



با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

ابوجعفر محمدبن موسی خوارزمی از نوایغ دنیا و مفاخر ایران و اسلام است. وی در قرن دوم هجری به دنیا آمد و در حدود سال ۲۳۲ هجری زندگی را بدرود گفت. معروفترین اثر خوارزمی کتاب جبر و مقابله است که یکی از مشهورترین و رایجترین کتابهای علمی در دنیا بوده است. واژه جبر نخستین بار در کتاب المختصر فی حساب الجبر و المقابله تألیف محمدبن موسی خوارزمی به کار رفت و پس از آشنایی اروپاییان با این کتاب به زبانهای دیگر راه یافت. این واژه (الجبر) از ریشه جَبَرَ در عربی گرفته شده است که به معنای شکسته‌بندی است. خوارزمی آن را بر عمل افزودن جمله‌های مساوی بر دو سوی یک معادله، برای حذف جمله‌های منفی اطلاق می‌کند. واژه مقابله نیز در کتاب خوارزمی به معنای حذف مقدار مساوی از دو طرف معادله است. از نظر خوارزمی جبر، روش بیان عملیات جبری بود. در آن زمان از نمادهایی مانند x و y استفاده نمی‌شد و به جای آن واژه‌هایی مخصوص به کار می‌بردند و مسأله و روش حل آن را با واژه‌ها شرح می‌دادند. واژه‌های جبری خوارزمی عبارت بودند از شیء (مقدار مجهول یا x)، مال (توان دوم مجهول یا x^2) و عدد یا درهم نیز با مقدار معلوم متناظر بود.

خوارزمی، دو کتاب نیز درباره‌ی اسطرلاب نوشت. یکی عمل الاسطرلاب که درباره‌ی چگونگی ساختن اسطرلاب بود و دیگری العمل بالاسطرلاب که درباره‌ی چگونگی به کار بردن آن بود. کتاب الرخامه درباره‌ی ساعت آفتابی افقی و تعیین اوقات نمازها از دیگر آثار او بود. او گفته «تصمیم دارم که اگر عمرم کفاف دهد، تمام تاریخ این دوره را ثبت کنم، چون نوشتن تاریخ خیلی مهم‌تر از کارهای دیگر است». پس از ترجمه‌ی آثار خوارزمی به لاتین بزرگ‌ترین تأثیر را داشته‌اند. نام خوارزمی مرادف شد با هر کتابی که درباره‌ی حساب جدید نوشته می‌شد و اصطلاح الگوریتم که در زبانهای فرانسوی و انگلیسی به معنی روش و قوانین محاسبه است از نام «الخوارزمی» گرفته شده است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی توسط شادروان دکتر غلامحسین مصاحب به فارسی برگردانده شده است.

بخش اول

فصل چهارم

دامنه‌ی تابع‌های حقیقی

هدف کلی

تعیین دامنه‌ی تابع‌هایی که برد آن‌ها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است.

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

- ۱- دامنه‌ی تابع‌های چندجمله‌ای را تعیین کند.
- ۲- دامنه‌ی تابع‌های رادیکالی را مشخص کند.
- ۳- دامنه‌ی تابع‌های کسری را تعیین کند.
- ۴- دامنه‌ی تابع‌های مربوط به مدل ریاضی مسائل را تعیین کند.

پیش‌آزمون (۴)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱- عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $2x - 5$

ب) $-3x + 6$

پ) $(x-2)(3+x)$

ت) $x^2 - 4$

ث) $-x^2 - 2x + 3$

ج) $x^2 + x + 1$

ح) $\frac{x+1}{x-3}$

خ) $\frac{x^2+1}{x^2-x-2}$

۲- نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $-2x + 3 > 0$

ب) $x^2 - x - 2 > 0$

پ) $\frac{x+2}{x+1} < 0$

ت) $\frac{x}{x-1} < 2$

ث) $x^2 - 4 < 0$

۳- هریک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقدارهایی از x

معین (تعریف شده) می‌باشند؟

الف) $\frac{1}{x-2}$

ب) $\sqrt{2-x}$

پ) $\frac{2}{x^2-x-2}$

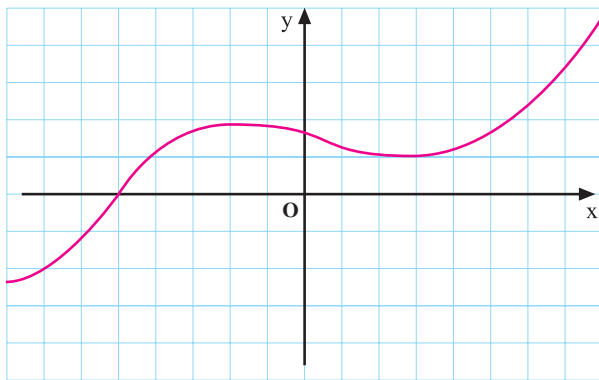
ت) $\sqrt{x^2-x-6}$

۴- دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

ب) $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

پ) $h(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$



۴-۱- دامنه‌ی تابع‌های حقیقی

اگر دامنه‌ی یک تابع حقیقی، مثلاً تابع f ، مشخص نشده باشد، دامنه‌ی f مجموعه‌ی تمام عددهای حقیقی x است که به ازای آن‌ها $f(x)$ تعریف شده حقیقی است. معمولاً اگر f یک تابع حقیقی باشد می‌نویسند:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

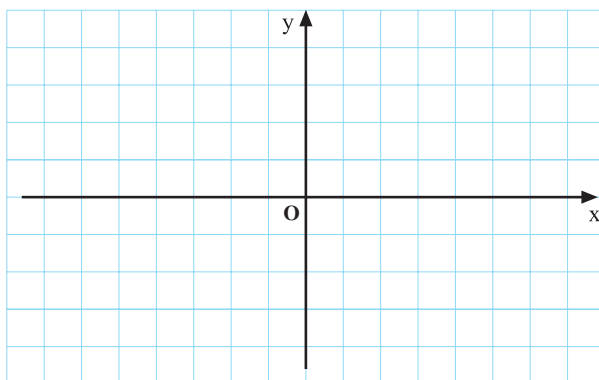
در این قسمت در مورد پیدا کردن دامنه‌ی تابع‌های حقیقی مطالبی را با هم بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱-۱۰

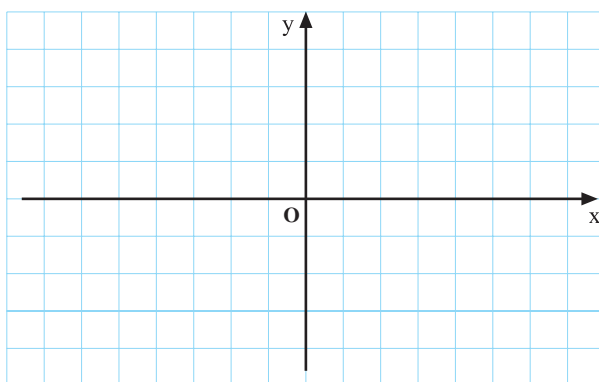
فرض کنید $f(x) = 2x + 1$

(۱) نمودار $y = f(x)$ را رسم کنید (شکل ۱-۸۱).

(۲) دامنه‌ی این تابع را بنویسید.



شکل ۱-۸۱



شکل ۱-۸۲

(۳) اگر $g(x) = x^2 - 1$ ، نمودار $y = g(x)$ را رسم کنید و

دامنه‌ی تابع g را بنویسید (شکل ۱-۸۲).

(۴) اگر تابع p با ضابطه‌ی زیر تعریف شود (یعنی p یک

تابع چندجمله‌ای درجه‌ی n باشد):

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

دامنه‌ی p را بنویسید.

دامنه‌ی هر تابع چند جمله‌ای، مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی، \mathbb{R} ، است.

الف) فرض کنید

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{2x-1}$$

(۱) تابع g به ازای چه مقداری از x تعریف نشده است؟

(۲) دامنه‌ی تابع g را بنویسید.

(۳) اگر $h(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ ، معین کنید عبارت

$x^2 + 5x + 6$ به ازای چه مقادیری از x صفر می‌شود، سپس

دامنه‌ی h را بنویسید.

(۴) اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد و

$A = \{x \in \mathbb{R} | p(x) = 0\}$ دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{p(x)}$ را

بنویسید.

ب) فرض کنید $f(x) = \sqrt{x(3x+2)}$.

(۱) عبارت $x(3x+2)$ را تعیین علامت کنید.

(۲) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

پ) فرض کنید $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$.

(۱) آیا $f(x)$ به ازای هر عدد حقیقی x تعریف شده است؟

(۲) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

ت) دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را بنویسید.

$$f(x) = \sin x \quad (۱)$$

$$g(x) = \cos x \quad (۲)$$

$$t(x) = \sin x - \cos x \quad (۳)$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$$

(۱) عبارت $x^2 + 5x + 6$ به ازای چه مقادیری از x صفر می‌شود؟

(۲) عبارت $x^2 + 5x + 6$ به ازای چه مقادیری از x مثبت است؟

(۳) دامنه‌ی تابع f را تعیین کنید.

$$\text{ج) فرض کنید } h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ و } h(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

(۱) دامنه‌ی تابع h را تعیین کنید.

(۲) دانش‌آموزی برای تعیین دامنه‌ی h چنین عمل کرده است!

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

با توجه به این که اگر $x+1=0$ آنگاه $x=-1$ پس دامنه‌ی تابع h برابر است با $\mathbb{R} - \{-1\}$ ، آیا استدلال این دانش‌آموز درست است؟ چرا؟

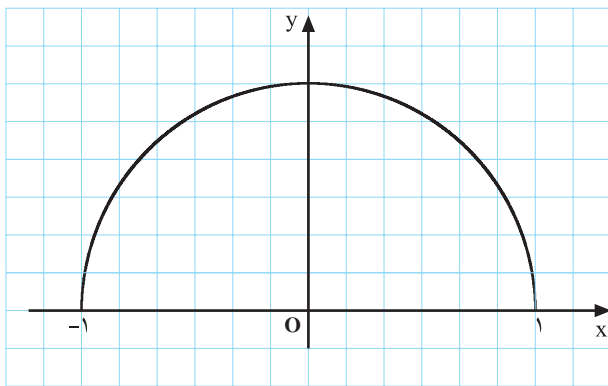
چ) فرض کنید

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

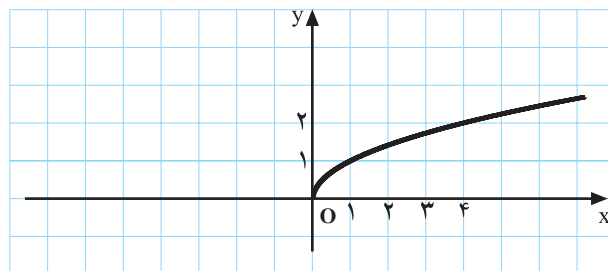
$$x \rightarrow \tan x$$

(۱) با توجه به این که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، دامنه‌ی این تابع را تعیین کنید.

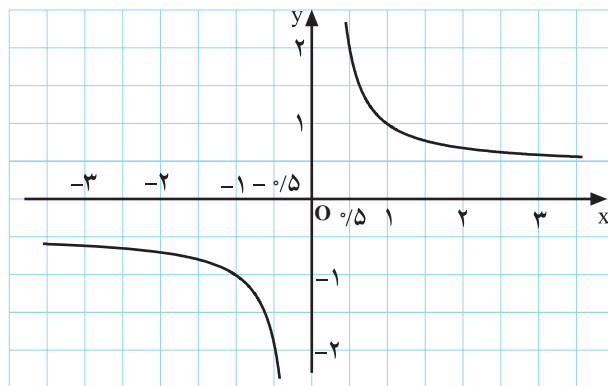
(۲) با روشی مشابه دامنه‌ی تابع $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ را تعیین کنید.



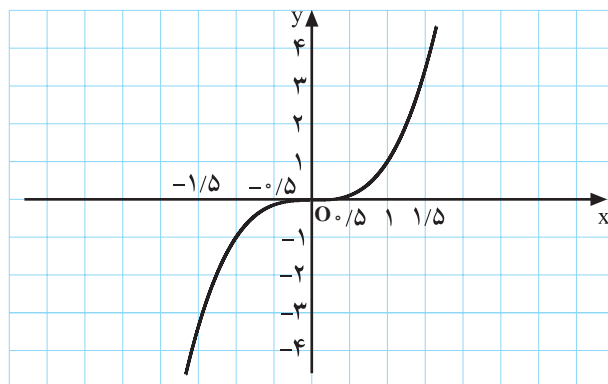
شکل ۸۳-۱ نمودار $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ دامنه $D_f = [-1, 1]$



شکل ۸۴-۱ نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ دامنه $D_f = [0, \infty)$



شکل ۸۵-۱ نمودار $f(x) = \frac{1}{x}$ دامنه $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$



شکل ۸۶-۱ نمودار $f(x) = x^3$ دامنه $D_f = \mathbb{R}$

۱-۴-۱ مثال‌های حل شده

۱- دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{2}{x^2-4}$ را تعیین کنید.

حل ۱: مقدار x هایی که مخرج کسر را صفر می‌کند تعیین می‌کنیم.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \quad \text{یا} \quad x = -2$$

بنابراین،

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}.$$

۲- دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$ را تعیین کنید.

حل ۲: عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد، ضمناً مخرج کسر زیر رادیکال نیز نباید صفر باشد.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

جدول ۹-۱

| | | | | |
|-------------------|-----------|------------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | 1 | $+\infty$ |
| $\frac{x-1}{x+2}$ | $+$ | تعریف نشده | $-$ | $+$ |

$$D_g = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$$

۳- دامنه‌ی تابع $h(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$ را تعیین کنید.

حل ۳: مقدارهایی از x را که مخرج کسر را صفر می‌کنند به دست می‌آوریم.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{یا} \quad x = -3$$

بنابراین،

$$D_h = \mathbb{R} - \{-3, 3\}.$$

۴- در رویه‌رو نمودار چند تابع رسم شده است و دامنه‌ی

آنها نیز نوشته شده است.

تمرین ۸-۱

(۱) دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{2x+1}{x^2-4}$$

ب) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \sqrt{2x-x^2}$$

پ) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{x+2}{x^2+2x+1}$$

ت) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

(۲) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است.

$$f(x) = 2^x$$

الف) جدول $1-1^{\circ}$ را کامل کنید.

| | | جدول $1-1^{\circ}$ | | | | | |
|------|----|--------------------|---|---|---|---|--|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| f(x) | | | | | | | |

ب) با توجه به جدول $1-1^{\circ}$ نمودار تابع f را در دفتر خود رسم کنید.

پ) با توجه به نموداری که رسم کردید تقریبی از $2^{\sqrt{2}}$ به دست آورید.

ت) با توجه به نمودار، x را چنان تعیین کنید که $2^x = 5$.

ث) دامنه‌ی این تابع را مشخص کنید.

۳) دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{1}{x^2+1}$$

ب) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{x-1}{x^2+1}$$

پ) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

ت) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$$

(۴) فرض کنید $f(x) = x - \sin x$ و $g(x) = \cos x + x$. دامنه‌ی این تابع‌ها را تعیین کنید، سپس مقادیر زیر را

حساب کنید.

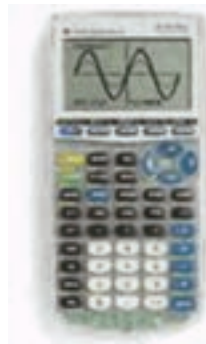
الف) $f(0) + g(0) =$

ب) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) + g\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

پ) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - g\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

ت) $f(1) + g(1) =$

ث) $g(2) - f(2) =$



توجه: در تمرین بالا x باید رادیان در نظر گرفته شود، هنگام استفاده از ماشین حساب به این مطلب توجه کنید. ضمناً،

عدد π را تقریباً $3/14$ منظور کنید.

آزمون پایانی (۴)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

ب) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$

پ) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$

ت) $f(x) = \sqrt{(x - 3)(x + 1)}$

ث) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x - 1}}$

ج) $f(x) = \tan x$

چ) $f(x) = \sin 2x$

۲- تابع f با جدول ۱-۱۱ مشخص شده است :

جدول ۱-۱۱

| | | | | | | | |
|------|----|---|---|----|---|---|----|
| x | -۱ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
| f(x) | ۴ | ۳ | ۰ | -۳ | ۵ | ۷ | -۱ |

الف) این تابع را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) دامنه و برد این تابع را مشخص کنید.