

# بخش اول

## فصل ششم

### ترکیب دو تابع

#### هدف کلی

آموزش مفهوم ترکیب دو یا چند تابع و کاربردهای آن در حل مسائل

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

- ۱- ضابطه‌ی  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را با داشتن ضابطه‌ی  $f$  و  $g$  بنویسد.
- ۲- مقدار تابع‌های  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را در بعضی از نقطه‌های دامنه‌اش تعریف کند.
- ۳- مسائل مربوط به کاربرد ترکیب تابع‌ها را حل کند.

## پیش‌آزمون (۶)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱- اگر  $f(x) = x^2 + 4$  و  $g(x) = 3x - 1$  مطلوب است

محاسبه‌ی:

الف)  $f(g(1))$  و  $g(1)$

ب)  $f(3)$  و  $g(f(3))$

پ)  $f(g(4))$  و  $g(f(2))$

۲- اگر  $f(x) = 3x$  و  $g(x) = \frac{1}{3}x$  ضابطه‌ی  $f \circ g$  و  $g \circ f$

را بنویسید.

۳- اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  تعیین کنید:

الف)  $f(g(x))$

ب)  $g(f(x))$

۴- اگر  $f(x) = 1 - x^2$  و  $g(x) = \sqrt{x}$  تعیین کنید:

الف)  $D_f$  و  $R_f$

ب)  $D_g$  و  $R_g$

پ)  $D_{f \circ g}$  و  $D_{g \circ f}$

## ۱-۶ ترکیب دو تابع

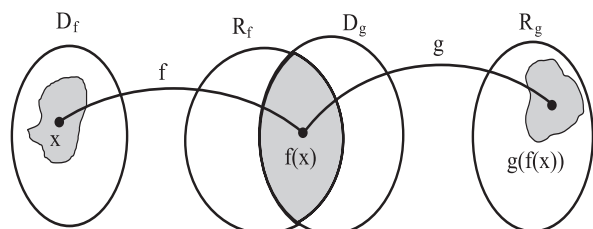
فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع حقیقی باشند به طوری که اشتراک برد تابع  $f$ ، یعنی  $R_f$ ، و دامنه‌ی تابع  $g$ ، یعنی  $D_g$ ، تهی نباشد. یعنی،

$$R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

ترکیب تابع  $g$  با  $f$  را با  $g \circ f$  نشان می‌دهند و با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنند:

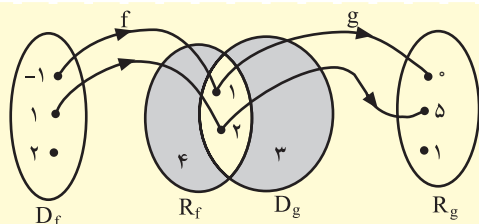
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

شکل ۱-۹۱ نشان می‌دهد که تابع  $g \circ f$  فقط به ازای  $x$ ‌هایی قابل تعریف است که  $f(x)$  به دامنه‌ی تابع  $g$  تعلق داشته باشد.



شکل ۱-۹۱

### ۱-۶-۱ مثال‌های حل شده



شکل ۱-۹۲

(۱) فرض کنید  $f = \{(1, 2), (-1, 1), (2, 4)\}$  و  $g = \{(1, 0), (2, 5), (3, 1)\}$  با توجه به شکل ۱-۹۲ دامنه و برد  $g \circ f$  نوشته شده‌اند.

$$D_{g \circ f} = \{1, -1\}, \quad R_{g \circ f} = \{0, 5\}$$

حل ۲: با توجه به این که برای هر عدد حقیقی  $x$ ، داریم  $f(x) = x^2 + 1 > 0$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \sqrt{f(x)} \\ &= \sqrt{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

(۲) فرض کنید  $f(x) = x^2 + 1$  و  $g(x) = \sqrt{x}$ ، ضابطه‌ی  $g \circ f$  را بنویسید.

حل ۳:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 1 \\ &= \frac{1-x}{x}. \end{aligned}$$

(۳) فرض کنید  $f(x) = x - 1$  و  $g(x) = \frac{1}{x}$ ، ضابطه‌ی  $f \circ g$  را بنویسید.

## تمرین ۱-۱

۱- اگر  $f(x) = x^2 + 2x$  آن گاه  $f(1)$ ،  $f(2)$ ،  $f(t)$ ،  $f(\sqrt{t})$  و  $f(2t+1)$  را تعیین کنید.

۲- فرض کنید  $f(x) = x + 2$  و  $g(x) = x^2$ . مقدار  $(f \circ g)(1)$  و  $(g \circ f)(1)$  را حساب کنید. آیا  $f \circ g = g \circ f$ ؟

۳- ضابطه‌ی  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را در هر یک از حالات زیر حساب کنید.

الف)  $f(x) = 2x$ ،  $g(x) = 1 - 3x$

ب)  $f(x) = x^2$ ،  $g(x) = x + 1$

پ)  $f(x) = x^3$ ،  $g(x) = x^2$

ت)  $f(x) = x^2$ ،  $g(x) = \sqrt{x}$

۴- فرض کنید  $I$  تابع همانی با ضابطه‌ی  $I(x) = x$  باشد.

اگر  $f$  تابع دلخواهی باشد  $f \circ I$  و  $I \circ f$  چه تابعی هستند؟

۵- فرض کنید  $f(x) = 2x + 1$  و  $g(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ .

ضابطه‌ی  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را تعیین کنید.

۶- فرض کنید  $f(x) = x^2 + 1$  و  $g(x) = \sqrt{x-1}$ .

ضابطه‌ی  $f \circ g$  و  $g \circ f$  را تعیین کنید.

۷- فرض کنید  $f^2 = f \circ f$  و  $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^n$ . ضابطه‌ی

$f^n$  را در هر یک از حالات زیر تعیین کنید. (تمرین الف) برای راهنمایی حل شده است.)

الف)  $f(x) = x + 1 \Rightarrow f^2(x) = f(f(x))$   
 $= f(x) + 1 = x + 1 + 1 = x + 2$

$f^3(x) = f(f^2(x)) = f^2(x) + 1$   
 $= (x + 2) + 1 = x + 3 \Rightarrow f^n(x) = x + n$ .

ب)  $f(x) = 2x$

پ)  $f(x) = x^2$ .

## ۲-۶-۱ بازی و ریاضی

(۱) تابع  $f$  بر مجموعه‌ی عددهای حسابی، یعنی

$$W = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(n) = (n^2 \text{ یکان عدد}), (n \in W)$$

مقدارهای  $f^2(n) = (f \circ f)(n)$  را به دست آورید (برای  $n$

دلخواه).

برای کمک به شما مقدار  $f^2$  برای چند عدد در روبه‌رو

حساب شده است. دیده می‌شود که مقدارهای  $f^2(x)$  متعلق به

مجموعه‌ی زیر است:

$$A = \{0, 1, 5, 6\}.$$

آیا هر عدد دلخواه  $n$  متعلق به  $W$  اختیار شود

$$(f \circ f)(n) \in A \text{ (چرا؟)}$$

$$345 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow f^2(345) = 5$$

$$297 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 1$$

$$340 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0$$

$$228 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 6$$

$$16 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 6$$

$$12 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 6$$

$$23 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 1$$

$$71 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$54 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{f} 6$$

$$9 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$252 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 36 \Rightarrow f^3(252) = 36$$

$$100 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{f} 0$$

$$45 \xrightarrow{f} 25 \xrightarrow{f} 25 \xrightarrow{f} 25$$

$$17 \xrightarrow{f} 49 \xrightarrow{f} 81 \xrightarrow{f} 1$$

$$93 \xrightarrow{f} 9 \xrightarrow{f} 81 \xrightarrow{f} 1$$

$$146 \xrightarrow{f} 36 \xrightarrow{f} 36 \xrightarrow{f} 36$$

$$21 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$74 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 36 \xrightarrow{f} 36$$

$$98 \xrightarrow{f} 64 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 36$$

$$109 \xrightarrow{f} 81 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 1$$

$$284576 \xrightarrow{f} 642 \xrightarrow{f} 330 \xrightarrow{f} 312 \xrightarrow{f} 312$$

$$249 \xrightarrow{f} 321 \xrightarrow{f} 312$$

$$201389732564 \xrightarrow{f} 1266 \xrightarrow{f} 431 \xrightarrow{f} 312$$

$$25 \xrightarrow{f} 211 \xrightarrow{f} 312$$

$$9 \xrightarrow{f} 101 \xrightarrow{f} 312$$

$$88 \xrightarrow{f} 220 \xrightarrow{f} 330 \xrightarrow{f} 312$$

$$2 \xrightarrow{f} 110 \xrightarrow{f} 312$$

(۲) تابع  $f$  بر مجموعه‌ی عددهای حسابی به صورت زیر

تعریف شده است:

$$f(n) = (n \text{ یکان})^2, \quad (n \in W)$$

آیا به ازای هر عدد  $n$  از  $W$ ،  $f^3(n) = (fofof)(n)$  به

مجموعه‌ی زیر تعلق دارد؟ چرا؟

$$B = \{0, 1, 25, 36\}$$

در مقابل  $f^3(n)$  برای چند  $n$  حساب شده است.

(۳) فرض کنید  $n = 284576$ ؛ در رابطه با این عدد سه

عدد دیگر می‌توان نوشت:

$$R = 6 = (n \text{ تعداد رقم‌های عدد})$$

$$Z = 4 = (n \text{ تعداد رقم‌های زوج})$$

$$F = 2 = (n \text{ تعداد رقم‌های فرد})$$

اینک تابع  $f$  را بر مجموعه‌ی عددهای طبیعی چنین تعریف

می‌کنیم:

$$f(n) = \overline{RZF}$$

(یعنی  $f(n)$  عدد حاصل از کنار هم گذاشتن سه

عدد  $R$ ،  $Z$  و  $F$  است.)

بنابراین،  $f(284576) = 642$ ،  $f^2$ ،  $f^3$  و ... را حساب

کنید تا وقتی که به عدد ثابتی برسید. این عدد ثابت چیست؟

حالا به مثال‌های روبه‌رو توجه کنید.

آیا برای هر عدد طبیعی  $n$ ، اگر فرایند بالا را روی آن

انجام دهیم، در نهایت به عدد ۳۱۲ می‌رسیم؟ [۱۱]

امتحان کنید!

## آزمون پایانی (۶)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- اگر  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  آن گاه  $f(2)$ ،  $f(\frac{1}{2})$ ،  $f(\sqrt{3})$ ،  $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$  و  $(f \circ f)(x)$  را تعیین کنید.

۲- اگر  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$  و  $g(x) = \sqrt{2-x}$  باشد حساب کنید:

الف)  $f(g(2))$  و  $g(f(1))$

ب)  $f(g(x))$  و  $g(f(x))$

پ) آیا برای هر  $x$ ،  $g(f(x)) = f(g(x))$ ؟

۳- فرض کنید  $f(x) = x^2 + 5x$  و  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ .

الف)  $D_f$  و  $R_g$  را تعیین کنید.

ب)  $D_{f \circ g}$  را حساب کنید.

پ)  $(f \circ g)(x)$  را بنویسید.

۴- اگر  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  و  $g(x) = \sin x$  کدام یک از

مقدارهای  $(f \circ g)(\frac{\pi}{6})$  و  $(g \circ f)(3)$  را می توان تعیین کرد؟ چرا؟

۵- فرض کنید:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

اگر  $n$  عددی طبیعی باشد  $f^n(x)$  را تعیین کنید.

## تمرین‌های تکمیلی بخش اول

۱- نقطه‌های نظیر  $\sqrt{3}$  و  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  را روی یک محور اعداد

حقیقی مشخص کنید (روش انجام کار را شرح دهید).

۲- الف) نقطه‌های  $A(3, 4)$  و  $B(1, 2)$  و  $C(5, 2)$  را

در یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید.

ب) نوع مثلث  $ABC$  را تعیین کنید.

پ) مختصات نقطه‌ی  $A'$ ، وسط ضلع  $BC$ ، را به دست

آورید.

ت) طول میانه‌ی  $AA'$  از این مثلث را حساب کنید.

۳- مقدارهای  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که دو نقطه‌ی

$M(b-1, 1-a)$  و  $M'(a+2, 3b)$  نسبت به محور  $x$  قرینه‌ی

یکدیگر باشند. سپس مختصات این دو نقطه را حساب کنید.

۴- آیا نقطه‌ی  $A(2m-1, m)$  می‌تواند بر نقطه  $B(2, -3)$

منطبق باشد؟ چرا؟

۵- هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آن‌ها

را به صورت مجموعه و نماد بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز

نشان دهید.

الف)  $1 < -2x + 3 < 9$

ب)  $\frac{x+2}{3} > \frac{1-x}{2}$

۶- اگر  $A = [-3, 4]$  و  $B = [2, 5]$  باشد، بازه‌های زیر

را تعیین کنید.

الف)  $A \cap B$

ب)  $A \cup B$

پ)  $A - B$

۷- ولتاژ ورودی یک ترانسفورمر  $23^\circ$  ولت و ولتاژ

خروجی آن  $11/5$  ولت است. ثابت این ترانسفورمر را تعیین

کنید.

۸- کدام مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف)  $\{(2, 5), (3, -1), (4, 6), (-2, 2)\}$

ب)  $\{(-1, 3), (2, 4), (3, 2), (-2, 7), (2, 6)\}$

۹- کدام، ضابطه‌ی یک تابع است؟

الف)  $y + x^2 - 4 = 0$

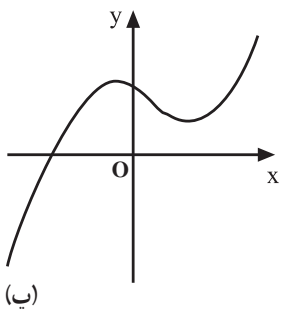
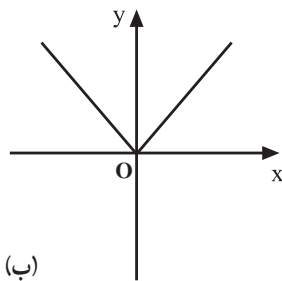
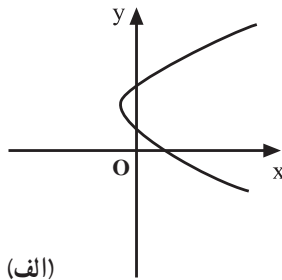
ب)  $y^2 + x - 4 = 0$

پ)  $|y| = x + 3$

ت)  $y = |x| - 2$

۱۰- کدام شکل، نمودار یک تابع را مشخص می‌کند؟

(شکل ۹۳-۱).



شکل ۹۳-۱

۱۱- تابع  $y = -x^2 + 4x$  داده شده است.

۱۵- اگر  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  و  $g(x) = x^2 - 1$  باشد:

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

الف) ضابطه  $(f \times g)(x)$

ب) آیا نقطه  $A(2, 4)$  روی این نمودار است؟

ب) ضابطه  $(g \circ f)(x)$

پ) مقدار  $m$  را چنان بیابید که نقطه  $(2m, 1)$  روی

پ)  $f(2) \times g(2)$

نمودار این تابع باشد.

ت)  $g(f(2\sqrt{2}))$

۱۲- اگر  $f(x) = ax^2 + 3x - a$  مقدار  $a$  را چنان

ت)  $f(3) \times g(\frac{1}{3})$

بیابید که  $f(2) = 8$  باشد.

را تعیین کنید.

۱۳- نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱۶- اگر  $f(x) = \sqrt{2x}$  و  $g(x) = x^2 - 1$  باشد، ضابطه

الف)  $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$  و  $x \in [0, 2\pi]$

$(g \circ f)(x)$  را تعیین کنید.

ب)  $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$  و  $x \in [0, 2\pi]$

۱۴- دامنه‌ی هر یک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف)  $y = -2x^2 + x$

ب)  $y = \frac{3x}{x^2 - 1}$

پ)  $y = \sin 2x$

ت)  $y = \sqrt{5x + x^2}$