بخش دوم

فصل سوم

تعمیم حد

هدف کلی

تعیین حد تابع وقتی متغیر به $+\infty$ (یا $-\infty$) میل می‌کند. همچنین بررسی تابع‌هایی که حد آن‌ها، وقتی x به یک عدد حقیقی یا $\pm\infty$ میل می‌کند، $+\infty$ یا $-\infty$ است.

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ حد در بینهایت را تعریف کند.

۲ــ حد بینهایت برای یک تابع را تعریف کند.

پیش‌آزمون (۳)

۱ــ فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$. اگر x برابر عددهای $۲+۱$ ، $۲+\frac{۱}{۲}$ ، ... یا $۲+\frac{۱}{n}$ باشد مقدار f(x)، ۱، ۲، ...، یا n خواهد شد. مثلاً :

$$f(۲+\frac{۱}{n})=\frac{۱}{(۲+\frac{۱}{n})-۲}=\frac{۱}{\frac{۱}{n}}=n$$

با توجه به شکل ۵۱ــ۲ وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود $۲+\frac{۱}{n}$ به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؟ در چنین حالتی برای $f(۲+\frac{۱}{n})$ چه اتفاقی می‌افتد؟

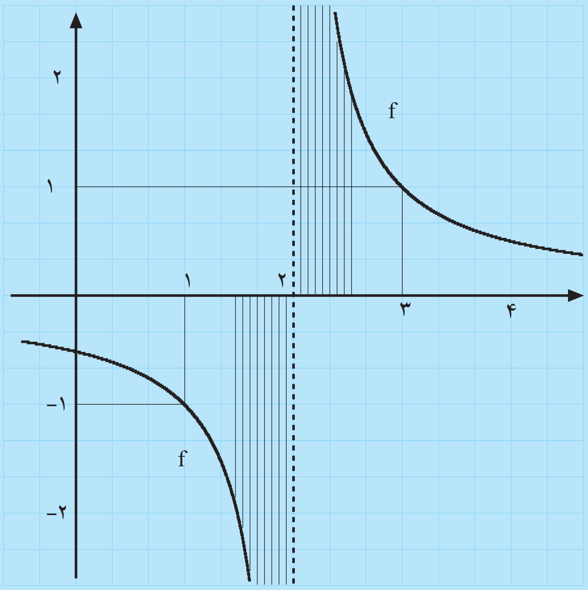
۲ــ اگر در سؤال ۱، x به‌صورت $۲-\frac{۱}{n}$ و با افزایش n، به عدد ۲ نزدیک شود $f(۲-\frac{۱}{n})$ چه وضعیتی دارد؟ توجه کنید که :

$$f(۲-\frac{۱}{n})=\frac{۱}{(۲-\frac{۱}{n})-۲}=\frac{۱}{-\frac{۱}{n}}=-n$$

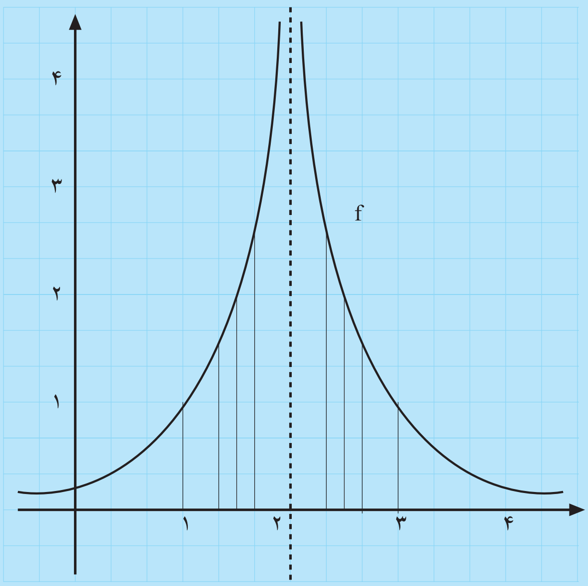
۳ــ اگر $f(x)=\frac{۱}{(x-۲)^۲}$ و متغیر x به‌صورت $۲+\frac{۱}{n}$ یا $۲-\frac{۱}{n}$ ، با افزایش n، به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر شوند وضعیت f(x) چگونه خواهد بود؟ (راهنمایی : نشان دهید که $f(۲-\frac{۱}{n})=f(۲+\frac{۱}{n})=n^۲$) (شکل ۵۲ــ۲).

۴ــ فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$ و x عددهای ۱، ۴، ۹، ۱۶، ...، $n^۲$ را اختیار کند، مقدار f(x) چه عددهایی خواهد بود؟ وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر شود f(x) چگونه تغییر می‌کند؟ نمودار $y=\sqrt{x}$ را در $[۰\ ,\ +\infty)$ رسم کنید و رفتار این تابع را، وقتی x بزرگ می‌شود، ملاحظه کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۵۱ــ۲



شکل ۵۲ــ۲

۳ــ۲ــ تعمیم حد

تاکنون در حدهایی که مورد بررسی قرار داده‌ایم، عدد a و عدد L هر دو، عدد حقیقی بوده‌اند. در این قسمت می‌خواهیم ببینیم اگر a یا L بینهایت شوند چگونه باید عمل کرد.

فعالیت ۱۰ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}\ (x\neq ۰)$، را درنظر بگیرید.
(به مثال روبه‌رو نیز توجه کنید.)

۱) جدول ۲۰ــ۲ را کامل کنید.

۲) در جدول ۲۰ــ۲، x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) با نزدیک شدن x به صفر، f(x)ها چگونه تغییر می‌کنند؟

۴) آیا می‌توان گفت که اگر x به عدد صفر بسیار نزدیک باشد، f(x) می‌تواند از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر شود؟

۵) با توجه به آنچه در مورد $+\infty$ می‌دانید، درست است که بگوییم حد f(x)، وقتی $x\to ۰$، $+\infty$ است؟

۶) آیا درست است که بنویسیم؟ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}=+\infty$

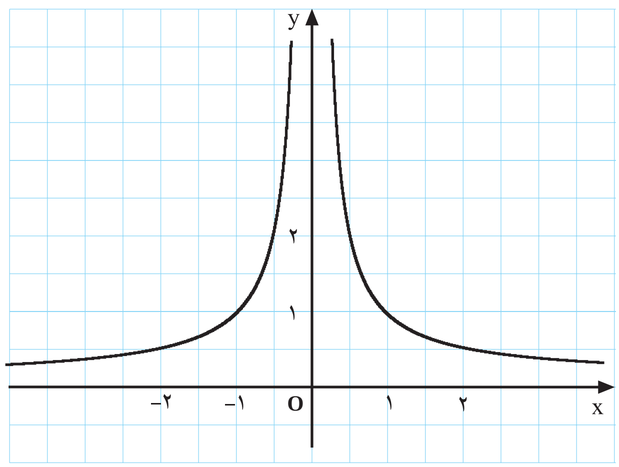
۷) نمودار $y=f(x)$ در شکل ۵۳ــ۲ رسم شده است آیا از این نمودار هم معلوم می‌شود که وقتی x به عدد صفر میل می‌کند f(x) به $+\infty$ میل می‌کند؟

۸) آیا درست است که بگوییم :

> $\frac{۱}{x^{۲}}$ را هرچه بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم به شرط آن‌که x را به‌قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

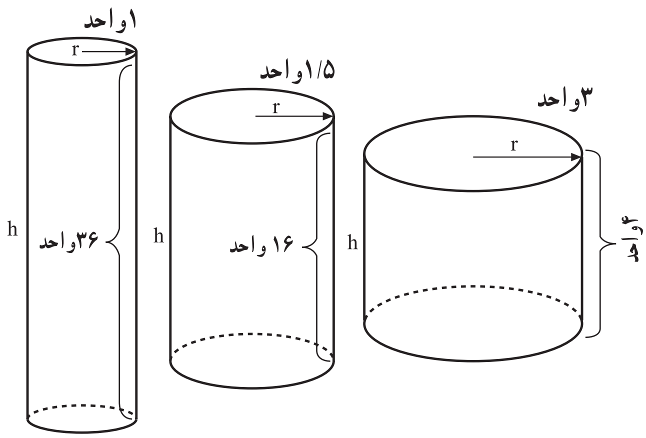
جدول ۲۰ــ۲

x	...	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	...	۰	...	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	...
$f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$	...	۴								۴	...



شکل ۵۳ــ۲

مثال: فرض کنید استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع h داریم که حجم آن عدد ثابت ۱۰۸ است. یعنی $\pi r^{۲}h=۱۰۸\Rightarrow r^{۲}h\simeq ۳۶$ واضح است که با تغییر شعاع، ارتفاع استوانه تغییر خواهد کرد. شکل ۵۴ــ۲ این بستگی را نشان می‌دهد.



شکل ۵۴ــ۲

فعالیت ۱۱ ــ ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x}\,(x\neq ۰)$ ، را درنظر بگیرید.

۱) جدول ۲۱ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۱ ــ ۲

x	…	$-۰/۲$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	…	۰	…	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	…
$f(x)=\frac{۱}{x}$	…			-۱۰۰						۱۰۰۰			…

۲) در جدول ۲۱ــ۲ متغیر x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) با نزدیک شدن x به عدد صفر مقدارهای f(x) چگونه تغییر می‌کنند؟

۴) آیا می‌توان گفت وقتی x از چپ به عدد صفر نزدیک می‌شود f(x) به $-\infty$ میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}=\cdots$$

۵) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

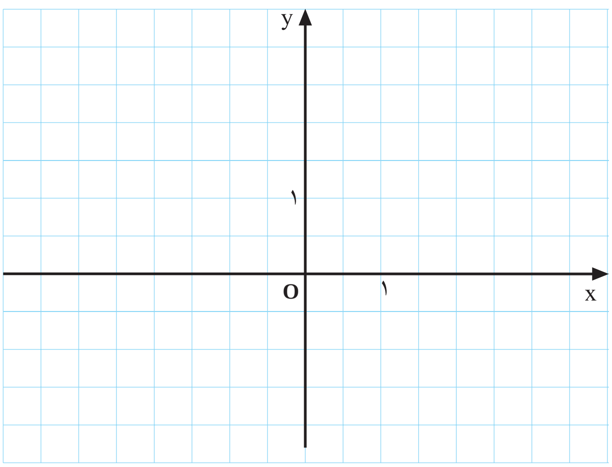
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=+\infty$$

۶) جدول ۲۲ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۲ ــ ۲

x	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
f(x)					تعریف نشده				

۷) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را در دستگاه شکل ۵۵ ــ ۲ رسم کنید.



شکل ۵۵ ــ ۲

۸) به کمک نمودار $f(x)=\frac{۱}{x}$ رفتار این تابع را، وقتی $x\to ۰$ ، بررسی کنید.

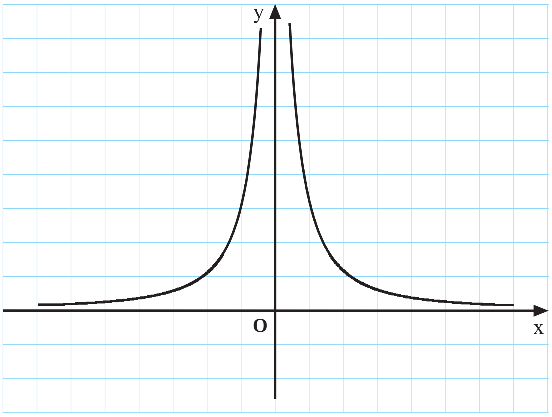
۹) آیا نمودار نیز درستی نتایج مرحله‌های ۵ و ۶ را تأیید می‌کند؟

۱۰) آیا تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، وقتی $x\to ۰$ حد دارد؟ چرا؟

> تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، وقتی $x\to ۰$ ، حد ندارد.

۱ــ۳ــ۲ــ تعریف (حدّ بینهایت): فرض کنید تابع f دربازه‌ی باز I که شامل عدد a است، مگر احتمالاً در a، تعریف شده باشد.

الف) حد تابع f، وقتی $x \to a$ ، $+\infty$ است هرگاه بتوانیم f(x) را از هر عدد بزرگی، بزرگ‌تر کنیم، به شرط آن‌که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.



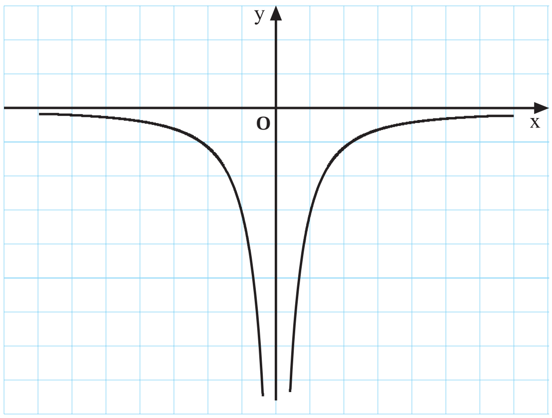
شکل ۵۶ــ۲

ب) حد تابع f، وقتی $x \to a$ ، $-\infty$ است هرگاه بتوانیم f(x) را از هر عدد منفی با قدر مطلق بزرگ، کوچک‌تر کنیم، به شرط آن که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

مثلاً،

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}=+\infty$$ (شکل ۵۶ــ۲)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{-۱}{x^{۲}}=-\infty$$ (شکل ۵۷ــ۲)



شکل ۵۷ــ۲

مثال‌ها

۱. نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{(x-۱)^{۲}}=+\infty$$

حل ۱: فرض کنید $X=x-۱$ واضح است که $x\to ۱$ معادل است با $X\to ۰$ بنابراین،

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{(x-۱)^{۲}}=\lim_{X\to ۰}\frac{۱}{X^{۲}}=+\infty$$

۲. نشان دهید که

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{-۴}{(۲x+۱)^{۲}}=-\infty$$

حل ۲: می‌دانیم که $۲x+۱=۲(x+\frac{۱}{۲})$ و $x\to\frac{-۱}{۲}$ معادل است با $X=x+\frac{۱}{۲}\to ۰$ بنابراین،

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{-۴}{(۲x+۱)^{۲}}=\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}}\frac{-۴}{۴(x+\frac{۱}{۲})^{۲}}=$$

$$\lim_{X\to ۰}\frac{-۱}{X^{۲}}=-\infty$$

تمرین ۸ ــ ۲

حدهای زیر را بررسی کنید، در صورت وجود حد نامتناهی، آن حد را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{-۱}{(x-۲)^۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۳}} \frac{۹}{(۱-۳x)^۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{-۱}{x-۴}$ ت) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{۲x+۱}$

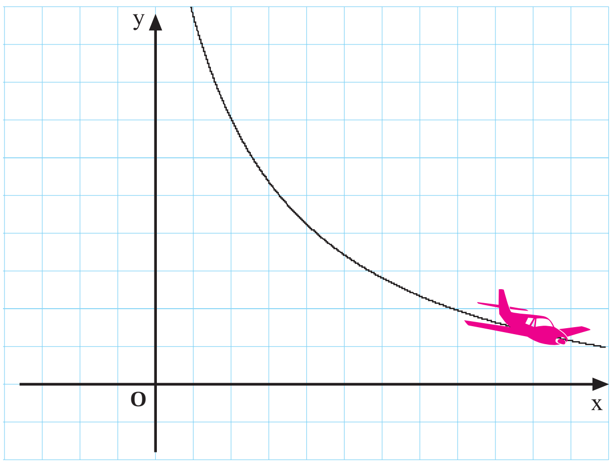
۲ــ۳ــ۲ــ حد در بینهایت: اینک می‌خواهیم مفهوم حد یک تابع را، وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، بررسی کنیم.

فعالیت ۱۲ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر را درنظر می‌گیریم :

$$f(x) = \frac{۱}{x}, \quad x \neq ۰$$

می‌خواهیم رفتار این تابع را وقتی $x \to +\infty$ بررسی کنیم.



شکل ۵۸ ــ ۲

۱) جدول ۲۳ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۳ ــ ۲

x	...	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
$f(x)=\frac{۱}{x}$	...						...

۲) در جدول ۲۳ــ۲ متغیر x چگونه تغییر کرده است؟

۳) وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند، f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

۴) آیا با میل کردن x به $+\infty$ ، f(x) به صفر میل می‌کند؟

۵) آیا رابطه‌ی زیر برقرار است؟

$$(*) \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

۶) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ رسم کنید.

۷) با استفاده از نمودار $y=\frac{۱}{x}$ حد $\frac{۱}{x}$ را وقتی $x\to+\infty$ بررسی کنید.

۸) آیا نمودار هم تساوی رابطه‌ی(*) را تأیید می‌کند؟

کار در کلاس ۴ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x}\,,(x\neq۰)$ را درنظر می‌گیریم.

۱) جدول ۲۴ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۴ــ۲

x	...	-۱۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰
$f(x)=\frac{۱}{x}$	...						

۲) در جدول ۲۴ــ۲ متغیر x چگونه تغییر می‌کند؟

۳) آیا x به $-\infty$ میل می‌کند؟

۴) با میل کردن x به $-\infty$ ، $f(x)$ چگونه تغییر کرده است؟

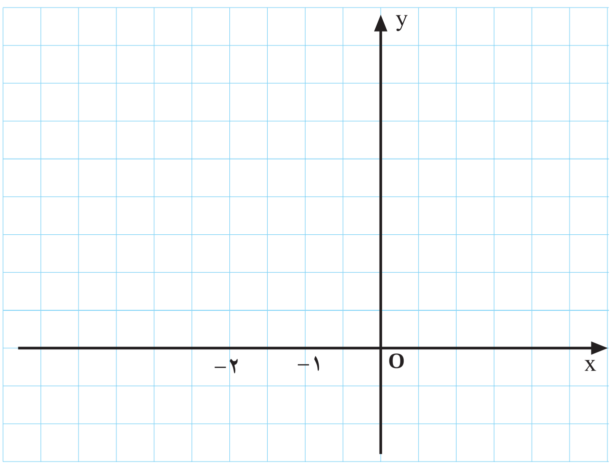
۵) آیا $f(x)$ به صفر میل کرده است؟

۶) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

۷) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ و در شکل ۵۹ــ۲ رسم کنید.

۸) آیا نمودار هم نشان می‌دهد وقتی $x\to-\infty$ ، $f(x)$ به صفر میل می‌کند؟



شکل ۵۹ــ۲

بنابراین آنچه مورد بررسی قرار گرفت :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}}$$

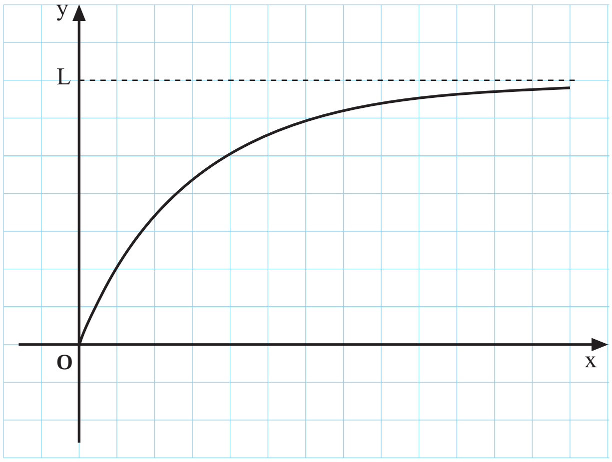
۳ـ۳ـ۲ـ تعریف (حد در بینهایت)

الف) حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$:

فرض کنید تابع f برای $x > a$ تعریف شده باشد. گوییم حد $f(x)$ وقتی $x \to +\infty$ مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم $f(x)$ را هر چه‌قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را به قدر کافی بزرگ اختیار کرده باشیم.

ب) حد یک تابع وقتی $x \to -\infty$:

فرض کنید تابع f برای $x < a$ تعریف شده باشد. گوییم حد $f(x)$، وقتی $x \to -\infty$ ، مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم $f(x)$ را هرچه‌قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را از هر عدد منفی با قدر مطلق بزرگ، کوچکتر کنیم (شکل ۲ـ۶۰).



شکل ۲ـ۶۰

مثلاً،

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

لذا، اگر قرار دهیم $t=\frac{۱}{x}$ آن‌گاه (جدول‌های ۲ـ۲۵ و ۲ـ۲۶ ملاحظه شوند)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=\lim_{t\to ۰^+} t=۰$$

همچنین،

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=\lim_{t\to ۰^-} t=۰$$

از این مطلب می‌توان استفاده کرد و بسیاری از حدهای کسری را حساب کرد.

جدول ۲ـ۲۵

x	$t=\frac{۱}{x}$
۱	۱
۱۰	۰/۱
۱۰۰	۰/۰۱
۱۰۰۰	۰/۰۰۱
۱۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۱
۱۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۱

$x \longrightarrow +\infty$
$t \longrightarrow ۰^+$

جدول ۲ـ۲۶

x	$t=\frac{۱}{x}$
−۱	−۱
−۱۰	−۰/۱
−۱۰۰	−۰/۰۱
−۱۰۰۰	−۰/۰۰۱
−۱۰۰۰۰	−۰/۰۰۰۱
−۱۰۰۰۰۰۰	−۰/۰۰۰۰۰۱
$-۱۰^{۱۰}$	$-۱۰^{-۱۰}$

$x \longrightarrow -\infty$
$t \longrightarrow ۰^-$

الف)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{۳+۴x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(۲-\frac{۱}{x})}{x(\frac{۳}{x}+۴)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲-\frac{۱}{x}}{\frac{۳}{x}+۴}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۲-t}{۳t+۴}=\frac{۲-۰}{۰+۴}=\frac{۱}{۲}$$

ب)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{x^۳+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{۱+\frac{۱}{x^۳}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t}{۱+t^۳}$$

$$=\frac{۰}{۱+۰}=۰$$

پ) ممکن است حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$ و یا $x \to -\infty$ عددی حقیقی نباشد بلکه $+\infty$ یا $-\infty$ باشد. به فعالیت زیر توجه کنید.

فعالیت ۱۳ـ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۵$ را درنظر می‌گیریم.

۱) مقدارهای $f(x)$ را، برای xهایی که در جدول (۲۷ـ۱) داده شده است، محاسبه کنید و در جدول بنویسید.

جدول ۲۷ـ۲

x	...	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
$f(x)=۲x+۵$	...									۲۰۰۰۰۵	...

۲) هنگامی که متغیر x به قدر کافی بزرگ اختیار شود مقدار $f(x)$ چگونه است؟

۳) آیا با میل کردن x به $+\infty$، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند؟

۴) آیا با میل کردن x به $-\infty$، $f(x)$ هم به $-\infty$ میل می‌کند؟

۵) آیا رابطه‌های زیر صحیح است؟

$$\lim_{x\to+\infty}(۲x+۵)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(۲x+۵)=-\infty$$

کار در کلاس ۵ ـ۲

فعالیت ۱۳ـ۲ را برای تابع $f(x)=-۳x+۵$ تکرار کنید.

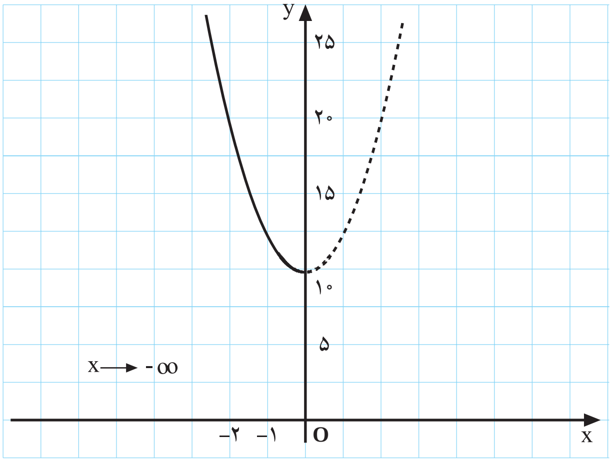
فعالیت ۱۴ـ۲

تابع $f(x)=۲x^۲+۱۰$ را درنظر بگیرید.

۱) جدول ۲۸ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۸ـ۲

x	...	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	...
$f(x)=۲x^۲+۱۰$	...						...



شکل ۶۱ــ۲

۲) وقتی $x \to -\infty$ مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟

۳) آیا وقتی $x \to -\infty$، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند؟

۴) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

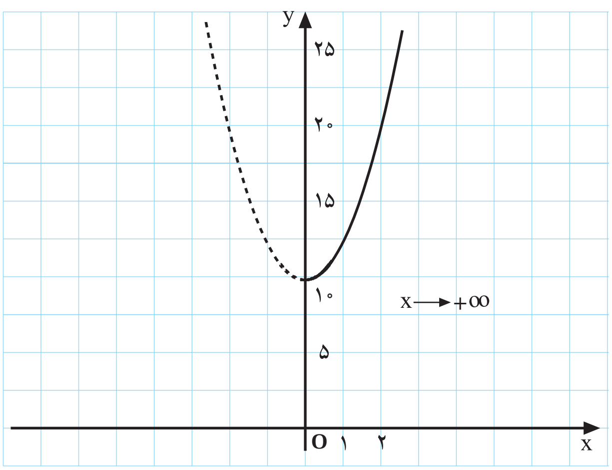
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (۲x^{۲}+۱۰) = +\infty$$

۵) جدول ۲۹ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۹ــ۲

	x ⟶ ...	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	...
$f(x)=۲x^{۲}+۱۰$	...				۲۰۰۱۰		...

۶) وقتی $x \to +\infty$ مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟



شکل ۶۲ــ۲

۷) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (۲x^{۲}+۱۰) = +\infty$$

۸) آیا درست است که بنویسیم؟

$$\lim_{x \to \pm\infty} (۲x^{۲}+۱۰) = +\infty$$

(منظور از $x \to \pm\infty$ آن است که x به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند.)

با توجه به فعالیت‌های ۱۲ـ۲، ۱۳ـ۲ و ۱۴ـ۲ می‌توان نشان داد که اگر m یک عدد صحیح مثبت و a عددی حقیقی و غیرصفر باشد آن‌گاه :

$$\lim_{x\to+\infty} ax^m = \begin{cases} +\infty \,, & a>۰ \\ -\infty \,, & a<۰ \end{cases}$$

(این حکم برای هر عدد حقیقی مثبت m نیز برقرار است).

و همچنین

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^m} = ۰ \qquad (a\in\mathbb{R})$$

(وقتی $x\to+\infty$، حکم برای هر عدد حقیقی مثبت m نیز برقرار است).

ضمناً، اگر m عدد مثبت زوج باشد داریم :

$$\lim_{x\to-\infty} ax^m = \begin{cases} +\infty \,, & a>۰ \\ -\infty \,, & a<۰ \end{cases}$$

ولی اگر m عدد مثبت فرد باشد داریم :

$$\lim_{x\to-\infty} ax^m = \begin{cases} -\infty \,, & a>۰ \\ +\infty \,, & a<۰ \end{cases}$$

واضح است که

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^{۰} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^{۰}} = a$$

از مطالب بالا برای تعیین حد عبارت‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای هستند استفاده می‌شود.

در زیر، مثال‌هایی در این مورد ملاحظه می‌کنید.

مثال‌های حل شده

الف) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{۲x^{۵}-x+۷}{x^{۳}-۲x^{۲}+۳x} = ?$

حل: در صورت و مخرج کسر از جمله‌ی با بزرگ‌ترین درجه فاکتور می‌گیریم :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x^{۵}-x+۷}{x^{۳}-۲x^{۲}+۳x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x^{۵}(۱-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{x^{۴}}+\frac{۷}{۲}\cdot\frac{۱}{x^{۵}})}{x^{۳}(۱-\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x^{۲}})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (۲x^{۲}) = +\infty$$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^{۴}-۷x^{۲}+۱}{x-۳x^{۲}} = ?$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{۴}-۷x^{۲}+۱}{x-۳x^{۲}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{۴}(۱-\frac{۷}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۴}})}{-۳x^{۲}(-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{x}+۱)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{۱}{۳}x^{۲} = -\infty$$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^{۲}-x^{۵}+x}{۱+x^{۷}-x^{۳}} = ?$

حل: مانند دو مثال قبل عمل می‌کنیم :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{۲}-x^{۵}+x}{۱+x^{۷}-x^{۳}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^{۵}(-\frac{۱}{x^{۳}}+۱-\frac{۱}{x^{۴}})}{x^{۷}(\frac{۱}{x^{۷}}+۱-\frac{۱}{x^{۴}})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-۱}{x^{۲}} = ۰$$

ت) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{۳x^{۵}-x^{۴}+x^{۲}+۳}{۲-۲x^{۵}+x^{۴}-x^{۲}} = ?$

حل:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x^{۵}-x^{۴}+x^{۲}+۳}{۲-۲x^{۵}+x^{۴}-x^{۲}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x^{۵}(۱-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{x^{۳}}+\frac{۱}{x^{۵}})}{-۲x^{۵}(-\frac{۱}{x^{۵}}+۱-\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{x^{۳}})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-\frac{۳}{۲}) = -\frac{۳}{۲} = -۱/۵$$

ث) عدد a را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-ax^{۲}+۱}{۲x^{۲}+۱} = ۳$$

حل:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-ax^{۲}+۱}{۲x^{۲}+۱} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{۱}{x}-a+\frac{۱}{x^{۲}}}{۲+\frac{۱}{x^{۲}}} = -\frac{a}{۲}$$

پس باید $\frac{-a}{۲}=۳$ و یا $a=-۶$.

تمرین ۹ــ۲

۱) حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x+1}{x+2}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x-2}{5x^2+2}$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+x-3}{3x^2+7x-1}$

ت) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x+5}{-\frac{1}{2}x+6}$

ث) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+1}{x-2x^3}$

ج) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-x^2+1)$

۲) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^m+x^2+1}{x^2+3x-1}$ داده شده است. عدد m را چنان بیابید که:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2$$

(**راهنمایی:** عبارت‌های صورت و مخرج کسر مساوی $f(x)$ را بر x^2 تقسیم کنید.)

۳) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است.
$f(x)=\frac{ax^2+3x^2-1}{x^2-2x+4}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-4$$

۴) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است:
$f(x)=\frac{x^2-3x+7}{x^m+x^2-3}$ حدود m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

۵) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است:
$f(x)=\frac{x^n-2x^{n-1}+5}{x^3-2x^2+7x+1}$ حدود n را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

۶) فرض کنید $f(x)=\frac{3x^m+1}{x^2+x+1}$. m را چنان تعیین کنید که

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ اگر $f(x)=\frac{x^{۲}-۲x-۳}{x^{۲}-۹}$ در $x=۳$ پیوسته باشد، مقدار $f(۳)$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر m عددی طبیعی باشد و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{m}+x+۱}{x^{۲}+۲}=+\infty$، کمترین مقدار m چیست؟

۳ــ اگر n عددی طبیعی باشد و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x^{n}-۳x+۱۴}{x^{۳}+۶}=۰$ ، بیشترین مقدار n چیست؟

۴ــ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۴x^{n}+۲x^{۲}+۱}{ax^{۳}+۲}=۲$ ، مقدار n و a را به‌دست آورید.

۵ــ اگر به ازای مقدارهای بزرگ x، $\frac{۴x^{۲}+۳x+۱}{۸x^{۲}+۱}\leq f(x)\leq\frac{x+۲}{۲x-۱}$ ، مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ را به‌دست آورید.

۶ــ اگر $f(x)=۲ax^{۳}+x-a+۲۰$ بر $(x+۲)$ بخش‌پذیر باشد، مقدار $f(۰)$ برابر چیست؟

۷ــ اگر $f(x)=\frac{x}{x+۱}$ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{۲x+۱}$ را به‌دست آورید.

تمرین‌های تکمیلی بخش دوم

۱) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ باضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}3+2x, & x\geq 1\\ x+4, & x<1\end{cases}$ داده شده است.

الف) با توجه به ضابطه‌ی f جدول زیر را کامل کنید.

x	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	... ۱ ...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)							

ب) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را با استفاده از جدول به دست آورید و درستی آن را بررسی کنید.

۲) حد راست و حد چپ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-9}{2x-3}, & x\neq \dfrac{3}{2}\\ 2x+4, & x=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ را وقتی $x\to\dfrac{3}{2}$ به دست آورید. آیا $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)$ وجود دارد؟

۳) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{x}, & x\geq\dfrac{1}{2}\\ 2-x-x^2, & x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$ داده شده است.

پیوستگی این تابع را در نقطه‌ی $x=\dfrac{1}{2}$ بررسی کنید.

۴) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax+4, & x<-2\\ \dfrac{2}{x}+b, & x>-2\\ 6, & x=-2\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-2$ پیوسته باشد.

۵) حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{-1}{(x+2)^2}$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+2}{1-2x}$

پ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5x+2}$

ت) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2+\sqrt{x-1}}$

ث) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\sin x}{2x^2}$

چ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x\sin^2 2x}{5x^3}$

ح) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\pi-x}$