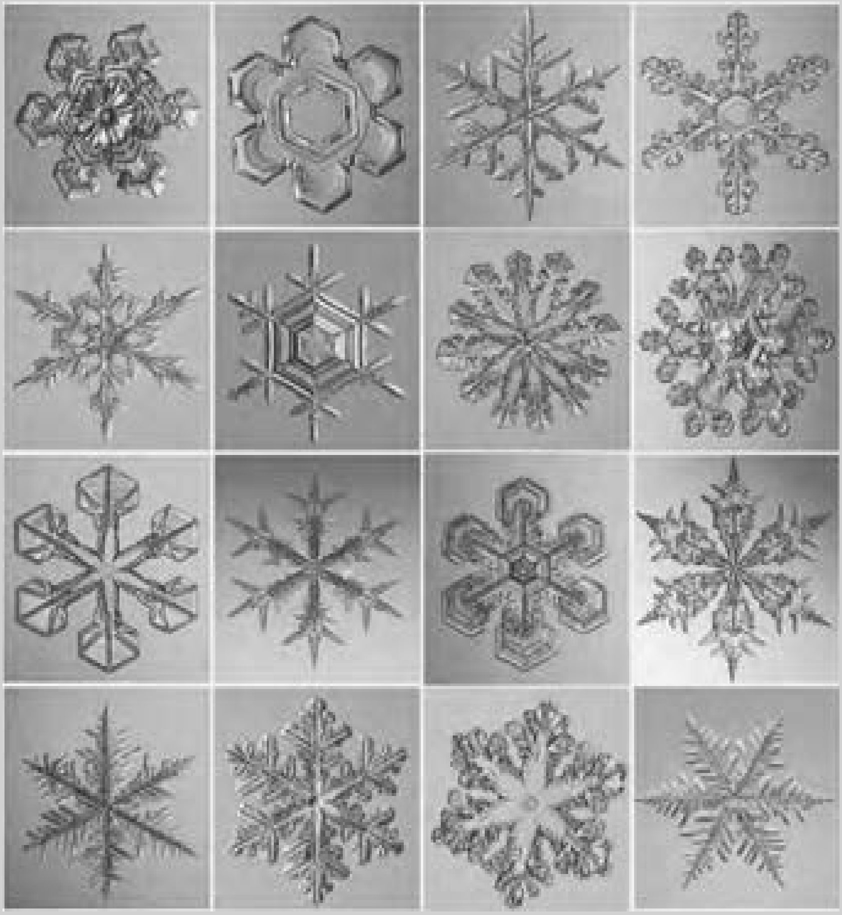
فصل ۳

استدلال و اثبات در هندسه

اُدعُ اِلیٰ سَبیلِ رَبِّکَ بِالحِکمَةِ وَ المَوعِظَةِ الحَسَنَةِ وَ جادِلهُم بِالَّتی هِیَ اَحسَنُ ...

با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و مناظره کن! (سورهٔ نحل، آیهٔ ۱۲۵)

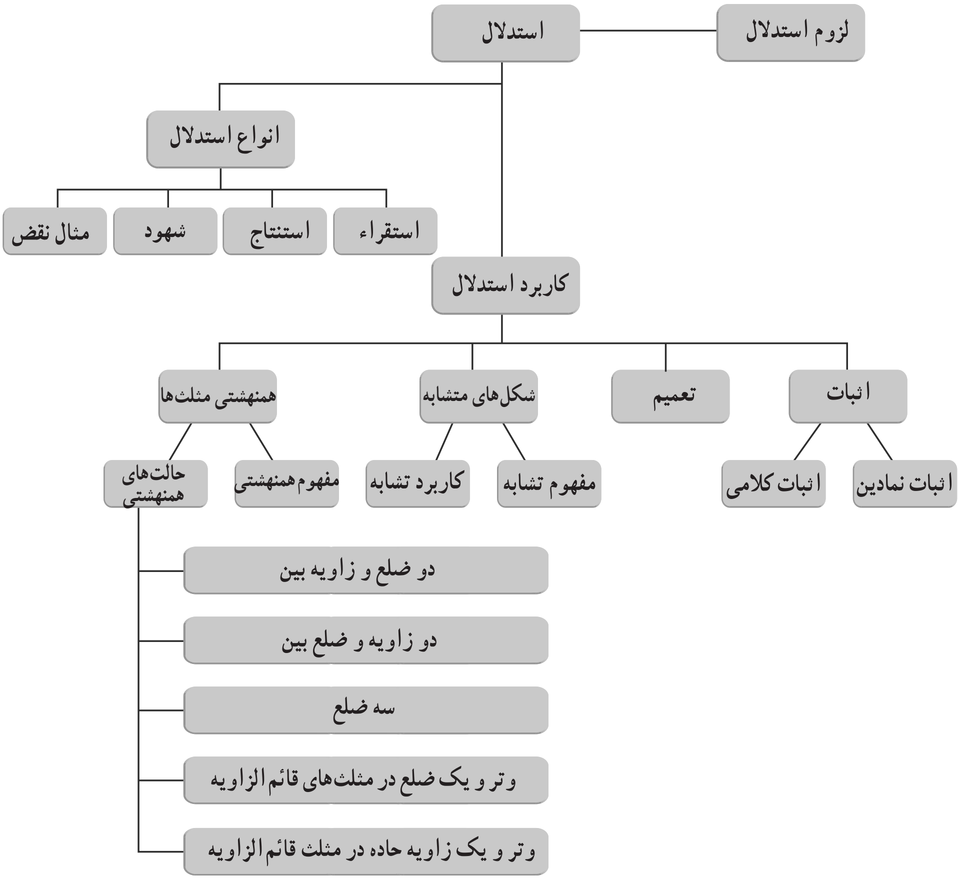


بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می‌آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها دانه‌اند، امّا هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و هیچ دو تایی از آنها «همنهشت» نیستند!

نگاه کلی به فصل

ــ تفکر ریاضی با به کارگیری مهارت‌های غنی ریاضی برای درک ایده‌ها، کشف روابط میان ایده‌ها، به دست آوردن یا حمایت از نتایج دربارهٔ ایده‌ها و روابط‌شان و حل مسائلی که با ایده‌ها سروکار دارند، شکل می‌گیرد. استدلال ریاضی بخشی از فرایند ریاضی است. این فصل شامل پنج درس می‌باشد که در دو درس اول، دانش‌آموز با استدلال، اثبات و نیز برخی مفاهیم مانند تعمیم که در استدلال‌ها به‌کار می‌روند آشنا می‌شود. در درس‌های سوم و چهارم، همنهشتی مثلث‌ها و تسلط نسبی بر حل مسائل آن و نوشتن منظم برخی اثبات‌ها با نمادهای ریاضی مدنظر می‌باشد و نیز با برخی مطالب که در حل مسائل او را یاری می‌نماید آشنا خواهد شد و در درس آخر این فصل با مفهوم تشابه آشنا می‌شود.

نقشه مفهومی



دانستنی‌هایی برای معلم

استدلال ریاضی قسمتی از تفکر ریاضی است که با تشکیل تعمیم‌ها و به دست آوردن نتایج معتبر دربارهٔ ایده‌ها و چگونگی ارتباط آنها درگیر است. دو نوع مهم استدلال ریاضی، استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی است.

بینش پولیا : یک اثبات ریاضی، استدلالی مدلّل (استنتاجی) است در صورتی که شواهد استقرایی یک فیزیکدان، شواهد محیطی (مربوط به موقعیت) یک وکیل دادگستری، شواهد آماری یک اقتصاددان، متعلق به استدلال محتمل را دارا باشد. استدلال استقرایی حالت خاصی ازاستدلال محتمل است.

با وجود اینکه پولیا استدلال تمثیلی و استدلال استقرایی را به عنوان حالت‌های خاص استدلال محتمل و استدلال نسبی (نسبی، مشابهتی) را به عنوان یک حالت از استدلال تمثیلی محسوب می‌کند، ما به‌طور مقدماتی و ابتدایی با استدلال استنتاجی و استدلال استقرایی سروکار خواهیم داشت.

استدلال استقرایی : یک فرایند استدلال ریاضی است که اطلاعات دربارهٔ بعضی از اعضای یک مجموعه را به‌کار می‌گیرد تا یک تعمیم در مورد اعضای دیگر یا همهٔ اعضای آن مجموعه بسازد.

استدلال استنتاجی : یک فرایند استدلال ریاضی است که الگوهای استنتاج به کار رفته برای به‌دست آوردن نتایج از مقدمات را معتبر می‌سازد.

توجه کنید که استدلال شرطی به‌کارگیری یک اگر ــ آن‌گاه یا گزاره‌های شرطی در فرایند استدلال استنتاجی است. الگوهای اساسی استنتاج معتبر و نامعتبر مورد استفاده در استدلال شرطی در زیر مرور شده است.

درک و فهم ریاضی

جنبه‌های گوناگون درک و فهم ریاضی نیز وابسته به شهود ریاضی است. درک و فهم ریاضی از مواردی است که به‌صورت دقیق تعریف نشده است و شاید نتوان آن را با «دقت ریاضی» تعریف کرد. فرویدنتال نه تنها پیچیدگی دانش و فهم ریاضی، بلکه تفاوت حساس بین درک و فهمی که یک معلم باید جویای آن باشد و می‌خواهیم دانش‌آموزان فراگیرند، این‌طور جمع‌بندی می‌کند : «فهمیدن در ریاضیات گونه‌های بسیار دارد. شما ممکن است هر لحظه فکر کنید به فهم نهایی فلان مطلب رسیده‌اید، چنان که دیگر چیزی نمی‌توان از آن دریافت. اما در ریاضیات فهم نهایی وجود ندارد. هر مسئله‌ای را می‌توان در بافتی هر دم گسترده‌تر و از نقطه نظری بالاتر فهمید آنچه پایین‌ترین می‌نماید،

شاید بالاترین باشد و در آخر اینکه می‌توان آن را از چشم‌انداز یادگیرنده فهمید.»

با این حال باید با جوانب مختلف درک و فهم ریاضی آشنا بود. دسته‌بندی زیر می‌تواند تسهیل کننده باشد.

۱ــ درک معنا شناختی یعنی شناخت اطلاعات مندرج در مفاهیم و قضایا.

۲ــ درک منطقی یعنی شناخت پیوندها و رابطه‌های منطقی قضایایی که به‌صورت حقایق پذیرفته شده شخصی درآمده‌اند.

۳ــ درک شهودی یعنی قانع شدن واقعی به درستی یک قضیه و توانایی به‌کارگیری صحیح مفاهیم، بدون توسل به تعاریف رسمی و وارسی مکانیکی.

۴ــ درک ریاضی یعنی آگاهی از مقاصد درونی ابزارهای ریاضی، مثلاً ساده کردن یک عبارت گویا برای تسهیل محاسبه مقدار عددی آن به‌ازای مقادیر مختلف متغیرها، یا توسل به فرض‌های غیربدیهی به عنوان اصل پذیرفته شده، برای ساده کردن یک موقعیت

۵ــ درک ریاضی یعنی آگاهی از کاربردپذیری بیرونی بالقوه ریاضیات.

مشکلات مهم دانش‌آموزان با استدلال استنتاجی کدامند؟

روشن است که دانش‌آموزان مشکلات قابل‌توجهی در مورد استفاده از الگوهای استنتاجی معتبر دارند.

● بسیاری از دانش‌آموزان مشکل به‌کارگیری استدلال صوری برای کشف نتایج الزامی در الگوهای استنتاجی درگیر با عبارت‌های اگر ــ آنگاه (غیر از قیاس استثنایی) دارند.

● غالباً دانش‌آموزان عبارت «اگر ــ آنگاه» را مثل «اگر و تنها اگر» تعبیر می‌کند. بسیاری از آنها ارزشمندی الگوی استنتاجی قیاس استثنایی منفی (نقیض انتزاع) را نمی‌شناسند.

● بسیاری از دانش‌آموزان الگوهای استدلالی نامعتبر وارونه و معکوس را نمی‌شناسند.

● مشکل بسیاری از آنها به عبارت‌های شرطی منفی مربوط است.

دلایل اصلی خطاهای استدلال استنتاجی چیست؟

پژوهش واسون و یوهانسون ــ لیارد شواهد مؤثری برای موردی که خطاهای حساب منطق تنها مربوط به قسمتی از خطاهای استدلال استنتاجی است، ارائه می‌کند. همچنین می‌توانند نتیجهٔ دشواری حفظ اثر اطلاعات و نبودن نشانه‌های معنایی (معنی‌شناسی) که به یک تفسیر معین علامت

می‌فرستند، باشند. یونز، هنگامی که خطاهای به‌وجود آمده در استدلال استنتاجی را تفسیر می‌کرد، یک آزمون قوی به‌وجود آورد به‌طوری که نه تنها موضوعات منطق صوری، بلکه عملیات ذهنی موردنیاز برای انجام تکالیف را مورد بررسی قرار می‌داد.

دلایل اشتباهات در استدلال استنتاجی برگرفته از چندین مطالعه در زیر جمع‌بندی شده است.

● خطاها در استدلال استنتاجی به وسیلهٔ افزودن، جرح و تعدیل یا چشم پوشیدن مواردی از مقدمات به‌وجود می‌آیند.

● اشتباهات به وسیلهٔ پذیرفتن محتوای واقعی به‌جای الگوی استنتاجی به‌وجود آمده‌اند. الگوهای سنتی سخنرانی (مباحثه) روزمره اغلب منطق را باطل می‌کند.

● دلایل دیگر اشتباهات، مشکلات زبانی هستند. تعداد و مکان منفی‌ها، طول کلمه و جمله و سرریز شدن شناختی از آن جمله هستند.

● ناتوانی در پذیرش فرضیه، گونه‌ای دیگر از علت‌های این خطاها می‌باشد.

آیا توانایی‌های استدلال استنتاجی از راه آموزش بهبود می‌یابد؟

برخی از مطالعات آشکار کرد که آموزش با استفاده از مواد و وسایل دست‌ورزی انتخاب شده، تأثیر مثبت روی توسعهٔ توانایی استدلال منطقی کودکان سال دوم و سوم دارد. سویز و باینفورد گزارش کردند که چارک بالای دانش‌آموزان سال پنجم و ششم می‌توانند مقدمات اصلی منطق را درسطح ۸۵ درصد از آنچه که در مطالعهٔ یکسان دانشجویان دانشگاه به آن دست می‌یابند، به‌کار بگیرند و در یک فاصله زمانی بلند آن را گسترش می‌دهند. انیس و پائولوس نشان دادند که منطق کلاسی می‌تواند با موفقیت برای دانش‌آموزان ۱۱ و ۱۲ ساله آموزش داده شود اما این آموزش به دانش‌آموزان کمک نمی‌کند تا الگوهای نامعتبر را کشف و شناسایی کنند. شیپمن این را یافت که معلّم معمولی که از زبان و ایده‌های شرطی در کلاس درس استفاده می‌کند، به‌نظر می‌رسد که تأثیر مثبتی بر رشد توانایی استدلالی دانش‌آموزان دارد.

● دورهٔ قبل از بلوغ کودکان (۹ تا ۱۲ سالگی) می‌تواند برای توسعهٔ بعضی از انواع توانایی‌ها، استدلال استنتاجی به وسیلهٔ تجربیات به‌طور دقیق طرح شده، به‌کار رود.

● استدلال کلاسی را می‌توان در اوایل دورهٔ بلوغ آموزش داد اما موفقیت آموزشی مهم در بهبود و اصلاح توانایی‌های قبل از ۱۶ سالگی دورهٔ بلوغ برای شناخت روش‌های استنتاجی نامعتبر گزارش نشده است.

● جایی که یک معلّم اغلب به‌طور طبیعی ایده‌ها و زبان استدلالی اگر ــ آن‌گاه را به‌کار می‌برد، همبستگی مثبت بین رشد توانایی استدلال و به عمل درآمدن در کلاس درس وجود دارد.

مشکلات اصلی دانش‌آموزان با اثبات‌ها چیست؟

سنک یک نمونه ۱۵۲۰تایی از دانش‌آموزان درس هندسه را انتخاب کرد و در مورد مشکلات دانش‌آموزان با اثبات‌های هندسی گزارش ارائه کرد. در زیر یافته‌های اصلی سنک و ارنست بیان شده است.

● دانش‌آموزان مشکلات زبانی و منطقی با اثبات‌ها دارند و این مشکل برای به‌وجود آوردن یک اثبات سدّ راه می‌شود. آنها اغلب قضیه‌ای که باید ثابت شود را به عنوان دلیل در اثبات خودش و صور استنتاجی نامعتبر را مورد استفاده قرار می‌دهند.

● اثبات با نمودارهایی که شامل چند مجموعه از مثال‌های محاط شده یا خطوط کمکی موردنیاز می‌باشند، از جمله مشکل‌ترین‌ها بودند. اثبات‌های تشابه بیشتر از اثبات‌های همنهشتی که همان تعداد استنتاج نیاز دارد، دشوار هستند.

● دانش‌آموزان با پیچیدگی اصل استقرای ریاضی مشکل دارند.

● عدم تفاوت مربوط به جنسیت در اثبات‌نویسیِ موفقیت‌آمیز مشهود است.

نگاهی به نقش اثبات در کلاس درس

نقش اثبات در کلاس درس همانند نقش آن در پژوهش ریاضی نیست. در تحقیقات ریاضی اثبات برای متقاعد کردن و رسمیت بخشیدن یک ایده است. در صورتی که در کلاس درس اثبات برای توضیح دادن، روشن کردن یک مفهوم یا یک حکم، مورد نیاز است؛ توضیح برای اینکه چرا قضیه‌ای درست است، در کلاس اثبات به مفهوم منطق صوری نیست. در کلاس اثبات‌های غیررسمی، غیرصوری یا نیمه‌صوری با زبان طبیعی (معمولی) ارائه می‌شود و می‌توانند در درون خود، زیر اثبات‌های صوری یا محاسبات را به‌کار گیرند.

بعضی از معلمین خیال می‌کنند که: «اگر کلاس ریاضی است، باید ثابت کرد. اگر چیزی ثابت نمی‌شود، آن ریاضی نیست!» این تصور و باور یک پیامد مستقیم در تدریس دارد. زیرا اگر اثبات، ریاضی است و ریاضی، اثبات است، آن‌گاه مأموریت معلم در کلاس، اثبات کردن است. در این صورت، بیشتر وقت کلاس به اثبات می‌گذرد؛ اثبات‌های راستین و دقیق تا احساس کنند کلاس واقعاً وجود دارد!

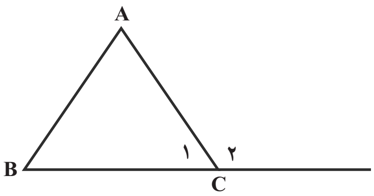
دراین دیدگاه ارائه اثبات به دانش‌آموز انگیزشی است ناخردمندانه و ناآگاهانه! اگر معلم دلیلی بهتر از اینکه «ریاضی یعنی این» ارائه ندهد، دانش‌آموز می‌داند که تنها یک اثبات دیده است، اما نه چرایی آن.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ استدلال‌های زیر را به‌ترتیب میزان اعتبارشان مشخص کنید.

الف) فردی ده مثلث مختلف را بررسی کرد و دید که در همهٔ آنها هر سه میانه در یک نقطه به‌هم می‌رسند و از این موضوع نتیجه گرفت در همهٔ مثلث‌ها، میانه‌ها در یک نقطه به هم می‌رسند.

ب) استدلال زیر نشان می‌دهد هر زاویهٔ خارجی یک مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است فرض کنیم $\hat{C}_۲$ مانند شکل زیر زاویهٔ خارجی مثلث دلخواهی مانند ABC است داریم :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\\ \hat{C}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_۱=\hat{C}_۱+\hat{C}_۲ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=\hat{C}_۲$$

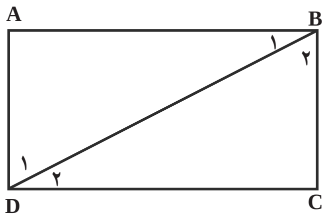
پس زاویهٔ $\hat{C}_۲$ برابر مجموع دو زاویهٔ B و A است پس از هرکدام آنها بزرگ‌تر است.

۲ــ یک نمونه از استدلال‌های درست و یک نمونه از استدلال‌های غلطی را که شنیده‌اید بنویسید.

۳ــ مسئلهٔ زیر را به همراه حل آن در نظر بگیرید. فرض، حکم و پیش دانسته‌ای که در استدلالِ حلِ آن مورد استفاده قرار گرفته‌اند بنویسید.

مسئله : مجموع زوایای یک مستطیل برابر ۳۶۰° است.

حل : مستطیلی دلخواه مانند شکل صفحهٔ بعد را درنظر می‌گیریم و یکی از قطرهای آن را (مثلاً BD) رسم می‌کنیم.



داریم : $\hat{B}=\hat{B}_۱+\hat{B}_۲$ و $\hat{D}=\hat{D}_۱+\hat{D}_۲$ پس :

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=\hat{A}+\hat{B}_۱+\hat{B}_۲+\hat{C}+\hat{D}_۱+\hat{D}_۲$$

$$=(\hat{A}+\hat{B}_۱+\hat{D}_۱)+(\hat{C}+\hat{B}_۲+\hat{D}_۲)=۱۸۰^\circ+۱۸۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

۴ــ فرض و حکم مسئله زیر را بنویسید.

ــ اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آن‌گاه زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر.

۵ــ مسئله‌ای طرح کنید که در آن حکم کلی غلطی آورده شده است و با یک مثال نقض، درستی آن را رد کنید.

۶ــ «همهٔ شکل‌های هندسی دارای حداقل یک زاویه می‌باشند».

حکم بالا درست است یا غلط؟ چگونه ادعای خود را ثابت می‌کنید؟

۷ــ استفاده از شهود چه کاربردهایی در ریاضیات دارد؟

۸ــ الف) مواردی را که تکرار یک مشاهده منجر شده که شما در مورد آن موضوع پیش‌بینی بکنید که غلط بوده است بنویسید.

ب) مواردی را که تکرار یک مشاهده منجر شده که شما در مورد آن موضوع پیش‌بینی بکنید که درست بوده است بنویسید.

۹ــ درستی یا نادرستی هریک از استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

احمد می‌داند که هر وقت باران ببارد حیاط خانه آنها خیس می‌شود.

الف) او از اتاقش بیرون آمد و دید حیاط خیس شده است و نتیجه گرفت که حتماً باران باریده است.

ب) او از اتاقش بیرون آمد و دید حیاط خیس نیست و نتیجه گرفت باران نباریده است.

۱۰ــ هر وقت دوچرخهٔ علی پنچر شود او دیر به مدرسه می‌رسد. علی دیر به مدرسه رسیده است پس حتماً دوچرخه‌اش پنچر شده است.

کدام استدلال زیر مشابه استدلال بالاست.

هر وقت معلم ریاضی به کلاس A می‌رود بچه‌های کلاس A خوشحال می‌شوند.

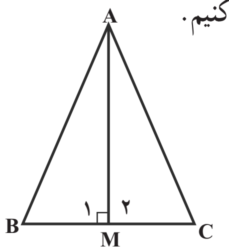
الف) بچه‌های کلاس A خوشحال نیستند پس معلم ریاضی به کلاس آنها نرفته است.

ب) بچه‌های کلاس A خوشحال‌اند پس معلم ریاضی به کلاس آنها رفته است.

ــ کدام یک ازاستدلال‌های الف و ب درست و کدام نادرست است؟

۱۱ــ آیا استدلال آورده شده برای مسئلهٔ داده شده در زیر درست است؟ علت درستی یا نادرستی آن را بنویسید.

مسئله : مثلث دلخواه $\overset{\Delta}{ABC}$ داده شده است. نشان دهید زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ باهم برابرند.

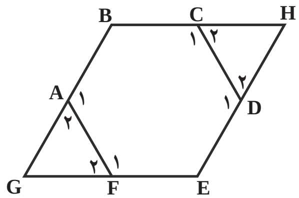


استدلال : مانند شکل مقابل از رأس A به وسط ضلع BC عمود می‌کنیم.

بنابراین داریم : $BM = CM$ و $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = ۹۰^\circ$

حال داریم :

$$\begin{cases} AM = AM & \text{مشترک} \\ \hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ \\ BM = CM \end{cases} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} A\overset{\Delta}{B}M \cong A\overset{\Delta}{C}M \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$



۱۲ـ یک شش‌ضلعی منتظم و دو مثلث ساخته شده برروی دو ضلع آن را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید. در زیر اثباتی آورده شده که نشان می‌دهد دو مثلث موردنظر همنهشت هستند. آیا این اثبات درست است؟ آیا می‌توان این مسئله را تعمیم داده و گفت مثلث‌هایی که به این طریق بر اضلاع یک چندضلعی منتظم ساخته می‌شوند با هم همنهشت هستند؟ چرا؟

ABCDEF یک شش‌ضلعی منتظم است : فرض

حکم : $G\overset{\Delta}{A}F \cong H\overset{\Delta}{C}D$

اثبات : می‌دانیم اگر دو زاویه برابر باشند، مکمل‌های آنها نیز باهم برابرند لذا :

$$\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲$$

$$\hat{F}_۱ = \hat{D}_۱ \Rightarrow \hat{F}_۲ = \hat{D}_۲$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲ \\ \hat{F}_۲ = \hat{D}_۲ \\ AF = CD \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{(ز ض ز)}} G\overset{\Delta}{A}F \cong H\overset{\Delta}{C}D$$

۱۳ــ فرض کنید مدیر یک مدرسه شرط گذاشته است که هریک از کلاس‌های آن مدرسه به شرطی به اردو برده می‌شوند که مجموع نمره‌های انضباط هر دو دانش‌آموزِ آن کلاس، ۳۴ یا بیشتر از ۳۴ شود. درکدام یک از حالت‌های زیر دانش‌آموزان یک کلاس به اردو برده می‌شوند و در کدام یک برده نمی‌شوند و در کدام یک نمی‌توان تشخیص داد برده می‌شوند یا نه؟

الف) کمترین نمره انضباط آن کلاس ۱۶ و بیشترین نمره ۲۰ بوده است.

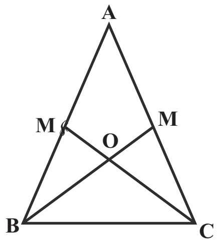
ب) کمترین نمره مربوط به فردی بوده که ۱۶ گرفته است و بقیهٔ دانش‌آموزان کلاس حداقل ۲نمره از او بیشتر گرفته‌اند.

ج) به‌جز یک دانش‌آموز بقیهٔ کلاس نمرهٔ انضباطشان ۲۰ بوده است.

د) میانگین نمره‌های انضباط کلاس ۱۹ می‌باشد.

هـ) مجموع نمره‌های انضباطِ دو نفر که هیچ کدام کمترین نمره را نگرفته‌اند ۳۴ بوده است.

۱۴ــ مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و پاره‌خط‌های BM و CM′ میانه‌اند.

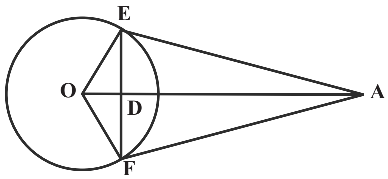


الف) ثابت کنید $\overset{\Delta}{CBM'} \cong \overset{\Delta}{BCM}$ و برابری اجزای متناظر را نتیجه‌گیری کنید.

ب) ثابت کنید $\overset{\Delta}{ACM'} \cong \overset{\Delta}{ABM}$ و برابری اجزای متناظر را نتیجه‌گیری کنید.

ج) ثابت کنید $\overset{\Delta}{BOM'} \cong \overset{\Delta}{COM}$

۱۵ــ در شکل مقابل پاره‌خط‌های AE و AF بر دایره در نقاط E و F مماسند.



الف) ثابت کنید $\overset{\Delta}{AOE} \cong \overset{\Delta}{AOF}$ و برابری اجزای متناظر را نتیجه‌گیری کنید.

ب) ثابت کنید $\overset{\Delta}{OED} \cong \overset{\Delta}{OFD}$

۱۶ــ دانش‌آموزی قصد دارد یک نقاشی از یک تصویر بزرگ به ابعاد ۵ ×۴ متر را در یک برگه به‌گونه‌ای بکشد که با تصویر واقعی متشابه باشد و عرض آن برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد. طول تصویر چقدر باید باشد؟

۱۷ــ در سؤال قبل فرض کنید دانش‌آموز موردنظر بخواهد نقاشی همان تصویر را، متشابه با آن، در برگه‌ای به ابعاد ۲۰×۱۵ بکشد. بزرگ‌ترین ابعاد ممکن از تصویر چند در چند است؟

۱۸ــ در تصویر مقابل، مستطیلی رسم کنید که یک ضلع آن پاره‌خط CE باشد و متشابه با مستطیل ABCD باشد. مستطیل حاصل چه ابعادی می‌تواند داشته باشد؟