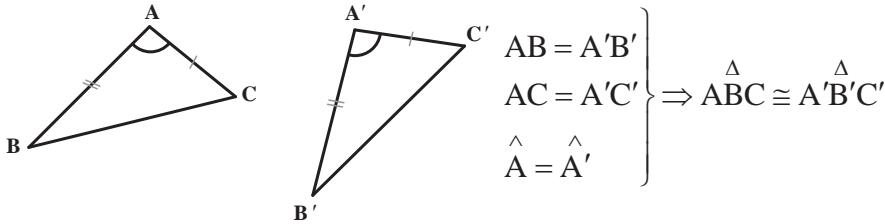


یادآوری

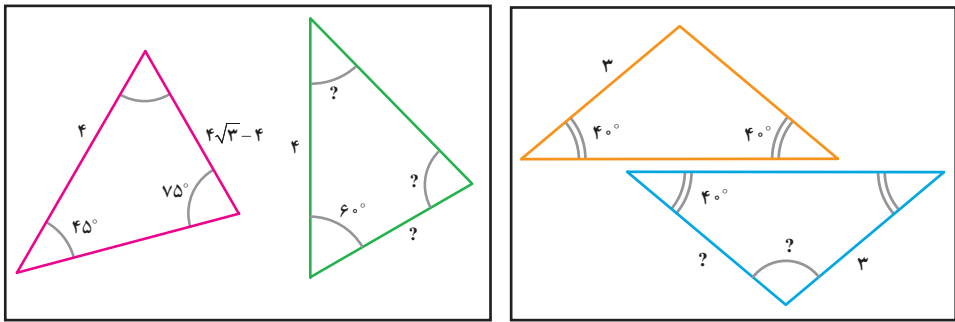
با مفهوم همنهشتی مثلث‌ها از سال گذشته آشنایی دارید. اکنون می‌خواهیم این حالت‌ها را با استفاده از نمادهای ریاضی خلاصه نویسی کنیم؛ مثلاً حالت همنهشتی (ض ض) را این‌گونه نمایش می‌دهیم:



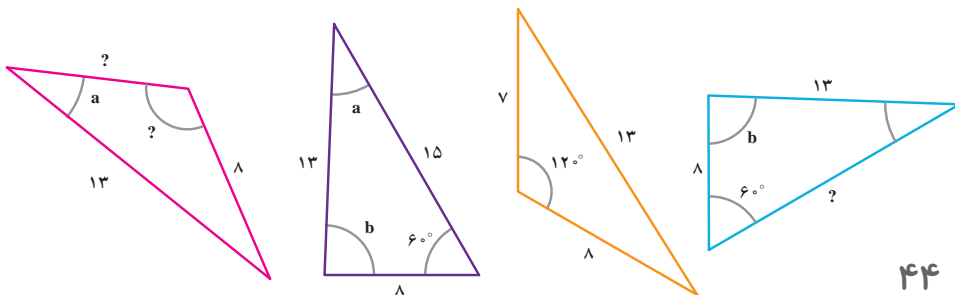
برای یادآوری، دو حالت دیگر همنهشتی مثلث‌ها و دو حالت همنهشتی ویژه مثلث‌های قائم‌الزاویه را به همین صورت بیان کنید.

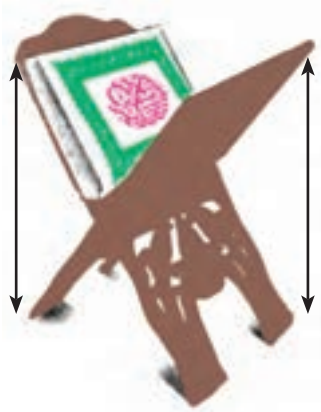
فعالیت

۱- در شکل‌های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر همنهشت‌اند. اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید:

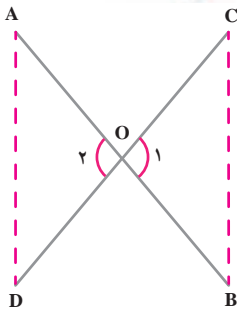


۲- در شکل زیر چهارمثلث رسم شده که دو به دو با یکدیگر همنهشت‌اند. ابتدا مثلث‌های همنهشت را مشخص کنید و سپس اندازه‌های مجهول را که با «؟» مشخص شده، تعیین نمایید (زاویه‌هایی که با یک حرف مشخص شده با هم مساوی است).



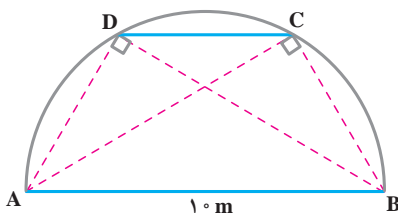
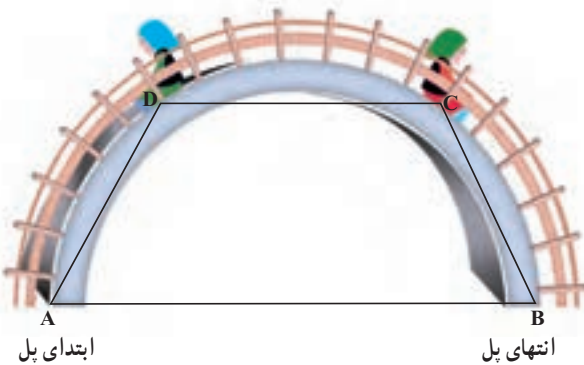


مثال : بارحل‌های قرآنی، حتماً آشنایی دارید. یک نمونه از آنها داریم که دو لایهٔ چوبی آن از وسط هم گذشته است. می‌خواهیم نشان دهیم که این تکیه گاه در هر وضعیتی که باشد، مطابق شکل، همواره فاصلهٔ دو لبهٔ کناری آن در دو طرف با هم برابر است. به زبان ریاضی، یعنی در شکل زیر، فرض مسئله این است که : $OA=OB$ و $OC=OD$ (چرا؟) و حکم این است که : $AD=BC$. زوایای \hat{O}_1 و \hat{O}_2 برابرند (چرا؟)، پس مثلث‌های OBC و OAD همنهشت هستند و از آنجا درستی حکم به دست می‌آید، یعنی :



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \\ OC = OD \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBC \cong \triangle OAD \Rightarrow AD = BC$$

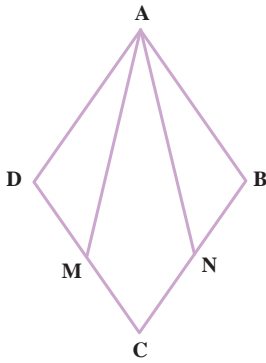
فعالیت



در نزدیکی منزل ترانه و شهرزاد، پارکی هست که در آن یک پل فلزی به شکل نیم‌دایره هست که بچه‌ها برای بازی از پله‌های آن بالا می‌روند. می‌دانیم فاصلهٔ ابتدای پل (نقطهٔ A) از انتهای آن (نقطهٔ B) ۱۰ متر است. ترانه روی پلهٔ C نشسته است که از انتهای پل ۶ متر فاصله دارد (BC=۶) و شهرزاد روی پلهٔ D نشسته است که از ابتدای پل همین مقدار فاصله دارد. آنها حدس می‌زنند که باید فاصله‌شان از پایه‌های مقابل برابر باشد؛ یعنی $AC=BD$. درستی حدس آنها را به دو روش ثابت کنید.

- ۱- نشان دهید زاویه‌های \hat{C} و \hat{D} در شکل، قائمه است. طول‌های AC و BD را به کمک قضیه فیثاغورس محاسبه کنید و نشان دهید: $AC=BD$
- ۲- به کمک همنهستی مثلث‌های ACB و ADB، نشان دهید $AC=BD$.

فعالیت



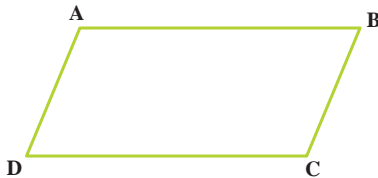
در شکل مقابل ABCD لوزی است و نقطه‌های M و N وسط‌های اضلاع CD و CB هستند. می‌خواهیم نشان دهیم $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

- ۱- با توجه به ویژگی‌های لوزی، تساوی‌های زیر را کامل کنید:
- فرض $\begin{cases} AD = AB = \text{---} = \text{---} & , \quad BN = \text{---} \\ \hat{A} = \text{---} & , \quad \hat{B} = \text{---} & , \quad DM = \text{---} \end{cases}$
- حکم: $\triangle ADM \cong \triangle ABN$

۲- با توجه به نتیجه قسمت (۱) و تساوی‌های قسمت اول ثابت کنید مثلث‌های ADM و ABN همنهست‌اند.

۳- حال با توجه به همنهستی دو مثلث ADM و ABN، اجزای متناظر آنها را بنویسید.

کار در کلاس

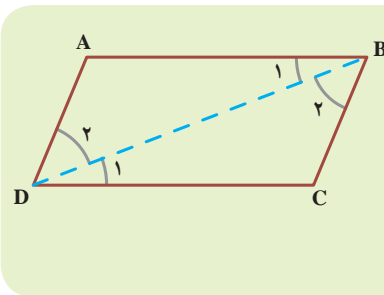


می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر متوازی‌الاضلاع مانند شکل روبه‌رو، ضلع‌های مقابل، همواره با هم برابر است. مفروضات و داده‌های مسئله چیست؟ تمام آنها را بنویسید؛ حکم مسئله چیست؟ برای حل این مسئله در ادامه، نظر چند دانش‌آموز را ببینید و با توجه به آنها به سؤال‌ها پاسخ دهید.

شهرزاد: معلوم است که ضلع‌های روبه‌رو با هم مساوی است، با چشم هم می‌توان دید!

شبنم: در تعریف متوازی‌الاضلاع، برابری ضلع‌های روبه‌رو را می‌دانستیم. علاوه بر آن با اندازه‌گیری هم می‌توانیم این موضوع را نشان دهیم.

- آیا می‌توانیم در حل مسائل هندسه فقط به چشم‌هایمان اعتماد کنیم؟ چرا؟
- به تعریف متوازی‌الاضلاع در کتاب سال گذشته مراجعه کنید. آیا برابری اضلاع مقابل در این تعریف وجود داشت؟ آیا اگر با اندازه‌گیری اضلاع مقابل، برابری آنها را ببینیم، درستی حکم را ثابت کرده‌ایم؟ چرا؟



ترانه: به نظر من باید دو مثلث همنهستی بیابیم و با اثبات همنهستی آنها به برابری اضلاع مقابل در متوازی‌الاضلاع برسیم، اما در شکل دو مثلث نداریم، پس با اضافه کردن یک خط، یعنی یکی از قطر‌ها، دو مثلث ایجاد می‌کنیم.

اثبات را به صورت زیر کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \text{مورب و} \quad BD \Rightarrow \text{---} = \text{---} \\ BD = \text{---} \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle \cong \triangle \text{ (ض ز ض)}$$

با توجه به همنهستی دو مثلث ABD و CBD، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

دیدیم که $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ بنابراین داریم: $AD = \text{---}$

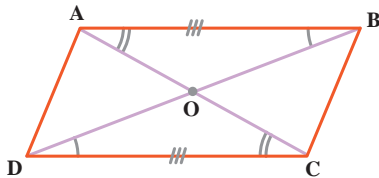
و $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$ بنابراین داریم: $AB = \text{---}$

- چرا برای اثبات همنهستی مثلث‌های ایجاد شده، نمی‌توانیم از حالت‌های (ض ض ض) و (ض ض ض) استفاده کنیم؟

- با توجه به مباحث درس قبل (هندسه و استدلال)، بگویید آیا می‌توانستیم همین نتیجه را با رسم قطر AC به دست آوریم؟

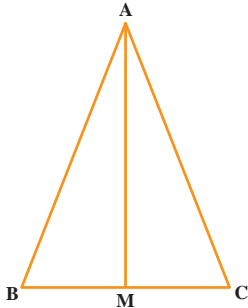
- از همنهستی مثلث‌های ایجاد شده در متوازی‌الاضلاع به جز برابری ضلع‌های مقابل، نتیجه دیگری هم درباره زاویه‌های متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید؛ این نتیجه را بنویسید.
- در هر متوازی‌الاضلاع ————— روبه‌رو، مساوی‌اند.

تمرین

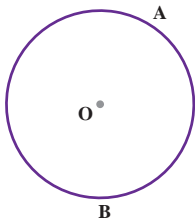


۱- ثابت کنید قطرهاى هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OA = OC$ و $OB = OD$.

۲- ثابت کنید در هر مستطیل، قطرها با یکدیگر برابرند. (مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است!)



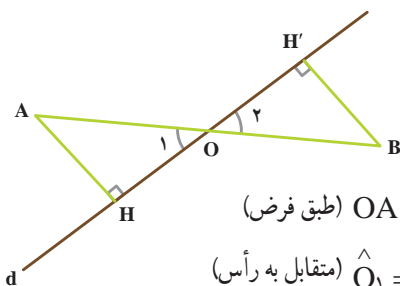
۳- در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانه AM را رسم کرده‌ایم. مثلث‌های AMB و AMC به چه حالتی همنهست هستند؟ چرا AM نیمساز زاویه \hat{A} است؟ چرا AM بر BC عمود است؟



۴- از نقطه M خارج از دایره، دو مماس MA و MB را بردارید. آیا اندازه این دو مماس با هم برابر است؟ درستی ادعای خود را نشان دهید. (راهنمایی: از مرکز دایره به نقطه‌های A، M و B وصل کنید.)

۵- در شکل مقابل خط d از وسط پاره خط $\overset{\circ}{M}$ AB گذشته و A و B از d به یک فاصله‌اند

($AH = BH'$) ثابت کنید $OH = OH'$. در مورد درستی یا نادرستی استدلال زیر برای تساوی $OH = OH'$ بحث کنید:

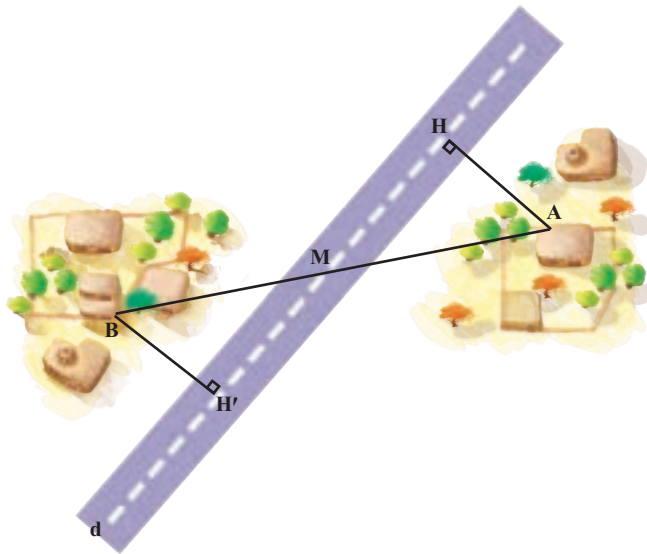


$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \text{ (فرض)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (مقابل به رأس)} \\ AH = BH' \text{ (فرض)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(ض ز ض)} \\ \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OBH' \\ \Rightarrow OH = OH' \end{array}$$

درس چهارم: حل مسئله در هندسه

برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی وجود ندارد؛ اما می‌توان مراحل را مشخص کرد که برای هر مسئله هندسه، آنها را توصیه می‌کنند. این مراحل را در حل یک مثال کاربردی در عمل معرفی می‌کنیم.

مثال: دو روستای A و B با یک جادهٔ خاکی مستقیم به هم وصل هستند. در آن منطقه یک جادهٔ آسفالتی مستقیم ساخته شد که دو روستا در دو طرف آن واقع شد و جادهٔ آسفالتی درست از وسط جادهٔ خاکی عبور می‌کرد. ادارهٔ راه‌سازی تصمیم گرفته است که از هر روستا، یک جادهٔ آسفالتی با کوتاه‌ترین فاصلهٔ ممکن تا جادهٔ اصلی بسازد. بنابراین از روستای A یک جادهٔ مستقیم، عمود بر این جادهٔ اصلی و به طول چهار کیلومتر ساخته شد. برای برآورد هزینه‌های ساخت جادهٔ دیگر از روستای B، مهندسان پیش‌بینی کرده‌اند که فاصلهٔ روستای B از جاده نیز همین مقدار است: یعنی $AH=BH'$.



قدم‌های حل مسئله

- ۱- صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل دهندهٔ آن را بشناسید. در این مسئله با مفاهیمی همچون خط، پاره خط و فاصلهٔ نقطه تا خط سروکار داریم. آیا با آنها آشنایی دارید؟
- ۲- اگر مسئله فاقد شکل است با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید. در اینجا شکل این مسئله را با توجه به طرح بالا رسم کنید.

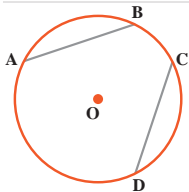
۳- داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص داده و در یک جدول بنویسید. در اینجا فرض‌های اصلی این است که M وسط AB است؛ یعنی $MA=MB$ و AH و BH' بر d عمود و حکم این است که: $AH=BH'$

فرض	$MA=MB$, $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$
حکم	$AH=BH'$

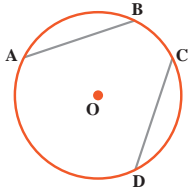
۴- برای رسیدن از فرض به حکم راه حلی پیدا کنید. روش‌های مختلفی برای این کار هست که آنها را به مرور می‌آموزید. یکی از راه‌های اثبات برابری دو پاره خط، استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت است. در این شکل، کدام دو مثلث، برای این منظور مناسب است؟
با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی کامل کنید:

$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \text{ (طبق فرض)} \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \\ (\text{---}) \hat{\text{---}} = \hat{\text{---}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(وتر و یک زاویه حاده)} \\ \triangle \cong \triangle \Rightarrow AH = BH' \end{array}$$

فعالیت

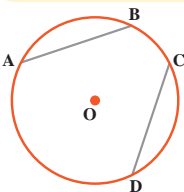


در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی است.
۱- نشان دهید کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی است.

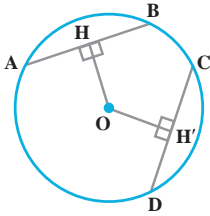


۲- در شکل مقابل کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی است. نشان دهید وترهای AB و CD با هم برابرند.

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.



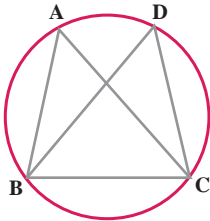
۳- از سال گذشته می‌دانید خطی که از مرکز دایره بر هر وتر عمود شود، وتر را نصف می‌کند. با توجه به این موضوع، نشان دهید مرکز دایره از دو وتر مساوی به یک فاصله است.



۴- در شکل مقابل می دانیم مرکز دایره از دو وتر AB و CD به یک فاصله است ($OH=OH'$). مرکز دایره را به A و D وصل کنید و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید که طول های دو وتر AB و CD با هم برابر است :

$$\left. \begin{array}{l} OA = OD = \text{---} \\ \hat{H} = \hat{H}' = \text{---} \\ (\text{---})OH = OH' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (\text{---}) \\ \triangle OAH \cong \triangle \text{---} \Rightarrow AH = \text{---} \Rightarrow \\ \sphericalangle AH = \sphericalangle \text{---} \Rightarrow AB = CD \end{array}$$

کار در کلاس



در شکل مقابل می دانیم $AB=CD$ ،

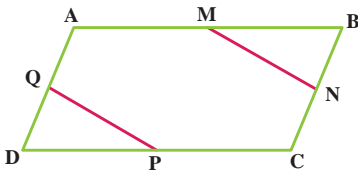
۱- چرا $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ ؟

۲- جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \widehat{BC} = \widehat{BC} \end{array} \right. \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{CD} + \widehat{BC} \Rightarrow \text{---} = \text{---}$$

۳- چرا $AC=BD$ ؟

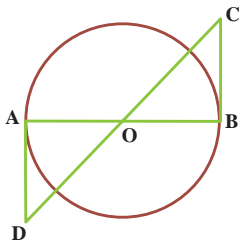
تمرین



۱- در شکل مقابل متوازی الاضلاع ABCD متوازی الاضلاع

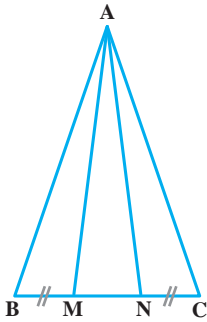
است و M و N و P و Q وسط های اضلاع

متوازی الاضلاع است، ثابت کنید : $MN=PQ$

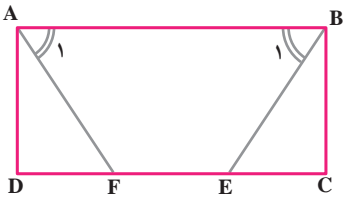


۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره

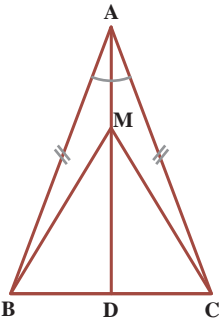
مماس است، نشان دهید که BC و AD برابرند.



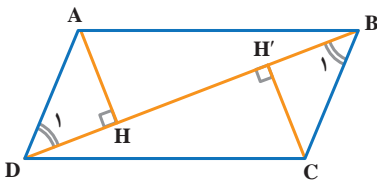
۳- در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارد که $BM=NC$. نشان دهید مثلث AMN هم متساوی الساقین است.



۴- در مستطیل $ABCD$ ، پاره خط‌های AF و BE طوری رسم شده که دو زاویه A_1 و B_1 برابرند، ثابت کنید AF و BE مساوی اند.



۵- نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله هر نقطه دلخواه روی نیمساز زاویه رأس از دو سر قاعده، برابر است: $MB=MC$.



۶- در شکل مقابل متوازی الاضلاع $ABCD$ است و AH و CH' فاصله‌های نقاط A و C از قطر BD است. دلیل برابری دو زاویه B_1 و D_1 را توضیح دهید. نشان دهید مثلث‌های ADH و BCH' همنهشتند و از آنجا برابری AH و CH' را نتیجه بگیرید، سپس جمله زیر را کامل کنید:

در هر متوازی الاضلاع، هر دو رأس مقابل، از ————— بین آنها به یک —————.