با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

ابوالوفا محمد ابن محمدابن یحیی ابن اسماعیل ابن عباس بوزجانی، یکی از مفاخر علمی ایران و از بزرگ‌ترین ریاضیدانان و منجمان دوره‌ی اسلامی است به گفته ابن ندیم در روز چهارشنبه، اول ماه رمضان سال ۳۲۸ هـ.ق در شهر بوزجان متولد شد. بوزگان، پوزگان یا پوچگان، شهر قدیمی در خراسان بود که ویرانه‌های آن در حدود هجده کیلومتری شرق شهر تربت‌جام به یادگار مانده است. ابوالوفا در حدود سال ۳۴۸ هـ.ق زادگاهش را به خاطر کسب علم و دانش و عرضه توانایی‌های علمی و فکری خود، ترک و به طرف بغداد حرکت کرد. او در بغداد با شرکت در محافل علمی توانایی خود را در محاسبات ریاضی به سرعت نشان داد. ره‌آورد این تلاش‌ها و سخت‌کوشی‌ها، انتخاب او برای دیوانی و ثبت و محاسبات مالی حکومت بود. ابوالوفا علاوه بر فعالیت‌های یاد شده، به پژوهش‌های نجومی و ستاره‌شناسی نیز مشغول بود. دانشمندان، هنرمندان و ریاضی‌دانان عصر خود به او لقب مهندس داده بودند. مهندس به معنای ماهرترین و مطلع‌ترین هندسه‌دان بود.

ابوالوفا در به‌دست آوردن وترها مطالب بسیار سودمندی دارد. تألیف‌های فراوانی در زمینه‌های حساب هندسه، مثلثات و نجوم داشته است. نبوغ بوزجانی به عنوان یک مهندس این بوده است که مطالب مهم و پیچیده را به شکلی ساده و قابل فهم در اختیار دیگران قرار می‌داد.

ابوالوفا درباره حساب عملی، با عنوان «کتاب فی مایحتاج‌الیه الکتاب و العمال من علم الحساب» از شهرت گسترده‌ای برخوردار گردید. او همه‌ی اعداد و محاسبات را تنها با کلمات بیان کرده است. این کتاب که ترجمه فارسی نام عربی کتاب «آنچه از علم حساب که کاتبان و کاسبان را به کار آید» می‌باشد از جهت تاریخ حساب اهمیت فراوانی دارد و محاسبات مربوطه به چهار عمل اصلی اعداد و همچنین کسرها و محاسبه مساحت مثلث‌ها و مربع‌ها محاسبه مالیات را شامل می‌شود.

کتاب درسی عملی دیگر ابوالوفا «کتاب فی مایحتاج الیه الصانع من الاعمال الهندسه» است که شامل ترسیم‌های مسطح ساده و ترسیم چند وجهی‌های منتظم و نیمه منتظمی که در کره‌ای مفروض شده‌اند و مطالب سودمندی برای کار معماران و صنعتگران دیده می‌شود. همچنین درباره‌ی ترکیب و تجزیه‌ی مربع‌ها وکنار هم گذاشتن آن‌ها که ظاهراً از مسائلی بوده است که غالباً مسلمانان در کارهای معماری و خصوصاً در تزیین ساختمان‌ها به آن‌ها برمی‌خورده‌اند مطالبی آمده است.

کتاب نجومی بزرگ ابوالوفا، به نام «المجسطی» یا «کتاب الکامل»، دقیقاً از «مجسطی» بطلمیوس تبعیت می‌کند. کتاب درباره علم مثلثات است. دستورهای مهم مثلثات، چه در مثلثات مسطح و چه در مثلثات کروی ثابت شده و حل مسائل آن را به صورت ساده درآورد و قضیه مماس‌ها را در حل مثلث‌های قائم‌الزاویه کروی به‌کار برد. یکی از نخستین برهان‌های قضیه‌ی کلی جیب‌ها (سینوس‌ها)، که در حل مثلث‌های غیر قائم‌الزاویه به‌کاربرده می‌شد، نیز از ابوالوفا سرچشمه گرفته است. در کارهای مهم بوزجانی در توسعه علم مثلثات، مخصوصاً بهبود جداول مثلثاتی و روش‌های حل مثلثات کروی، تردیدی نیست. در تدوین جدول‌های جدید سینوس، با استفاده از روش درونیابی خودش، سینوس ۳۰ دقیقه را با دقت بیشتری محاسبه کرد. به افتخار ابوالوفا، بر دهانه‌ی آتشفشانی در ماه نیز نام او را نهاده‌اند. بیرونی در چند قسمت از آثار خود، از بوزجانی نام برده و نوشته است که ابوالوفا در محاسبات نجومی خود، میزان انحراف محور زمین را محاسبه و آن را مساوی ۳۵ (دقیقه) و ۲۳ (درجه) دانسته و از محل رصدهای او در شهر بغداد و ناحیه باب‌التبن نیز یاد کرده است. و نیز در جای دیگر نوشته است که بوزجانی به محاسبه‌ی ادوار (روزهای گذشته از مبدأ یک تاریخ خاص) بر اساس رصدهای بطلمیوس اقدام کرده است. نکته‌ی بسیار مهم و جالب در زمینه‌ی حساب کاربردی و آثار بوزجانی، رشد و تحول مفهوم عدد است. او با وارد کردن اعداد منفی به حساب، کار بزرگ و مهمی انجام داده است. این مهندس نابغه برای محاسبه ذهنی حاصل ضرب دو عدد دو رقمی که رقم‌های دهگان آن یکسان باشد، دستوری بیان کرده است.

بخش دوم

حد و پیوستگی

هدف کلی بخش

درک مفهوم حد و به‌کارگیری آن در تعیین پیوستگی تابع‌ها.

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل	زمان
اول	حد	۲۰ساعت
دوم	پیوستگی	۸ ساعت
سوم	تعمیم حد	۸ ساعت

بخش دوم

فصل اول

حد

هدف کلی

درک مفهوم میل کردن یک متغیر به یک عدد و میل کردن مقدارهای یک تابع به یک عدد و تعمیم مفهوم حد

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ میل کردن یک متغیر را از چپ و راست به یک عدد، به $+\infty$ یا به $-\infty$ تعریف کند.

۲ــ حدّ تابع را تعریف کند.

۳ــ حدّ چپ و حدّ راست یک تابع در یک نقطه را تعریف کند.

۴ــ حدّ چپ و حدّ راست تابع را از روی نمودار آن تعیین کند.

۵ــ حدّ چپ و حدّ راست تابع را از روی ضابطه‌ی آن تعیین کند.

۶ــ حدّ تابع‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها، وقتی $x \to a$ به صفر میل می‌کنند را به دست آورد.

۷ــ قضیه فشردگی را در تعیین حد بعضی از تابع‌ها به کار برد.

پیش‌آزمون (۱)

۱ــ عددهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۴}{۵}$، ... روی محور اعداد مشخص شده‌اند (شکل ۱ــ۲).

الف) این عددها مرتباً به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) این عددها از کدام سَمت (راست، چپ یا هر دو) به آن عدد نزدیک می‌شوند؟

۲ــ عددهای $\frac{۲}{۱}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۴}{۳}$، $\frac{۳}{۴}$، ... را روی محور مشخص کنید (شکل ۲ــ۲).

الف) این عددها به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) این عددها از کدام سَمت به آن عدد نزدیک می‌شوند؟

۳ــ می‌خواهیم $s = ۱ + ۳ + ۳^۲ + \cdots + ۳^۹ + ۳^{۱۰}$ را حساب کنیم. در مقابل $-s$ و $۳s$ در دو ردیف زیر هم نوشته شده‌اند.

الف) عددهای هر ستون را با هم جمع کنید و زیر خط بنویسید.

ب) مقدار s را تعیین کنید.

۴ــ به روش سؤال ۳، مقدار

$$s = ۱ + r + r^۲ + \cdots + r^n$$

را به‌دست آورید.

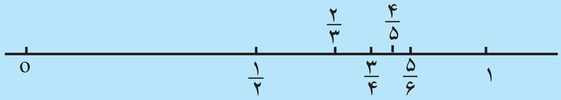
۵ــ تابع f با ضابطه‌ی زیر در $\mathbb{R}$ تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x < ۲ \\ ۶ - x & x > ۲ \end{cases}$$

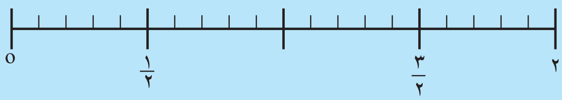
این تابع در $x = ۲$ تعریف نشده است (شکل ۳ــ۲).

اگر $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر شوند، عددهای $f(x_۱)$، ...، $f(x_n)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون

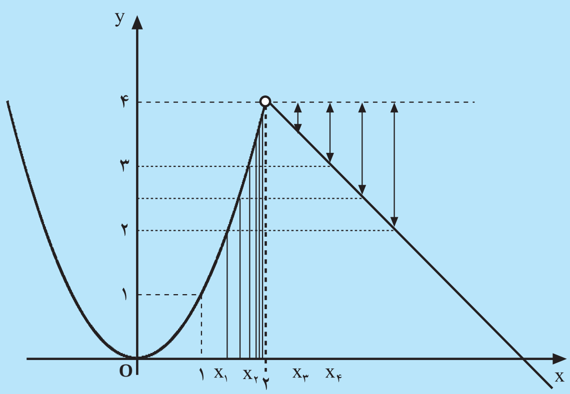


شکل ۱ــ۲



شکل ۲ــ۲

$$\begin{aligned} -s &= -۱ - ۳ - ۳^۲ - \cdots - ۳^۹ - ۳^{۱۰} \\ ۳s &= \quad\;\; ۳ + ۳^۲ + \cdots + ۳^۹ + ۳^{۱۰} + ۳^{۱۱} \end{aligned}$$



شکل ۳ــ۲

مقدمه

فرض کنید اتومبیلی در نقطه‌ی $A(0,2)$ ایستاده است. چراغ راهنما سبز می‌شود و اتومبیل با سرعت روبه افزایش برروی یک خط راست حرکت می‌کند. شکل ۴ــ۲ در صفحه‌ی بعد را ملاحظه کنید.

$$y = \frac{1}{4}t^2 + 2 \qquad (1)$$

رابطه‌ی (۱) محل اتومبیل را، نسبت به زمان، در هر لحظه مشخص می‌کند. طبق این رابطه در آغاز حرکت $(t = 0)$ فاصله‌ی اتومبیل تا مبدأ مختصات ۲ متر است. یعنی، $y_A = 2m$ و $t_A = 0$. اتومبیل دوثانیه پس از حرکت به نقطه‌ی B، به فاصله‌ی ۳ متر از مبدأ می‌رسد. $y_B = 3m$ و $t_B = 2s$. اتومبیل چهار ثانیه پس از حرکت به نقطه‌ی C، به فاصله‌ی ۶ متر از مبدأ می‌رسد. $y_C = 6m$ و $t_C = 4s$.

با استفاده از معادله‌ی (۱) جدول مکان ــ زمان ۱ــ۲ را خواهیم داشت .

جدول ۱ــ۲

نقطه	A	B	C	D	E
t	۰	۲	۴	۶	۸
y	۲	۳	۶	۱۱	۱۸

نمودار y نسبت به تغییرات t نیز در صفحه مقابل رسم شده است.

طبق تعریف، اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را به‌دست آوریم، باید اندازه‌ی جابه‌جایی را به مدّت حرکت تقسیم کنیم. یعنی،

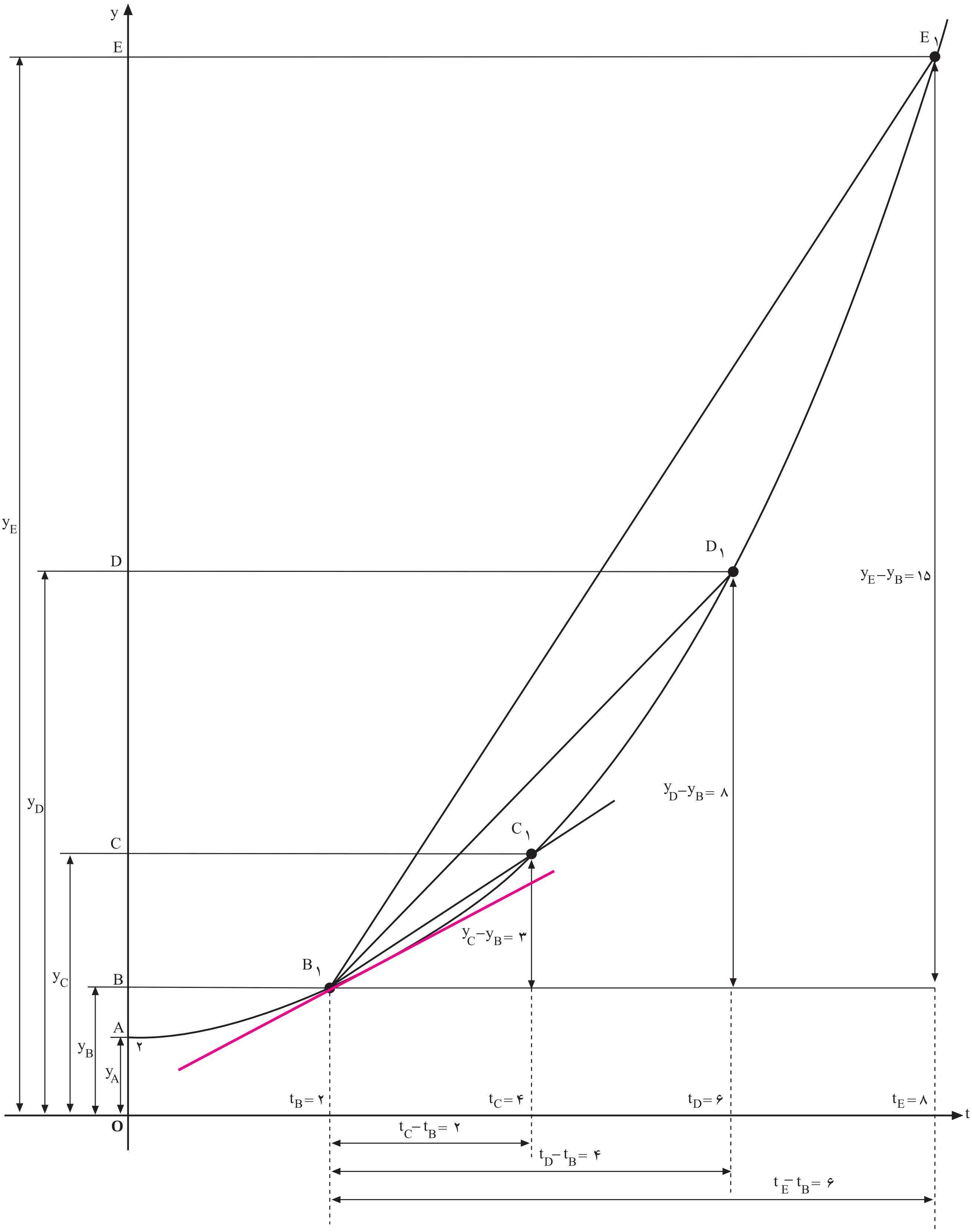
$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی}}{\text{مدت حرکت}}$$

طبق این تعریف، سرعت متوسط اتومبیل در مدتی که از B به E رفته است، از رابطه‌ی روبه‌رو به دست می‌آید.

$$\text{سرعت متوسط از B به E} = \frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی از B تا E}}{\text{مدت حرکت از B به E}}$$

$$= \frac{y_E - y_B}{t_E - t_B} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{18 - 3}{8 - 2} = \frac{15}{6}\frac{m}{s}$$


y
E
E۱
D
D۱
C
C۱
B
B۱
A
۲
O
t
y_E
y_D
y_C
y_B
y_A
$y_E - y_B = ۱۵$
$y_D - y_B = ۸$
$y_C - y_B = ۳$
$t_B = ۲$
$t_C = ۴$
$t_D = ۶$
$t_E = ۸$
$t_C - t_B = ۲$
$t_D - t_B = ۴$
$t_E - t_B = ۶$

شکل ۴ــ۲

می‌دانید که طبق تعریف، شیب خط B_1E_1 نیز از تقسیم $\Delta y = y_E - y_B$ بر $\Delta t = t_E - t_B$ به‌دست می‌آید (طبق تعریف و شکل ۴ــ۲).

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = B_1E_1 \text{ شیب خط } = \frac{۱۸ - ۳}{۸ - ۲} = \frac{۱۵}{۶}$$

اگر مدت حرکت را کم کنیم یعنی زمان $\Delta t = t_E - t_B$ را کمتر کنیم مسافتی که اتومبیل طی می‌کند یعنی، $\Delta y = y_E - y_B$ نیز کوتاه‌تر می‌شود.

لذا، اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را در مدت کوتاه‌تر، یعنی در مدتی که اتومبیل از B به D رفته است، به دست آوریم، طبق تعریف و شکل۴ــ۲، داریم :

$$\text{سرعت متوسط از B به D} = \frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی از B تا D}}{\text{مدت حرکت از B به D}}$$

$$= \frac{y_D - y_B}{t_D - t_B} = \frac{۱۱ - ۳}{۶ - ۲} = ۲\,\frac{m}{s}$$

ضمناً، شیب خط B_1D_1 چنین حساب می‌شود :

$$B_1D_1 \text{ شیب خط } = \frac{y_D - y_B}{t_D - t_B}$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۱۱ - ۳}{۶ - ۲} = ۲$$

اگر مدت حرکت را باز هم کم‌تر کنیم، یعنی اگر $\Delta t = t_D - t_B$ را باز هم کوچک کنیم، مسافتی که اتومبیل طی می‌کند، یعنی $\Delta y = y_D - y_B$ نیز باز هم کوتاه‌تر می‌شود.

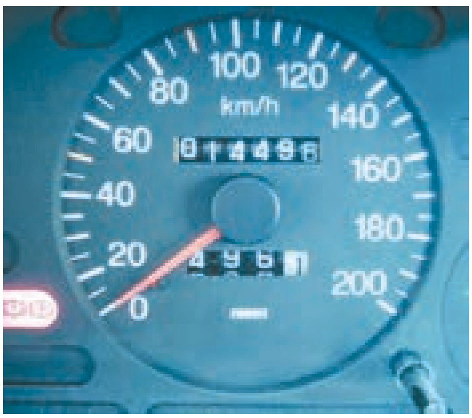
حال اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را در مدتی که از B به C رفته است حساب کنیم باید بنویسیم :

$$\text{سرعت متوسط اتومبیل از B به C} = \frac{y_C - y_B}{t_C - t_B} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= B_1C_1 \text{ شیب خط } = \frac{۶ - ۳}{۴ - ۲}$$

$$= \frac{۳}{۲}\,.$$

وقتی شما در اتومبیل در حال حرکت نشسته‌اید و می‌خواهید سرعت اتومبیل را بدانید، به کیلومترشمار نگاه می‌کنید. مدتی طول می‌کشد تا چشم شما کیلومترشمار را ببیند و حاصل دیدن به مغز شما منتقل شود. این مدت، مدت بسیار کوتاهی است، ولی اتومبیل در این مدت بسیار کوتاه به اندازه‌ی بسیار کم جابه‌جا شده است، حاصل تقسیم این جابه‌جایی کوتاه به آن مدت کوتاه، سرعت لحظه‌ای اتومبیل است که شما روی صفحه‌ی کیلومتر شمار مشاهده می‌کنید. این سرعت می‌تواند سرعت موتورسیکلت، سرعت اتومبیل، سرعت هواپیما یا سرعت فضاپیما باشد که عدد بسیار بزرگی است.



شکل ۵ــ۲

تاکنون، به موضوع مورد بحث کاملاً به عنوان یک پدیده‌ی موجود در زندگی نگاه کردیم. حالا به این مطلب از دید ریاضی می‌نگریم.

به نموداری که با استفاده از جدول ۱ــ۲ رسم شده است نگاه کنید. شیب خط B_1E_1 از تقسیم Δy بر Δt مربوط به‌دست می‌آید. اگر Δt را کوچک‌تر کنیم خط بعدی، یعنی خط B_1D_1 را می‌توانیم رسم کنیم. اگر Δt را باز هم کوچک و کوچک‌تر کنیم درحد خط قاطع به خط مماس بر منحنی در نقطه B_1 تبدیل می‌شود.

با توجه به آنچه گفته شد، شیب خط مماس بر منحنی در B_1 با سرعت لحظه‌ای در B_1 برابر است. لذا، گفته می‌شود :

سرعت لحظه‌ای، حدّ سرعت متوسط است وقتی Δt به صفر میل می‌کند.

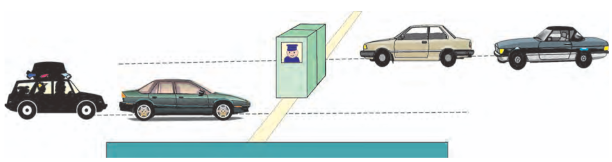
در نمودار رسم شده ما می‌خواستیم شیب خط مماس را در نقطه‌ی B_1 تعیین کنیم، لذا، خط‌های قاطع را از نقطه‌ی B_1 رسم کردیم و بر نقطه‌ی B_1 تأکید نمودیم. اگر می‌خواستیم شیب خط مماس در نقطه‌ی C_1 را به‌دست آوریم، خط‌های قاطع را از نقطه‌ی C_1 رسم می‌کردیم و سرعت (لحظه‌ای) در نقطه‌ی C_1 را به‌دست می‌آوردیم.

شکل ۶ــ۲

۱ــ۲ــ حد

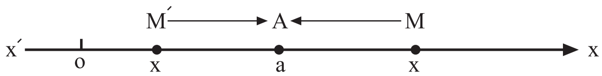
حد یکی از مفهوم‌های اساسی و مهم ریاضیات است. مفهوم‌هایی چون پیوستگی، مشتق و ... در رابطه‌ی نزدیک با مفهوم حد هستند.

در این فصل، سعی می‌کنیم با بیان مثال‌هایی، تا حدودی مفهوم ریاضی حد را روشن کنیم.



۱ــ۱ــ۲ــ میل کردن یک متغیر به یک عدد ثابت:

فرض کنید دو متحرک M و M' روی محور اعداد به سمت نقطه‌ی معین A از یک شهر در حرکت هستند. فاصله‌ی بین این متحرک‌ها و نقطه‌ی A مرتباً کم و کم‌تر می‌شود ؛ به عبارت دیگر، x متحرک M (یا متحرک M') مرتباً به عدد a نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود (شکل ۷ــ۲).



شکل ۷ــ۲

تعریف ۱: متغیر x به عدد ثابت a میل می‌کند، و می‌نویسیم $x \to a$، در صورتی که فاصله‌ی بین متحرک M و نقطه‌ی A مرتباً کم و کم‌تر شود. جدول ۲ـ۲ میل کردن متغیر x را به عدد ۳ نشان می‌دهد.

اگر مجدداً به محور بالا توجه کنید ملاحظه می‌کنید که متحرک M' از چپ و متحرک M از راست به A نزدیک می‌شوند.

تعریف ۲: اگر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به a میل کند (یعنی، همیشه $x-a>۰$) گوییم x از راست به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a^{+}$.

تعریف ۳: اگر x با مقادیر کوچک‌تر از a به a میل کند (یعنی، همیشه $x-a<۰$) گوییم x از چپ به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a^{-}$.

اینک فرض کنید که دو متحرک M و M' از نقطهٔ A دور می‌شوند.

تعریف ۴: متغیر x به $+\infty$ میل می‌کند در صورتی که بتوان فاصله‌ی متحرک M را تا نقطه‌ی A از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر کرد، و می‌نویسیم: $x \to +\infty$.

تعریف ۵: متغیر x به $-\infty$ میل می‌کند در صورتی که بتوان x را از هر عدد منفی دلخواه انتخاب شده کوچک‌تر کرد.

نکته: به سادگی می‌توان ملاحظه کرد که وقتی $x \to -\infty$ آنگاه $(-x) \to +\infty$.

جدول‌های ۳ـ۲ و ۴ـ۲ میل کردن متغیر x را به $+\infty$ یا $-\infty$ نشان می‌دهند.

کار در کلاس ۱ـ۲

با توجه به جدول‌های ۵ـ۲ تا ۷ـ۲ بنویسید که x به چه عددی میل می‌کند.

جدول ۲ـ۲

$x \to ۳^{-}$ ⟶ ⟵ $x \to ۳^{+}$

x	... ۰	۱/۵	۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	...	۳	...	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴	...

شکل ۸ـ۲

جدول ۳ـ۲

x	...	۱	۱۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	$۱۰^{۸}$	$۱۰^{۱۰}$	$۱۰^{۱۰۰}$	...

$x \longrightarrow +\infty$

جدول ۴ـ۲

x	...	$-۱۰^{۱۰۰}$	$-۱۰^{۱۰}$	$-۱۰^{۸}$	$-۱۰^{۴}$	-۱۰۰۰	-۱۰	-۱	...

$x \longrightarrow -\infty$

جدول ۵ـ۲

x	... ۰	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	...	۱	...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲	...

$x \longrightarrow$

جدول ۶ـ۲

x	...	۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	...	۲

$x \longrightarrow$

جدول ۷ـ۲

x	-۱	...	$-۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۷$	$-۰/۵$	۰	...

$x \longrightarrow$

قبل از پرداختن به حد تابع‌ها، با چند فعالیت مفهوم حد را روشن می‌کنیم.

فعالیت ۱ـ۲

در شکل ۹ـ۲ یک مثلث قائم‌الزاویه را، با اضلاع ۴،۳ و ۵ واحد ملاحظه می‌کنید. اندازهٔ وتر این مثلث را x_0 می‌نامیم. بنابراین، $x_0 = ۵$.

۱) اندازهٔ محیط این مثلث را P_0 می‌نامیم. واضح است که :

$$P_0 = ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$$

۲) مطابق شکل، وسط اضلاع به‌هم وصل شده‌اند تا مثلث قرمز رنگ ایجاد شود. اندازهٔ وتر مثلث جدید را x_1 می‌نامیم.

اندازهٔ x_1 چقدر است؟ $x_1 = ?$

۳) اندازهٔ محیط مثلث جدید را P_1 می‌نامیم. اندازهٔ P_1 چقدر است؟ $P_1 = ?$

اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم به شکل ۱۰ـ۲ می‌رسیم.

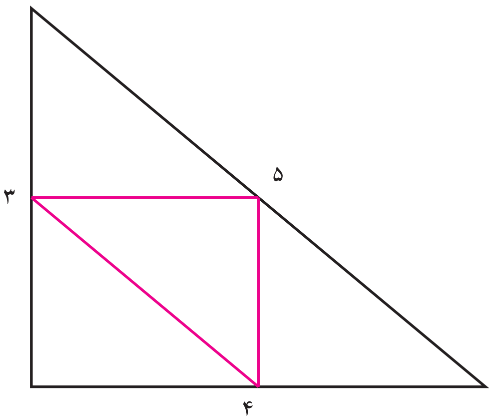
۴) اندازهٔ وترها و محیط مثلث‌های بعدی را بنویسید.

$x_2 = \cdots$ $\quad x_3 = \cdots$ $\quad x_4 = \cdots$

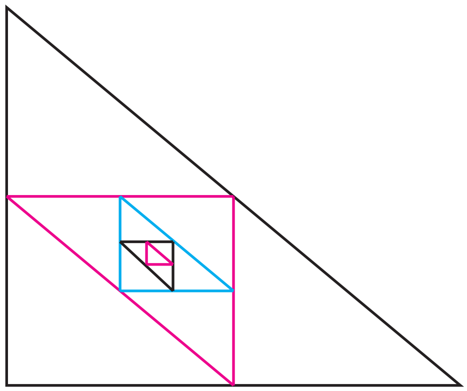
$P_2 = \cdots$ $\quad P_3 = \cdots$ $\quad P_4 = \cdots$

۵) اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را باز هم ادامه دهیم، اندازهٔ وتر مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۶) اندازهٔ محیط مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟



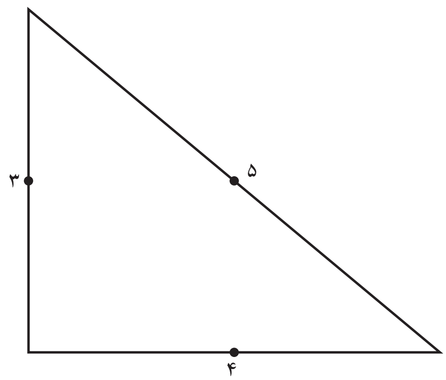
شکل ۹ـ۲


شکل ۱۰ـ۲

کار در کلاس ۲ـ۲

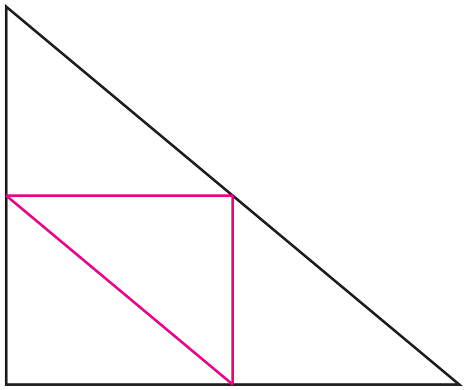
در شکل ۱۱ـ۲ یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۴،۳ و ۵ واحد ملاحظه می‌کنید. اندازهٔ وتر این مثلث $x_0 = ۵$ و مساحت آن برابر است با

$$S_0 = \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۶$$



شکل ۱۱ـ۲

۱) وسط ضلع‌های مثلث را به‌هم وصل کرده‌ایم (شکل ۱۲ــ۲).



شکل ۱۲ــ۲

۲) اندازه‌ی وتر مثلث جدید را $x_{۱}$ بنامید. اندازه‌ی $x_{۱}$ چقدر است؟

$x_{۱} = ?$

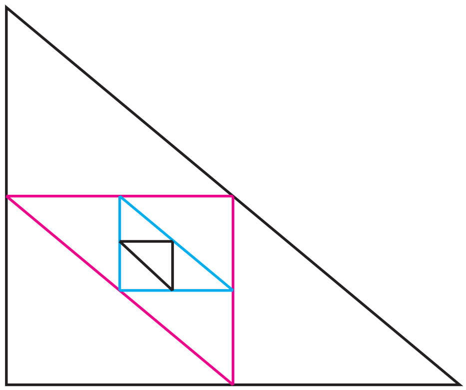
۳) مثلث اولیه به چند مثلث کوچک تقسیم شده است؟

... مثلث.

۴) آیا مساحت این مثلث‌ها برابرند؟ چرا؟

۵) اندازه‌ی مساحت مثلث کوچک وسط را $S_{۱}$ بنامید.

$S_{۱} = ?$



شکل ۱۳ــ۲

۶) همانند فعالیت ۱ــ۲، عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهید (۳ بار دیگر) (شکل ۱۳ــ۲).

۷) اندازه‌ی وتر و مساحت مثلث‌های جدید را بنویسید.

$x_{۲} = \cdots \qquad x_{۳} = \cdots$

$S_{۲} = \cdots \qquad S_{۳} = \cdots$

$x_{۴} = \cdots$

$S_{۴} = \cdots$

۸) اندازه‌ی وتر مثلث‌ها به چه عددی میل می‌کنند؟

۹) اندازه‌ی مساحت مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۱۰) آیا درست است که بنویسیم :

$S_n \to ۰$

$x_n \to ۰$

مثال: اگر $0 < r < 1$ ثابت کنید

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}.$$

حل: سعی می‌کنیم به‌طور شهودی این تساوی را اثبات کنیم :

مربع ABCD به ضلع واحد را درنظر بگیرید. مثلث‌های ADE و ABS متشابه‌اند. چرا؟ (شکل ۱۴ــ۲)

نسبت تشابه آن‌ها را می‌نویسیم :

$$\frac{AD}{DE}=\frac{BS}{AB}\Rightarrow\frac{1}{1-r}=\frac{BS}{1}$$

بنابراین، $BS=\frac{1}{1-r}$ و $CS=\frac{1}{1-r}-1=\frac{r}{1-r}$.

پاره‌خط CF را مساوی r انتخاب می‌کنیم $FS=CS-r=\frac{r^2}{1-r}$ است. از F پاره‌خط FF' را به موازات CE رسم می‌کنیم. بنابر قضیه‌ی تالس، در مثلث SCE ، داریم :

$$\frac{FF'}{CE}=\frac{FS}{CS}$$

در نتیجه،

$$\frac{FF'}{r}=\frac{\frac{r^2}{1-r}}{\frac{r}{1-r}}\Rightarrow FF'=r^2$$

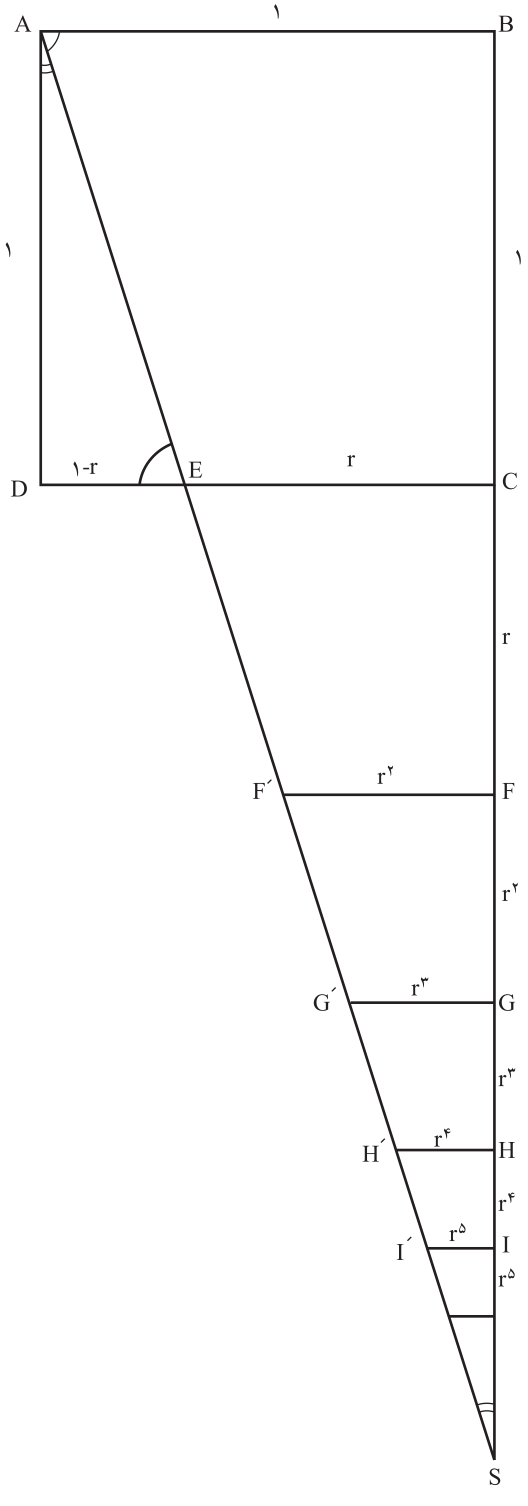
به همین ترتیب، اگر $FG=r^2$ انتخاب شود، خواهیم داشت : $GG'=r^3$ و ...

بنابراین، $BS=1+r+r^2+r^3+\cdots$ (*)

یعنی،اگر $0<r<1$ آن‌گاه $1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}$

بدیهی است که در این حالت، $r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ، یعنی وقتی توان r به $+\infty$ میل می‌کند r^n به صفر میل می‌کند.

از رابطه‌ی (*) نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آید که آن‌ها را در فعالیت بعدی مورد استفاده قرار خواهیم داد.



شکل ۱۴ــ۲

نتیجه‌ی ۱: اگر $r=\frac{۱}{۲}$ آن‌گاه

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲$$

نتیجه‌ی ۲: اگر $r=\frac{۱}{۳}$ آن‌گاه

$$۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\cdots=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

فعالیت ۲ــ۲

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ABC ، به‌طول ساق ۲ واحد، رسم شده است. از وسط هر ساق عمودی خارج شده تا یک مربع و دو مثلث ایجاد شود.

مجدداً از وسط هر ساق مثلث‌های جدید، عمودی خارج شده تا مربع و مثلث‌های جدید ایجاد شود (شکل ۱۵ــ۲).

۱) شما نیز دو بار دیگر، مشابه آنچه روی یکی از مثلث‌های کوچک صورت گرفته، این کار را انجام دهید.

می‌خواهیم مجموع مساحت‌های تمام **مربع‌های سایه زده** شده را حساب کنیم.

برای این منظور کارهای زیر را انجام دهید.

الف) شکل ۱۶ــ۲ را کامل کنید. (در این شکل مربع‌های سایه زده شده به طرز مفیدی روی هم قرار گرفته‌اند.)

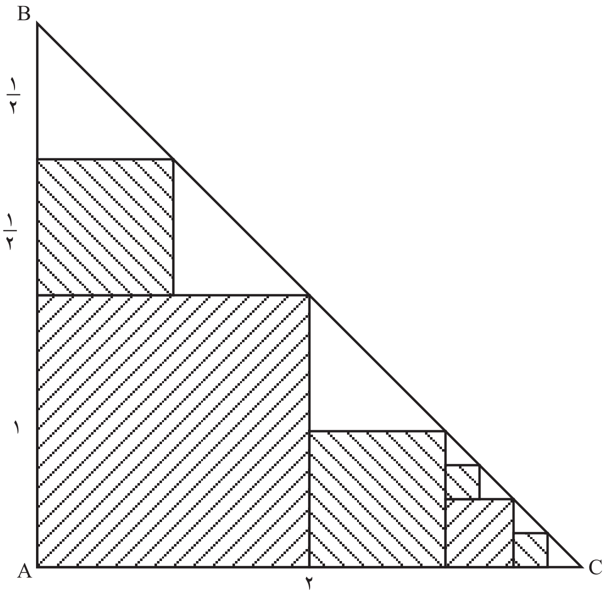
ب) به کمک شکل، و نتیجه‌ی ۱ مثال فوق ، سعی کنید عددی که طول مستطیل حاصل به آن نزدیک می‌شود را به دست آورید.

پ) مساحت شکل حاصل به چه عددی نزدیک می‌شود؟

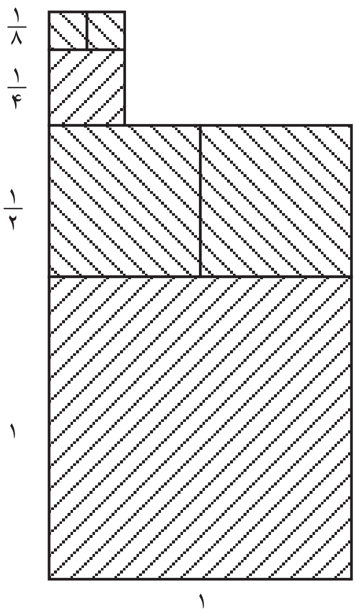
۲) مجموع مساحت‌های مربع‌های سایه زده شده چه ارتباطی با مساحت مثلث ABC دارد؟

۳) فقط با توجه به شکل ۱۵ــ۲ مساحت کل قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید. راهنمایی : نشان دهید که مساحت کل موردنظر برابر است با ۲ .

۴) مساحت کلّ قسمت‌های **سایه‌زده نشده** به چه عددی نزدیک می‌شود؟



شکل ۱۵ــ۲



شکل ۱۶ــ۲

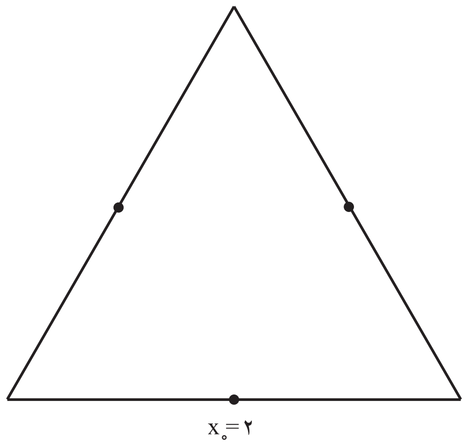
تمرین ۱ــ۲

در شکل ۱۷ــ۲، مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $x_۰ = ۲$ رسم شده است. مساحت این مثلث $S_۰ = \sqrt{۳}$ است. چرا؟

۱) وسط ضلع‌های مثلث را به‌هم وصل کنید.

۲) اندازه‌ی ضلع مثلث جدید را $x_۱$ بنامید.

$x_۱ = \cdots$



شکل ۱۷ــ۲

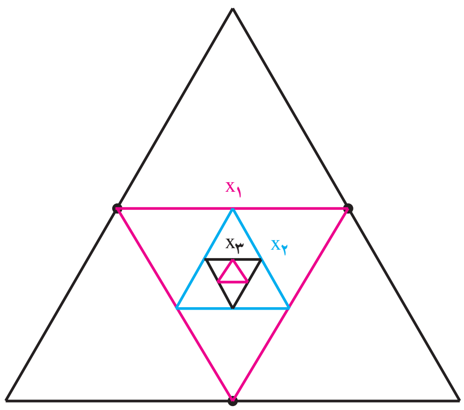
۳) مثلث به چند مثلث کوچک تقسیم شده است؟ ... مثلث.

۴) آیا مساحت این مثلث‌ها برابرند؟ چرا؟

۵) مساحت مثلث وسط را $S_۱$ بنامید.

این عمل را مطابق شکل ۱۸ــ۲ ادامه داده‌ایم.

۶) اندازه‌ی ضلع‌ها و مساحت مثلث‌های جدید را بنویسید.



شکل ۱۸ــ۲

$x_۲ = \cdots \qquad x_۳ = \cdots \qquad x_۴ = \frac{۱}{۸}$

$S_۲ = \cdots \qquad S_۳ = \cdots \qquad S_۴ = \frac{\sqrt{۳}}{۲۵۶}$

۷) اندازه‌ی ضلع‌های مثلث‌ها به چه عددی میل می‌کند؟

۸) اندازه‌ی مساحت مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

آیا درست است که بنویسیم؟

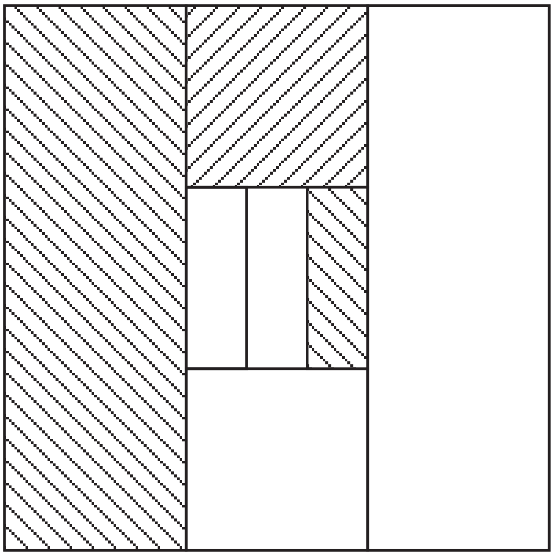
$S_n \to ۰$

$x_n \to ۰$

بازی با حد

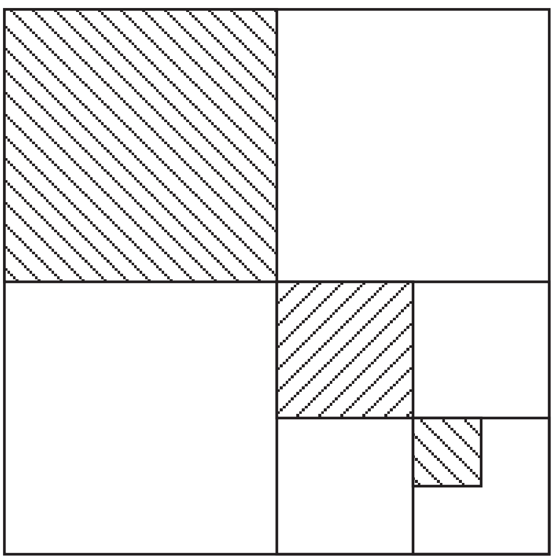
۱) در شکل ۱۹ــ۲ مربعی به ضلع واحد رسم شده است. با توجه به نحوه‌ی سایه زدن قسمت‌هایی از شکل، دوبار دیگر، مستطیل مجاور آخرین مستطیل سایه زده شده را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید و یک قسمت را سایه بزنید (این که کدام قسمت را سایه بزنید مهم است!)

فرض کنید عمل سایه زدن قسمت‌ها مرتباً ادامه پیدا کند. مساحت تمام قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید.



شکل ۱۹ــ۲

۲) در شکل ۲۰ــ ۲ نیز مربعی به ضلع واحد رسم شده است. مطابق شکل، دوبار دیگر مربع مقابل آخرین مربع سایه زده شده را به چهار مربع کوچک‌تر تقسیم و یک قسمت را سایه بزنید. مساحت تمام قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید.



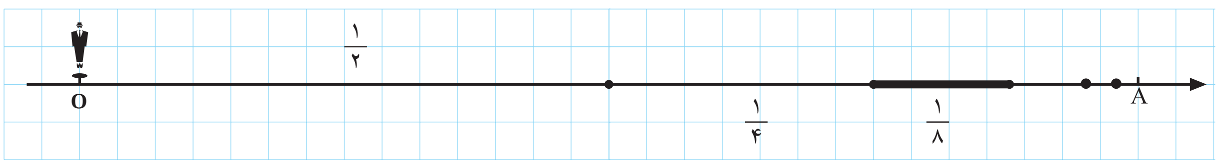
شکل ۲۰ــ۲

فعالیت ۳ــ۲

یک مثال تاریخی از حد

مسئله‌ی زنون: متحرکی از نقطه‌ی O، روی یک خط مستقیم، شروع به حرکت می‌کند و قصد دارد به نقطه‌ی A، به فاصله‌ی واحد از O، برسد. این متحرک هربار مسیری به **طول نصف فاصله‌اش تا نقطه‌ی A** را طی می‌کند و بعد کمی استراحت می‌نماید! (شکل ۲۱ــ۲)

۱) مسافتی را که این متحرک هربار طی می‌کند، x فرض کنید و سه مقدار دیگر x را، با توجه به شکل ۲۱ــ۲ بنویسید.



شکل ۲۱ــ۲

۲) آیا این متحرک به نقطه‌ی A می‌رسد؟ چرا؟

۳) فرض کنید f(x) فاصله‌ی این متحرک تا نقطه‌ی O باشد. جدول ۸ــ۲ را کامل کنید.

۴) با توجه به جدول ۸ــ۲، وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، مقدارهای f(x) به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۵) در این مثال، آیا x مساوی صفر می‌شود؟

۶) آیا هیچ یک از مقدارهای f(x) مساوی یک هست؟

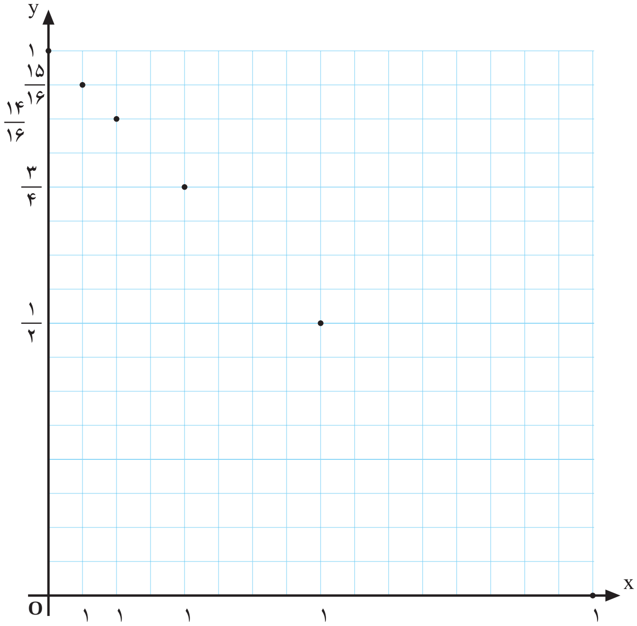
در این مثال، f(x) هرگز مساوی یک نمی‌شود ولی هرچه بخواهیم به یک نزدیک می‌شود، البته به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به صفر نزدیک کنیم. ریاضی‌دان‌ها، این مطلب را با نماد ریاضی زیر نمایش می‌دهند.

$$\lim_{x \to ۰} f(x) = ۱$$

(بخوانید : حد f(x) وقتی x به صفر میل می‌کند مساوی یک است)[۱]

جدول ۸ ــ ۲

x	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	...
f(x)	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$		$\frac{۱۵}{۱۶}$	...



شکل ۲۲ــ۲ــ نمودار **y = f(x)**

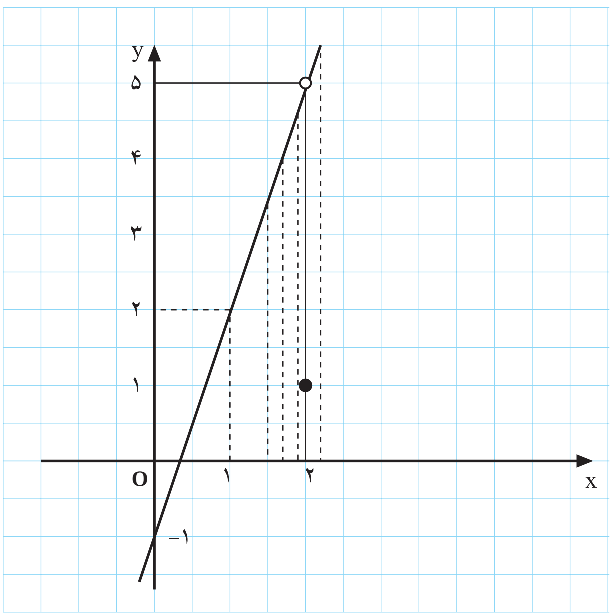
۲ــ۱ــ۲ــ حد تابع: در مطالعه‌ی تابع‌ها، مثلاً با ضابطه‌ی y = f(x) ، در بسیاری از موارد، لازم است بدانیم وقتی x به عدد معینی، مثلاً a میل می‌کند، f(x) چگونه تغییر می‌کند، و آیا مقدارهای f(x) به عدد مشخصی میل می‌کند یا نه؟ در این بخش به این موضوع می‌پردازیم.

فعالیت ۴ــ۲

تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر داده شده است.

$$f(x) = \begin{cases} ۳x - ۱ & , \quad x \neq ۲ \\ ۱ & , \quad x = ۲ \end{cases}$$

نمودار این تابع نیز در شکل ۲۳ــ۲ رسم شده است.



شکل ۲۳ــ۲

۱ــ lim سه حرف اول واژه‌ی limit به معنی حدّ است.

۱) مقدارهای $f(x)$ را برای xهایی که در جدول مقابل داده شده‌اند محاسبه و جدول ۹ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۹ــ۲

x	...	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹	...	۲	...	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	...
$f(x)=3x-1$	...	۲				۴/۹۷	...	?	...	۵/۰۳			۸	...

۲) در این جدول x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) وقتی x به عدد ۲ میل کند، مقدار $f(x)$ ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۴) وقتی x نقطه‌های روی نمودار به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، $f(x)$ یا y این نقطه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

پاسخ :
۲)
۳)
۴)

همان‌طور که می‌بینید $f(x)$ها به عدد ۵ نزدیک می‌شوند.

در این حالت می‌گوییم :

حد $f(x)$ وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند مساوی ۵ است

و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$

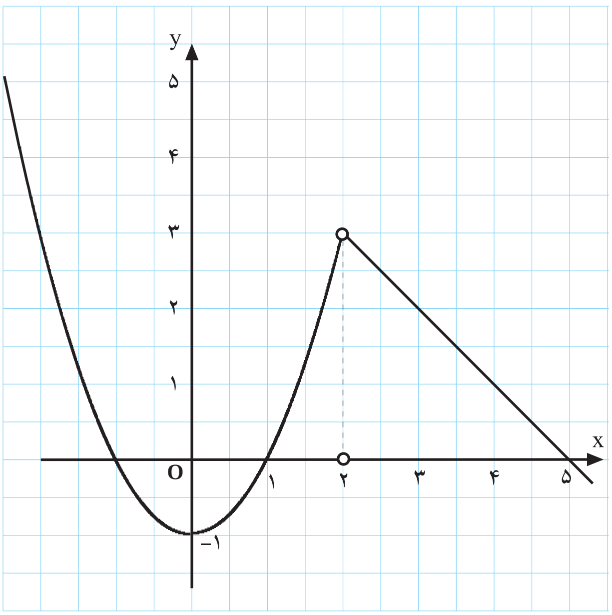
۵) آیا با تغییر مقدار $f(2)$ ، مقدار حد $f(x)$ ، وقتی $x \to 2$ ، تغییر پیدا می‌کند؟

فعالیت ۵ــ۲

تابع $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \quad x<2 \\ 5-x & , \quad x>2 \end{cases}$$

تعریف شده و نمودار آن نیز در شکل ۲۴ــ۲ رسم شده است.



شکل ۲۴ــ۲

۱) با توجه به ضابطه‌ی f جدول ۱۰ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۱۰ــ۲

x	...	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹	...	۲	...	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	...
$f(x)$							...		...					

۲) با میل کردن x به عدد ۲، مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟ آیا به عدد مشخصی میل می‌کنند؟

۳) آیا رابطه‌ی روبه‌رو درست است؟ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3 \quad (*)$

۴) به کمک نمودار تابع، حد تابع f را وقتی $x \to 2$ بررسی کنید.

۵) آیا نمودار هم درستی رابطه (*) را نشان می‌دهد؟

پاسخ :
۲)
۳)
۴)
۵)

کار در کلاس ۳ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۶ \;, & x<-۱ \\ ۳-x \;, & x>-۱ \end{cases}$$

۱) نمودار $y=f(x)$ را در شکل (۲۵ــ۲) رسم کنید.

۲) حد $f(x)$ را وقتی $x\to -۱$ به‌دست آورید.

۳) با تشکیل جدول تغییرات x، جدول ۱۱ــ۲، برای مقدارهایی که به عدد ۱ــ میل می‌کنند، حد تابع را، وقتی $x\to -۱$ ، به دست آورید.

۴) آیا نمودار و جدول هر دو، نشان می‌دهند که :

$$\lim_{x\to -۱} f(x)=۴$$

۳ــ۱ــ۲ــ تعریف حد تابع: تابع f را که در همسایگی I از عدد a (یعنی در یک بازه‌ی باز I شامل عدد a) تعریف شده است (مگر احتمالاً در a) درنظر می‌گیریم. گوییم حد تابع f، وقتی متغیر x به عدد a میل می‌کند، برابر عدد L است درصورتی که بتوانیم $f(x)$ را هرچه بخواهیم به L نزدیک کنیم، به شرط آن که x را به قدر کافی به عدد a نزدیک کرده باشیم. این مطلب با نماد ریاضی زیر نمایش داده می‌شود :

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

مثلاً، با توجه به آنچه تاکنون بررسی کرده‌ایم :

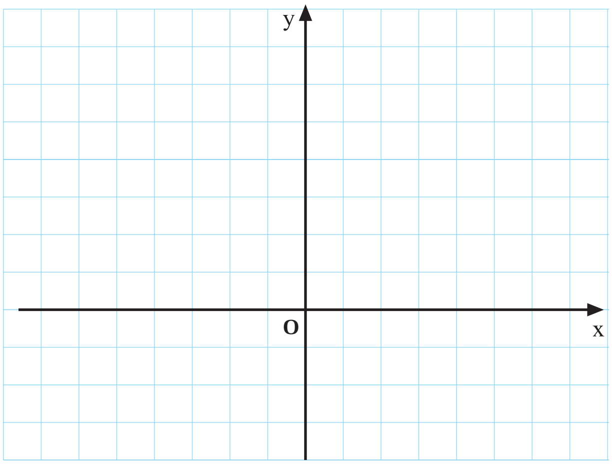
$$\lim_{x\to ۲}(۳x-۱)=۵$$

ضمناً، از آنچه تاکنون بررسی کرده‌ایم به نکته‌های زیر پی می‌بریم.

نکته‌ی ۱: وجود حد تابع f، وقتی $x\to a$ ، به معین بودن یا نبودن تابع در نقطه‌ی $x=a$ بستگی ندارد. لذا، حالت‌های زیر قابل تشخیص است :

الف) تابع f، وقتی $x\to a$ ، حد دارد ولی f در a تعریف نشده است (شکل ۲۶ــ۲).

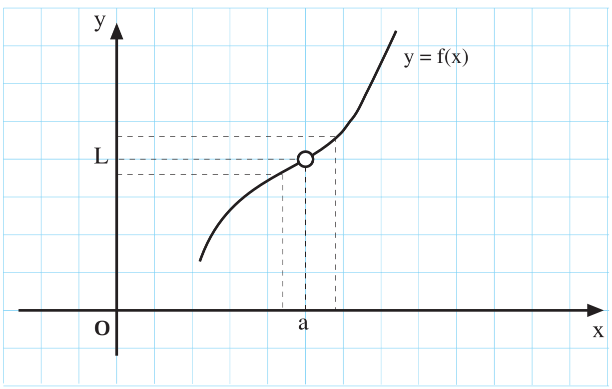
ب) تابع f، وقتی $x\to a$ ، حد دارد و f در a تعریف شده است (شکل‌های ۲۷ــ۲ و ۲۸ــ۲ــ الف).



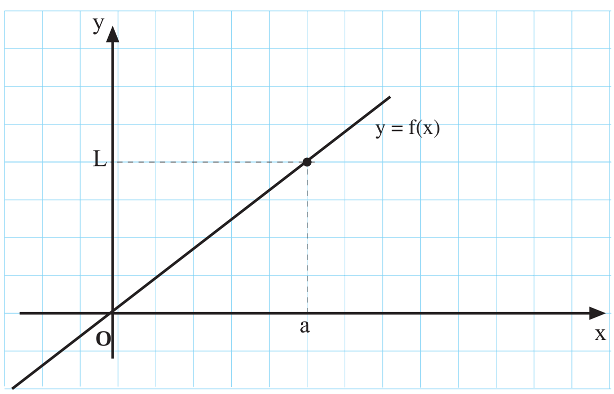
شکل ۲۵ــ۲

جدول ۱۱ــ۲

x	... ۱ــ ...
f(x)	



شکل ۲۶ــ۲

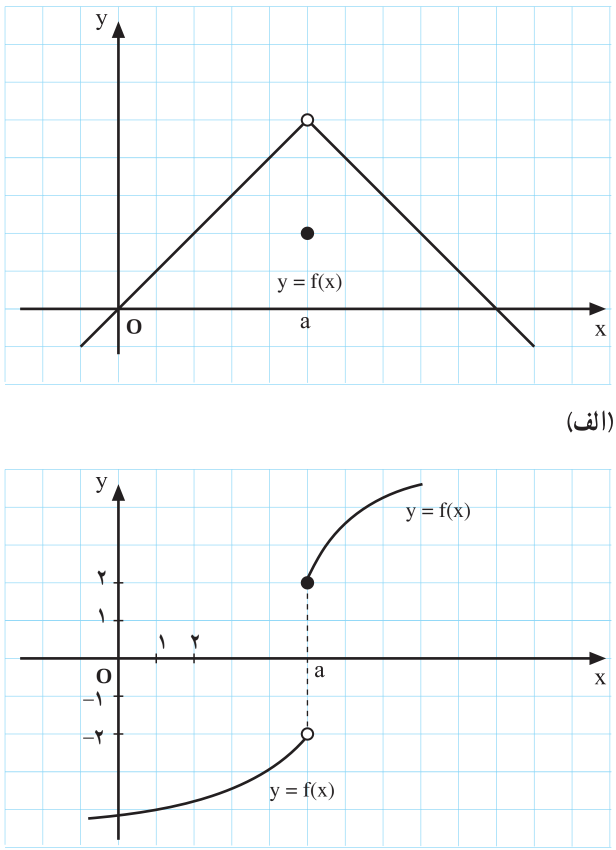


شکل ۲۷ــ۲

ب) تابع f، وقتی $x \to a$ ، حد ندارد. (شکل ۲۸ـ۲ـب).

نکته‌ی ۲: اگر تابع f، وقتی $x \to a$ دارای حد L باشد آنگاه حد $f(x) - L$ ، وقتی $x \to a$ ، مساوی صفر است و بالعکس.

نکته‌ی ۳: اگر تابع f، وقتی $x \to a$ ، دارای حد L باشد حد f وقتی $x \to a^-$ یا $x \to a^+$ نیز وجود دارد و مساوی L است.



(ب)

شکل ۲۸ـ۲

تمرین ۲ـ۲

۱ـ با توجه به شکل ۲۸ـ ۲ـ ب به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) حد $f(x)$ وقتی $x \to a^+$ چیست؟

ب) حد $f(x)$ وقتی $x \to a^-$ چیست؟

پ) آیا $f(x)$، وقتی $x \to a$ ، حد دارد؟

۲ـ تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x^۲ - ۱$ تعریف شده است. در مورد حد این تابع، وقتی $x \to ۱$ ، تحقیق کنید (جدول ۱۲ـ۲).

جدول ۱۲ـ۲

x	
f(x)	

۳ـ تابع $g: \mathbb{R} - \{-۱\} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است :

$$g(x) = x^۳ + ۱ \ , \quad x \neq -۱$$

در رفتار این تابع (یعنی حد داشتن یا نداشتن) وقتی $x \to -۱$ تحقیق کنید (جدول ۱۳ـ۲).

جدول ۱۳ـ۲

x	
g(x)	

۴ــ تابع $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده است.

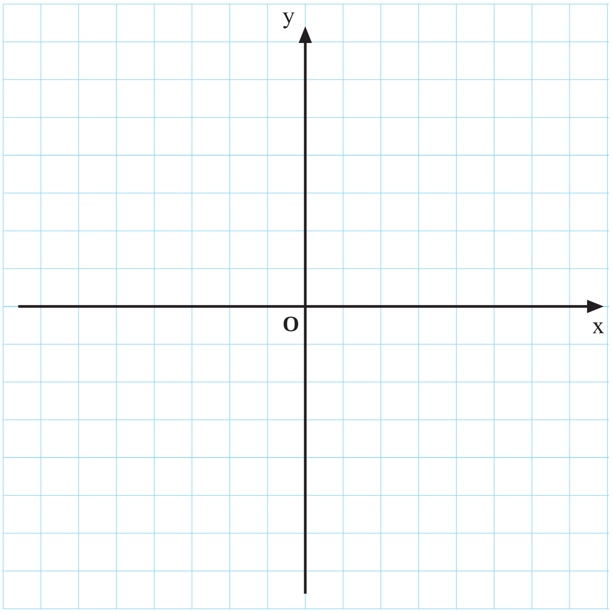
$$h(x) = \begin{cases} x^{۲}, & x \leq -۲ \\ ۲ - x, & x > -۲ \end{cases}$$

الف) مقدار $\lim\limits_{x \to -۲} h(x)$ را حساب کنید.

ب) آیا مقداری که به‌دست آورده‌اید با $h(-۲)$ برابر است؟

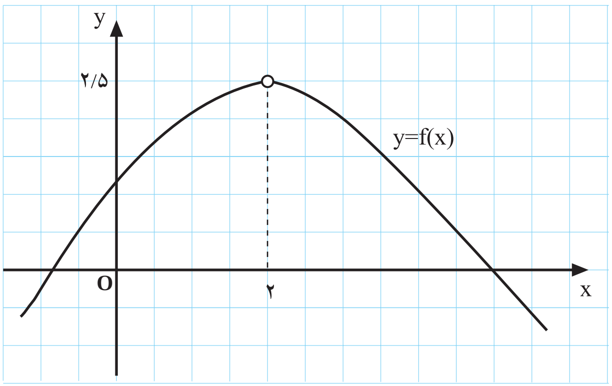
پ) نمودار تابع h رادر دستگاه مختصات روبه‌رو رسم کنید.

ث) نتایج بالا با شکل هم‌خوانی دارند؟



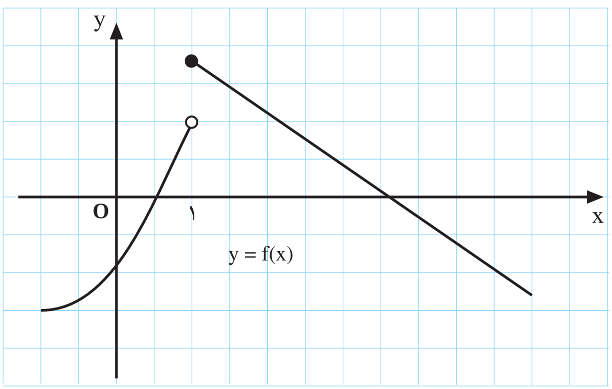
شکل ۲۹ــ۲

۵ــ با توجه به نمودار شکل ۳۰ــ۲ مقدار $\lim\limits_{x \to ۲} f(x)$ را تعیین کنید.



شکل ۳۰ــ۲

۶ــ با توجه به نمودار شکل ۳۱ــ۲ آیا $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ وجود دارد؟



شکل ۳۱ــ۲

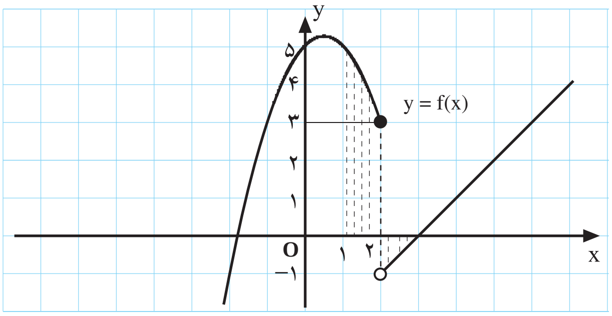
۴ــ۱ــ۲ــ حد چپ و حد راست یک تابع: معمولاً

برای تعیین حد بعضی از تابع‌ها، مانند $\frac{|x|}{x}$ در $x=۰$، باید حد چپ و حد راست آن‌ها را مورد بررسی قرار داد.

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}۵+x-x^۲, & x\le ۲\\ x-۳, & x>۲\end{cases}$$

نمودار $y=f(x)$ نیز در شکل ۳۲ــ۲ رسم شده است.



شکل ۳۲ــ۲

جدول ۱۴ــ۲ مقدارهای $f(x)$ را وقتی $x\to ۲^-$ نشان می‌دهد.

جدول ۱۴ــ۲

x	…	۱	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	…	۲
$f(x)=۵+x-x^۲$	…	۵	۴/۲۵	۳/۵۶	۳/۰۹	۳/۰۲۹۹	…	?

با توجه به جدول ۱۴ــ۲، و y نقطه‌ها نتیجه می‌گیریم :

حد $f(x)$ وقتی $x\to ۲^-$ برابر با ۳ است.

این مطلب را با نماد ریاضی زیر نشان می‌دهیم :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۳$$

جدول ۱۵ــ۲ نیز مقدارهای $f(x)$ را، وقتی $x\to ۲^+$، نشان می‌دهد.

جدول ۱۵ــ۲

x	۲	…	۲/۰۱	۲/۱	۲/۳	۲/۵	۳	…
$f(x)=x-۳$		…	−۰/۹۹	−۰/۹	−۰/۷	−۰/۵	۰	…

با توجه به جدول ۱۵ــ۲، و y نقطه‌های روی نمودار، نتیجه می‌گیریم :

حد $f(x)$ وقتی $x\to ۲^+$ برابر با ۱− است.

این مطلب را با نماد ریاضی زیر نشان می‌دهیم :

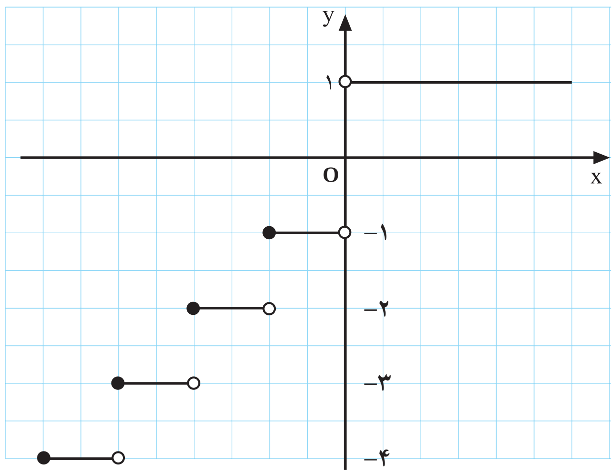
$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=-۱$$

با توجه به این که حد چپ و حد راست تابع f وقتی $x\to ۲$ برابر نیستند نتیجه می‌گیریم که تابع f، وقتی $x\to ۲$، حد ندارد.

فعالیت ۶ـ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده و قسمتی از نمودار آن نیز رسم شده است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x>۰\\ -۱, & x<۰\end{cases}$$



شکل ۳۳ـ۲

۱) با توجه به نمودار این تابع (شکل ۳۳ـ۲)، حدس می‌زنید وقتی $x\to ۰^-$ مقدارهای تابع به چه عددی میل می‌کنند؟

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=?$$

۲) با توجه به تعریف تابع قدرمطلق، وقتی $x>۰$ مقدار $f(x)$ چیست؟

۳) حد $f(x)$، وقتی $x\to ۰^+$ ، چیست؟

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=?$$

۴) با توجه به مرحله‌های ۱ و ۳، وقتی $x\to ۰$ ، آیا مقدارهای $f(x)$ به یک عدد مشخص میل می‌کنند؟

۵) آیا این تابع، وقتی $x\to ۰$ ، حد دارد؟ چرا؟

> اگر حد چپ و حد راست یک تابع در یک نقطه متفاوت باشند آن تابع در آن نقطه حد ندارد.

۶) با توجه به نمودار این تابع می‌توانید بگویید این تابع در چه نقاطی حد ندارد؟

تمرین ۳ـ۲

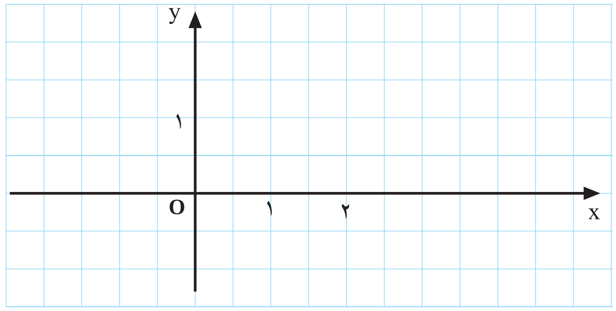
۱ـ تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geq ۱\\ ۰, & x<۱\end{cases}$$

الف) نمودار $y=f(x)$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ رسم کنید (شکل ۳۴ـ۲).

ب) مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ و $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$.

پ) آیا تابع f، وقتی $x\to ۱$ ، حد دارد؟

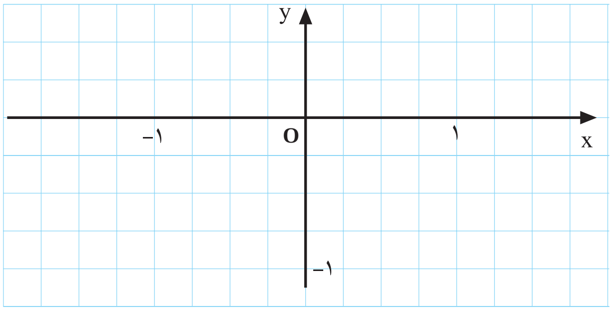


شکل ۳۴ـ۲

۲ــ تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است. در رفتار این تابع وقتی $x \to ۰$ تحقیق کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۰ \quad , & x>۰ \\ \dfrac{x}{|x|} \quad , & x<۰ \end{cases}$$

(راهنمایی: نمودار تابع را در $(-۱\ ,\ ۱)-\{۰\}$ رسم کنید (شکل ۳۵ــ۲)).

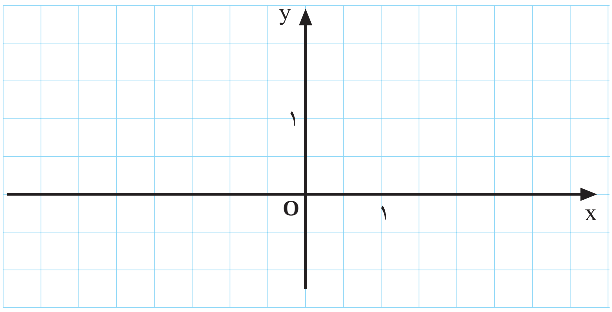


شکل ۳۵ــ۲

۳ــ فرض کنید تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ \quad , & x>۰ \\ x-a \quad , & x<۰ \end{cases}$$

مقدار a را طوری تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود داشته باشد. سپس مقدار این حد را بنویسید و نمودار تابع را رسم کنید (شکل ۳۶ــ۲).

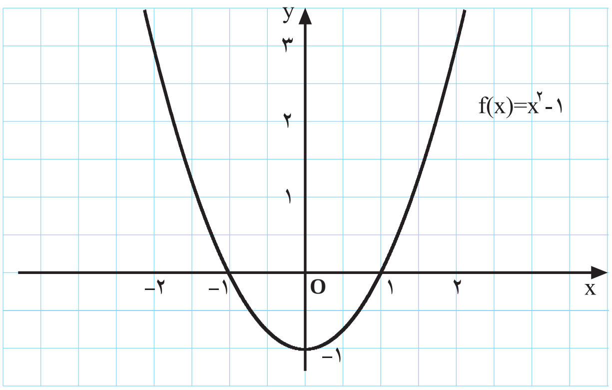


شکل ۳۶ــ۲

فعالیت ۷ــ۲

تابع $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۴x+۳}$ را درنظر بگیرید.

۱) حد تابع $f(x)=x^{۲}-۱$ را، وقتی $x\to ۱$، تعیین کنید (شکل ۳۷ــ۲).



شکل ۳۷ــ۲

۲) حد تابع $g(x)=x^{۲}-۴x+۳$ را، وقتی $x\to ۱$، به‌دست آورید (شکل ۳۸ــ۲).

۳) حد تابع $q(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۴x+۳}$، وقتی $x\to ۱$، به چه صورتی درمی‌آید؟

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۴x+۳}=\cdots$$

۴) آیا می‌توان این حد را با استفاده از مطالبی که تاکنون گفته شده است حساب کرد؟

۵) صورت و مخرج تابع کسری $\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}$ ، یعنی $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=x^2-4x+3$ ، را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کنید.

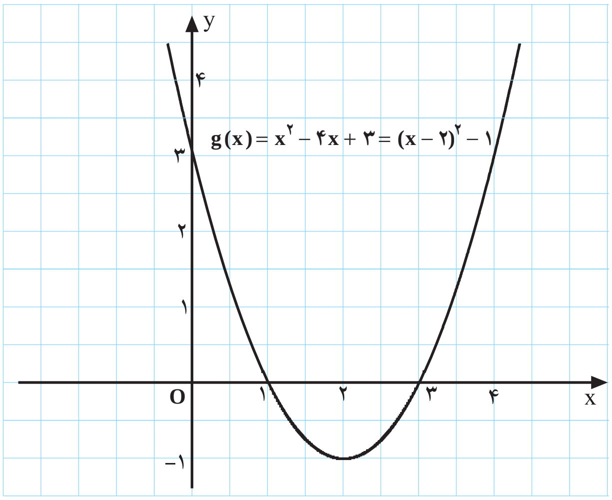
$$x^2-1=(x-1)(\qquad)$$

$$x^2-4x+3=(x-1)(\qquad)$$

۶) با توجه به این که وقتی $x\to 1$ همواره $x\neq 1$ ، یعنی $x-1\neq 0$ ، تابع $q(x)$ را ساده کنید.

$$q(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\frac{(x-1)(\qquad)}{(x-1)(\qquad)}$$

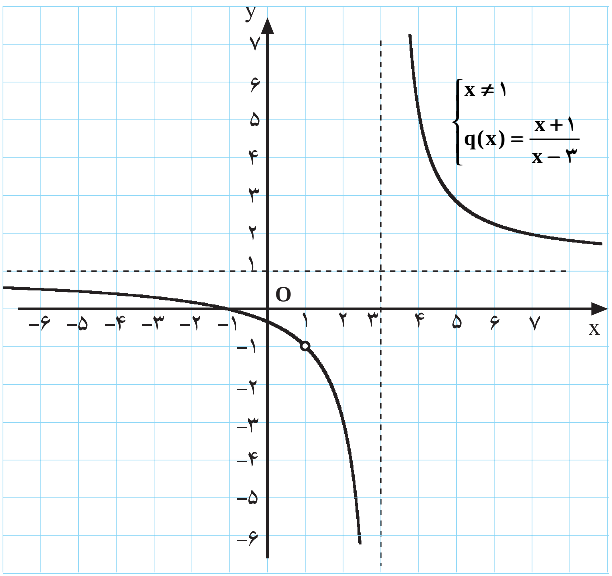
$$=\text{------------}$$



شکل ۳۸ـ۲

۷) آیا $q(x)=\frac{x+1}{x-3}$ ؟

۸) حد تابع $q(x)=\frac{x+1}{x-3}$ را، وقتی $x\to 1$ ، حساب کنید(شکل ۳۹ـ۲).



شکل ۳۹ـ۲

۹) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to 1} q(x)=-1$ درست است؟

به‌طورکلی اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه حد $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ، وقتی $x\to a$ ، به صورت $\frac{0}{0}$ درمی‌آید و نمی‌توان مقدار آن را به کمک مطالبی که تاکنون گفته شده است محاسبه کرد. برای محاسبه‌ی مقدار این حد، با توجه به نوع تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ باید روش مناسبی اختیار کرد.

مطالب ذیل، وقتی که $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای باشند، مفید است.

۵ـ۱ـ۲ـ بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $x-a$: اگر $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ و به ازای $x=a$ داشته باشیم $f(a)=0$ آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. از این ویژگی می‌توان برای تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها استفاده کرد.

فعالیت ۸ ــ ۲

چندجمله‌ای $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ را درنظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x + 2 & x - 2 \\ \hline & \end{array}$$

۱) مقدار $f(2)$ را حساب کنید.

۲) آیا $f(x)$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

۳) خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $(x - 2)$ را به‌دست آورید.

۴) به کمک تقسیم بالا، چندجمله‌ای $f(x)$ را به حاصل‌ضرب عوامل تجزیه کنید.

$$2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)\ (\qquad\qquad)$$

تمرین ۴ ــ ۲

۱) تقسیم‌های روبه‌رو را انجام دهید.

الف) $$\begin{array}{r|l} -2x^3 + 5x^2 + 8x - 20 & x + 2 \\ \hline & \end{array}$$

ب) $$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 2x^2 - 5 & x - 1 \\ \hline & \end{array}$$

پ) $$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 5x + \frac{7}{4} & x + \frac{1}{2} \\ \hline & \end{array}$$

۲) مقدار a را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = ax^3 + (a+1)x^2 - 18$ بر $(x - 3)$ بخش‌پذیر باشد.

روش هورنر

برای به‌دست آوردن خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای بر $(x - a)$ روشی ساده وجود دارد که به **روش هورنر** مشهور است. با ذکر دو مثال این روش را توضیح می‌دهیم :

مثال ۱: برای انجام تقسیم

$$2x^3 - 3x^2 + 5x + 10 \div (x + 1)$$

به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱) چندجمله‌ای را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم.
۲) ضریب‌های چندجمله‌ای را به ترتیب از چپ به راست می‌نویسیم.
(اگر توانی از x نباشد ضریب آن را صفر منظور می‌کنیم.)
۳) ریشه‌ی $(x+۱)=۰$، یعنی صفر مقسوم‌علیه را به‌دست می‌آوریم.

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$$

۴) مقدار ریشه را در جدولی به‌صورت جدول ۱۶ـ۲ می‌نویسیم.

جدول ۱۶ـ۲

		۲	-۳	۵	۱۰
-۱	+	۰			
		۲			

۵) عدد صفر را زیر ضریب بزرگ‌ترین درجه می‌نویسیم و با آن جمع می‌کنیم.
۶) بقیه‌ی عملیات را مطابق جدول ۱۷ـ۲ انجام می‌دهیم.

جدول ۱۷ـ۲

		۲	-۳	۵	۱۰
-۱	+	۰	$(-۱)\times ۲$	$(-۱)\times(-۵)$	$(-۱)\times ۱۰$
		۲	-۵	۱۰	۰

۷) با استفاده از اعداد جدول ۱۷ـ۲ خارج قسمت تقسیم را می‌نویسیم.

$$۲x^۳-۳x^۲+۵x+۱۰=(x+۱)(۲x^۲-۵x+۱۰)$$

مثال ۲: تقسیم $x^۴-۴x^۲+۲x-۴$ بر $(x-۲)$ را به روش هورنر انجام دهید. سپس خارج قسمت تقسیم را بنویسید.

حل۲

جدول ۱۸ـ۲

	۱	۰	-۴	۲	-۴
۲	+۰	۲	۴	۰	۴
	۱	۲	۰	۲	۰

خارج قسمت $=x^۳+۲x^۲+۲$

مثال ۳: حد تابع $q(x)=\dfrac{۳x^۲+x-۴}{x^۲+x-۲}$ را، وقتی $x\to۱$، تعیین کنید.

حل۳ : چون صورت و مخرج کسر مساوی $q(x)$، به ازای $x=۱$ صفر می‌شوند، پس چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج بر $(x-۱)$ بخش‌پذیرند. با استفاده از بخش‌پذیری داریم:

$$۳x^۲+x-۴=(x-۱)(۳x+۴)$$

$$x^۲+x-۲=(x-۱)(x+۲)$$

بنابراین، با توجه به این‌که $x\neq۱$،

$$q(x)=\frac{۳x^۲+x-۴}{x^۲+x-۲}=\frac{(x-۱)(۳x+۴)}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{۳x+۴}{x+۲}$$

لذا،

$$\lim_{x\to۱} q(x)=\lim_{x\to۱}\frac{۳x+۴}{x+۲}=\frac{\lim_{x\to۱}(۳x+۴)}{\lim_{x\to۱}(x+۲)}=\frac{۳+۴}{۱+۲}=\frac{۷}{۳}.$$

فعالیت ۹ــ۲

تابع $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{۳x^۳+۴x^۲-۵x-۲}{x^۴+۲x^۲+۱۳x+۲}$ را در نظر می‌گیریم.

۱) مقدارهای $f(-۲)$ و $g(-۲)$ را به‌دست آورید.

۲) حد $q(x)$، وقتی $x\to -۲$، به چه صورت درمی‌آید؟

۳) به کمک بخش‌پذیری صورت و مخرج کسر مساوی $q(x)$ را تجزیه و بعد ساده کنید.

۴) آیا $q(x)=\dfrac{۳x^۲-۲x-۱}{x^۳+۲x^۲+۶x+۱}$؟

۵) اینک حد $q(x)$ را، وقتی $x\to -۲$، حساب کنید.

۶ــ۱ــ۲ــ قضیّه‌ی فشردگی: اگر به ازای هر x از بازه‌ی I، که شامل عدد a است، مگر احتمالاً در a، داشته باشیم:

$$g(x)\le f(x)\le h(x)$$

$$\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{x\to a} f(x)=L$$

مثال ۱: ثابت کنید $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}=۰$

حل: می‌دانیم که همواره $-۱\le \sin x\le ۱$، پس، اگر x عددی مثبت باشد داریم:

$$-\frac{۱}{x}\le \frac{\sin x}{x}\le \frac{۱}{x}$$

امّا، $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\dfrac{۱}{x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{۱}{x}=۰$. بنابراین، طبق نامساوی‌های بالا و قضیه‌ی فشردگی

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}=۰$$

مثال ۲: تابع f با ضابطه‌ی $(x\neq ۰)$، $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ را در نظر بگیرید. جدول ۱۹ــ۲ تغییرات این تابع را وقتی $x\to ۰$ نشان می‌دهد.

تمرین ۵ ــ ۲

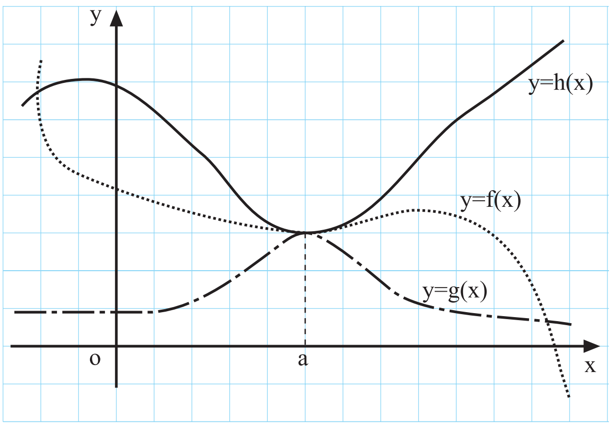
هریک از حدهای زیر را با استفاده از بخش‌پذیری حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۲x+۱}{x^۲+x-۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x^۲+x}{x^۳+۲x}$

پ) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^۲-۴}{(x+۲)^۳}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲+۳x-۱۰}{۳x^۲-۵x-۲}$



شکل ۴۰ــ۲

جدول ۱۹ــ۲

x	...	$-\frac{\pi}{۳۰}$	$-\frac{\pi}{۱۸۰}$	$-\frac{\pi}{۹۰۰۰}$	... ۰ ...	$\frac{\pi}{۹۰۰۰}$	$\frac{\pi}{۱۸۰}$	$\frac{\pi}{۳۰}$	...
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$	...	۰/۹۹۸۱۷۳	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۹۹۹۹۹۸	تعریف‌نشده	۰/۹۹۹۹۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۸۱۷۳	...

به طوری که ملاحظه می‌شود، وقتی $x \to 0$ ، $\frac{\sin x}{x}$ به‌عدد یک میل می‌کند. یعنی، جدول ۱۹ــ۲ نشان می‌دهد که

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

نتیجه‌ی ۱: $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

زیرا، با توجه به این که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، داریم :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

نتیجه‌ی ۲: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{x} = m$ و $\lim_{x \to 0} \frac{\tan mx}{x} = m$ ،

که در آن‌ها m عددی حقیقی و مخالف صفر است.

زیرا، می‌توان نوشت :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \to 0} m . \frac{\sin mx}{mx}$$

با فرض $mx = y$ ، واضح است که وقتی $x \to 0$ ، $y = mx \to 0$ ، بنابراین :

$$\lim_{x \to 0} m \frac{\sin mx}{mx} = \lim_{y \to 0} m . \frac{\sin y}{y} = m . 1 = m$$

به همین ترتیب،

$$\lim_{x \to 0} m \frac{\tan mx}{mx} = \lim_{y \to 0} m . \frac{\tan y}{y} = m . 1 = m$$

مثال‌ها (در رابطه با نتیجه‌ی ۲)

الف) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$ را تعیین کنید.

حل: می‌توان نوشت :

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

ب) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{x}$ را حساب کنید.

حل: داریم :

$$\frac{\tan 5x}{x} = 5 \frac{\tan 5x}{5x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{x} = 5$$

پ) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{3x}{2}}{x}$ را حساب کنید.

حل: داریم :

$$\frac{\tan \frac{3}{2} x}{x} = \frac{3}{2} \frac{\tan \frac{3}{2} x}{\frac{3}{2} x}$$

بنابراین، با فرض $\frac{3}{2} x = t$ داریم :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{3}{2} x}{x} = \frac{3}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\tan t}{t} = \frac{3}{2} .$$

محل حل تمرین

تمرین ۶ــ۲

۱ــ حدهای زیر را حساب کنید. (مستقیماً از نتیجه‌های ۱ و ۲ استفاده کنید.)

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$

پ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

ت) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan \pi x}{x}$

ث) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan \sqrt{2}x}{3x}$

ج) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x \sin x}{x^2}$

۲ــ نشان دهید که اگر n و m اعداد حقیقی غیر صفر باشندآن‌گاه

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

۳ــ اگر m و n اعداد حقیقی غیر صفر باشند حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan mx}{nx}$$

۴ــ با استفاده از تمرین‌های ۲ و ۳ مقدار حدهای زیر را بنویسید.

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sqrt{3}x}$

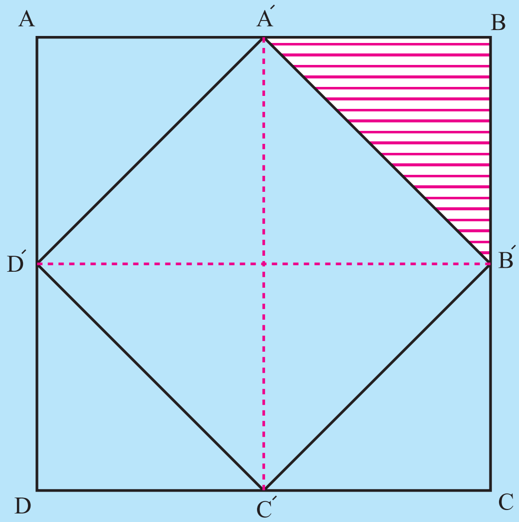
ب) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin \sqrt{5}x}{3x}$

پ) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x \sin 3x}{6x^2}$

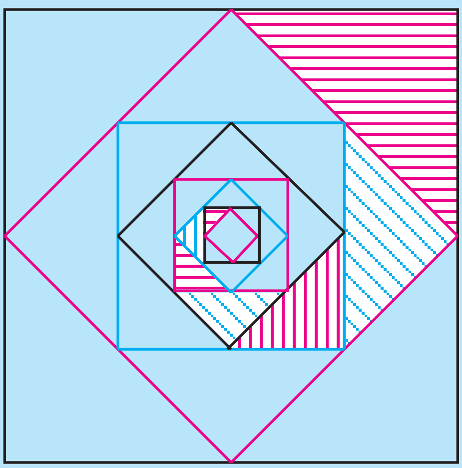
ت) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی



شکل ۴۱ــ۲



شکل ۴۲ــ۲

۱ــ در شکل ۴۱ــ۲ مربعی به ضلع ۴ سانتی‌متر رسم شده است. وسط ضلع‌های مجاور مربع نیز به هم وصل شده‌اند. پاسخ دهید :

الف) مساحت مربع $A'B'C'D'$ چقدر است؟

ب) مساحت قسمت سایه زده شده (مثلث $A'BB'$) چقدر است؟

۲ــ مجدداً وسط ضلع‌های مربع $A'B'C'D'$ شکل مسئله‌ی قبل را به هم وصل کرده‌ایم و مطابق شکل ۴۲ــ۲ یک گوشه‌ی آن را سایه زده‌ایم و این کار را روی مربع جدید تکرار کرده‌ایم و... با توجه به این مطلب، مجموع زیر را حساب کنید.

$$۲+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots=$$

این مجموع با مساحت قسمت‌های سایه زده شده چه رابطه‌ای دارد؟

۳ــ فرض کنید :

$$f(x)=\begin{cases} a-x^{۲} & , \quad x>۱ \\ x^{۲} & , \quad x<۱ \end{cases}$$

اگر تابع f در $x=۱$ حد داشته باشد، مقدار a برابر چیست؟

۴ــ فرض کنید :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲} & , \quad x>۲ \\ ۳ & , \quad x=۲ \\ x-۱ & , \quad x<۲ \end{cases}$$

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)+f(۲)+\lim_{x\to ۲^+} f(x)$$