

هدف کلی کتاب

- تشریح مفاهیم تابع، حد، پیوستگی، مشتق و کاربردهای آن به منظور
- ۱- توانایی بخشیدن به هنرجویان در مدل سازی پدیده های ساده به زبان ریاضی ؛
 - ۲- بررسی روش های پاسخ گویی به سؤال ها و مسائل مربوط .

جدول عناوین بخش ها

شماره ی بخش	عنوان بخش
بخش اول	یادآوری و تکمیل
بخش دوم	تابع و مفاهیم آن
بخش سوم	حدّ و پیوستگی
بخش چهارم	مشتق و کاربردهای آن

بخش اول

یادآوری و تکمیل

هدف کلی بخش

آشنایی با معادله، روش حل معادله، تعیین علامت معادله‌ها، حل نامعادله

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	حل معادله
دوم	تعیین علامت و حل نامعادله و قدرمطلق

بخش اول

فصل اول

حل معادله

هدف کلی

بیان مفاهیم مربوط به معادله و روش‌های حل آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

- ۱- معادله و متغیر آن را تعریف کند ؛
- ۲- درجه‌ی معادله را تشخیص دهد ؛
- ۳- معادله‌های هم‌ارز را تعریف کند ؛
- ۴- معادلات درجه اول و دوم را حل کند.

پیش‌آزمون (۱)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۱)

۱- اگر $A = \dots 1, 2, 5$ دامنه‌ی متغیر x باشد مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 5x = 0$ را بیابید.

۲- در خط D به معادله‌ی $5x - 3y = 0$ ،
الف) کدام یک از دو نقطه‌ی $(0, 5)$ و $(-1, 2)$ روی خط D قرار دارد؟
ب) خط D را رسم کنید.

۳- درجه‌ی معادله‌های زیر را تعیین کنید :
الف) $5x^2 - 2x^2 - x^3 + 7x = 0$
ب) $4x^5 - 4x = 0$

۴- معادله‌های زیر را حل کنید :
الف) $4x - 5x = 0$
ب) $4x - 5x^2 = 0$

۵- نمودار تابع روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

۱-۱-۱ حل معادله

بسیاری از مسایل روزمره را می توان به کمک زبان ریاضی به صورت ساده بیان کرد. یکی از ابزارهای این زبان معادله است. در این بخش به بیان بعضی مفاهیم اولیه پیرامون معادله و روش های حل برخی مسایل به کمک معادله می پردازیم.

۱-۱-۱-۱ متغیر: هر نماد یا حرف که جاشین اعضای مجموعه ی مشخصی می گردد متغیر نامیده می شود.

دامنه ی متغیر: اعضای مجموعه ی مشخص فوق را دامنه ی متغیر می نامند.

هرگاه در یک عبارت چند جمله ای دامنه ی متغیر بیان نشده باشد، مجموعه ی اعداد حقیقی دامنه ی آن خواهد بود (جدول ۱-۱).

جدول ۱-۱

دامنه ی متغیر	متغیر	عبارت
\mathbb{R}	x	$5x$
\mathbb{R}	n	$2n-1$
\mathbb{R}	x, y	$3x^2, 6y$
\mathbb{R}	k	$2k$

۱-۱-۲ معادله: اگر هر تساوی، شامل یک یا چند متغیر، به ازای بعضی از مقادیر که جاشین متغیر شوند، درست و به ازای بقیه ی مقادیر نادرست باشد آن تساوی را معادله می گویند. مجموعه ی مقادیری از دامنه ی متغیر که معادله را به یک تساوی تبدیل می کند مجموعه ی جواب های معادله است.

مثال ۲: اگر $A = \{1, 0, -1\}$ ، دامنه ی متغیر x از معادله ی $x^2 - 2x = 0$ باشد، مجموعه ی جواب های آن را بیابید.

مراحل حل:

اگر $x = 1$ باشد، داریم:

پس $x = 1$ جواب معادله نیست.

اگر $x = 0$ باشد، داریم:

پس $x = 0$ جواب معادله است.

اگر $x = -1$ باشد، داریم:

پس $x = -1$ جواب معادله نیست.

بنابراین $x = 0$ جواب معادله است، پس مجموعه جواب

است.

مثال ۱: $7x^2 - 3x - 2 = 0$ ، $5x^2 - 3x = 0$ (الف)

$6x^2 - 5x = 0$ ، $z^2 = 5x$ (د) $7x = \frac{x}{3}$ ، $y = 0$ (ج)

$\frac{x}{2} \cdot 1 - \frac{3x \cdot 7}{5} = 0$ (هـ)

$\frac{5k \cdot 1}{4} - \frac{-7k \cdot 3}{5}$ (ز) $t^3 - 9t = 0$ (و)

$8x^2 - 5x = 0$ (ح)

$2 \sin x - 1 = 0$ (ط)

$3 \cdot 2 \cdot 1 - 2(-1) = (-1)^2$

$3 = 0$

$0 = 2 - 2(0)$

$0 = 0$

$2 - 2(1) = 1 - 2$

$0 = 1$

تمرین

۱- اگر $۱, ۲, ۴, A$ ، دامنه‌ی متغیرهای x, z از معادله‌های زیر باشند، مجموعه‌ی جواب آن‌ها را بیابید.

$$۱- x^2 \cdot ۵x - ۶ \cdot ۰$$

$$۲- z^2 \cdot ۵z - ۴$$

۳- ۱-۱- درجه‌ی معادله: پس از ساده کردن معادله بزرگ‌ترین توان مجهول معادله درجه‌ی آن معادله، نامیده می‌شود.

مثال الف یک معادله‌ی درجه اول است.

مثال ب یک معادله‌ی درجه هفت است.

مثال ج یک معادله‌ی درجه اول است. زیرا پس از ساده کردن بزرگ‌ترین توان مجهول معادله، یک است.

۴- ۱-۱- دو معادله‌ی هم‌ارز: دو معادله‌ی چند جمله‌ای هم‌درجه را هم‌ارز گوئیم در صورتی که دامنه‌ی متغیر و مجموعه جواب آن‌ها یکی باشد.

مثال ۲: دو معادله‌ی الف و ب هم‌ارزند، زیرا دامنه‌ی متغیر هردوی آن‌ها اعداد حقیقی و مجموعه‌ی جواب آن‌ها -۱ است.

۵- ۱-۱- حل معادله‌ی درجه اول: منظور از حل معادله پیدا کردن مجموعه‌ی جواب‌های معادله است.

برای این کار معادله‌ای هم‌ارز با معادله‌ی اول پیدا می‌کنیم که مجموعه‌ی جواب‌های آن خیلی ساده تعیین شود. برای این کار از راه‌های زیر می‌توانیم استفاده کنیم.
(الف) به دو طرف معادله یک عبارت جبری اضافه یا کم کنیم.

(ب) دو طرف معادله را در عددی غیر صفر ضرب یا بر آن تقسیم کنیم.

نکته: با توجه به الف می‌توان نتیجه گرفت که:

۱- با انتقال هر جمله از یک طرف معادله به طرف دیگر علامت آن تغییر می‌کند.

۲- از دو طرف یک معادله جملات مساوی را می‌توان حذف کرد.

مثال ۳: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

مثال ۱:

الف) $۳x \cdot ۱ \cdot ۰$

ب) $x \cdot x^7 - ۹ \cdot ۰$

ج) $(x \cdot ۳)^2 - (x - ۳)^2 \cdot ۰$

$x^2 \cdot ۶x \cdot ۹ - x^2 \cdot ۶x - ۹ \cdot ۱۲x \cdot ۰$

الف) $۲x - ۰ \cdot ۲$ ب) $۵x \cdot ۷ \cdot ۳x \cdot ۵$

$ax \cdot b \cdot ۰, a \cdot ۰$

$\frac{b}{a} \cdot -$ مجموعه جواب

$ax \cdot b \cdot ۰, a \cdot ۰$

$ax \cdot b \cdot (-b) \cdot ۰, (-b)$

$\cdot ax - \cdot b$

$\cdot \frac{ax}{a} \cdot \frac{-b}{a}$

$\cdot x \cdot \frac{-b}{a}$

$ax \cdot b \cdot ۰$

$\cdot ax - \cdot b$

مانند

$x \cdot ۵ \cdot ۵ \cdot x \cdot ۰$

$۵x \cdot ۷ \cdot ۳x \cdot ۵$

مراحل حل: جملات مجهول را به یک طرف و جملات

$$5x - 3x = 5 - 7 \quad (5 - 3)x = -2$$

$$2x = -2$$

$$2x = -2 \quad x = -1$$

معلوم را به طرف دیگر معادله می‌بریم.

با تقسیم دو طرف معادله بر ۲ داریم:

مثال ۴: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{5}$$

$$\frac{2x}{3} - \frac{x}{2} - \frac{x}{5} = \frac{-1}{5} - \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)x = \frac{-1}{5} - \frac{1}{3}$$

مراحل حل: مجهول‌ها را به یک طرف و معلوم‌ها را به

طرف دیگر انتقال می‌دهیم.

$$\left(\frac{20}{30} - \frac{15}{30} - \frac{6}{30}\right)x = \frac{-3}{15} - \frac{5}{15}$$

از دو طرف مخرج مشترک می‌گیریم

$$\frac{29}{30}x - \frac{8}{15} = x - \frac{8}{15} - \frac{30}{15} - \frac{29}{15}$$

$$x - \frac{16}{29}$$

با تقسیم دو طرف تساوی بر $\frac{29}{30}$ داریم:

$$(x-3)^2 - (x-5)^2 = 0$$

$$x^2 - 2(x)(3) + 3^2 - (x^2 - 2(x)(5) + 5^2) = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - x^2 + 10x - 25 = 0$$

$$16x - 16 = 0 \quad 16x = 16 \quad x = 1$$

مثال ۵: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

مراحل حل: به کمک اتحاد مربع، معادله را ساده می‌کنیم.

یادآوری

اتحاد مربع

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x^2 - 7x + 4 = x^2 - 4x$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$7x - 4 = 4x$$

مراحل حل: از دو طرف معادله جمله‌های مساوی را حذف

می‌کنیم:

معلوم‌ها را به یک طرف و مجهول‌ها را به طرف دیگر

انتقال می‌دهیم:

$$7x - 4x = 4 - 4 \quad 3x = 0 \quad x = \frac{-4}{3}$$

فعالیت ۱-۱

الف) معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$۱) \frac{\frac{8}{3} - \frac{4}{9} - \frac{2}{7}}{\frac{5}{7} - \frac{1}{3} - \frac{4}{6}} \cdot \frac{\frac{7}{5} - \frac{1}{6} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{11} - \frac{5}{6} - \frac{2}{2}}$$

ب) مربع‌های خالی روبه‌رو را تکمیل کنید.

$$\frac{\frac{8}{3} - \frac{4}{9} - \frac{2}{7}}{\frac{5}{7} - \frac{1}{3} - \frac{4}{6}} \cdot \frac{\frac{7}{5} - \frac{1}{6} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{11} - \frac{5}{6} - \frac{2}{2}}$$

ج) با جایگذاری عدد مناسب، معادله روبه‌رو را کامل کنید.

$$\Rightarrow \frac{\frac{8}{3} - \frac{4}{9} - \frac{2}{7}}{\frac{5}{7} - \frac{1}{3} - \frac{4}{6}} \cdot \frac{\frac{7}{5} - \frac{1}{6} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{11} - \frac{5}{6} - \frac{2}{2}}$$

د) با جایگذاری عدد مناسب به جای مثلث و مستطیل‌ها

جواب نهایی را بیابید.

$$۲) \frac{\frac{8}{3} - \frac{4}{9} - \frac{2}{7}}{\frac{5}{7} - \frac{1}{3} - \frac{4}{6}} \cdot \frac{\frac{7}{5} - \frac{1}{6} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{11} - \frac{5}{6} - \frac{2}{2}}$$

$$\frac{\frac{8}{3} - \frac{4}{9} - \frac{2}{7}}{\frac{5}{7} - \frac{1}{3} - \frac{4}{6}} \cdot \frac{\frac{7}{5} - \frac{1}{6} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{11} - \frac{5}{6} - \frac{2}{2}}$$

مستطیل‌ها، دایره و مثلث خالی را تکمیل کنید.

$$\Rightarrow \frac{\frac{8}{3} - \frac{4}{9} - \frac{2}{7}}{\frac{5}{7} - \frac{1}{3} - \frac{4}{6}} \cdot \frac{\frac{7}{5} - \frac{1}{6} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{11} - \frac{5}{6} - \frac{2}{2}}$$

به جای مستطیل عدد مناسب بگذارید.

نکته: برای حل معادلات کسری نخست بهتر است با ضرب کردن تمامی جملات در کوچک‌ترین مضرب مشترک تمامی مخرج‌ها، مخرج کسرها را از بین ببریم و سپس معادله را حل کنیم.

$$\frac{2x-1}{5} - \frac{x-2}{3} = \frac{x \cdot 1}{2}$$

مثال ۶: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$۳ \cdot \left(\frac{2x-1}{5} - \frac{x-2}{3} \right) = \frac{x \cdot 1}{2}$$

حل

حل: ابتدا دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مضرب

مشترک اعداد ۲، ۳ و ۵، یعنی عدد ۳۰ ضرب می‌کنیم.

$$۳ \cdot \left(\frac{2x-1}{5} - \frac{x-2}{3} \right) = \frac{x \cdot 1}{2}$$

$$۳ \cdot \left(\frac{2x-1}{5} - \frac{x-2}{3} \right) = \frac{x \cdot 1}{2}$$

$$۳ \cdot \left(\frac{2x-1}{5} - \frac{x-2}{3} \right) = \frac{x \cdot 1}{2}$$

دو طرف تساوی را بر عدد ۱۳- تقسیم می کنیم، پس :

$$- \cdot 13x \cdot 1 \cdot x \cdot \frac{-1}{13}$$

مثال ۷: معادله ی روبه رو را حل کنید.

$$\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} \cdot \frac{x \cdot 3}{6}$$

با ضرب کردن دو طرف تساوی در کوچک ترین مضرب

مشترک (ک،م،م) اعداد ۲، ۳ و ۶ یعنی ۶ داریم :

$$6\left(\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3}\right) \cdot 6\left(\frac{x \cdot 3}{6}\right) \cdot$$

$$3x - 2(x-1) \cdot x \cdot 3 \cdot 3x - 2x \cdot 2 \cdot x \cdot 3$$

چون تساوی روبه رو غیرممکن است، پس معادله ی اولیه

نیز غیرممکن یا ممتنع می باشد.

$$\cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$$

تمرین

۱- با تکمیل جاهای خالی معادله ی روبه رو را حل کنید.

(راهنمایی : همواره داریم $a^\circ \cdot 1, a \cdot 0 \cdot R$)

$$\cdot 4^2 - 4(-2)(-3) \cdot x \cdot \frac{2^\circ \cdot 1^2 \cdot 0^2}{1-2(-3)}$$

$$\Rightarrow \square \cdot \frac{\square}{\square} \Rightarrow \bigcirc \cdot \triangle$$

$$\Rightarrow x \cdot \square$$

۲- معادلات زیر را حل کنید.

$$1) \frac{2-x}{11} \cdot \frac{x \cdot 3}{11} \cdot 7x \cdot 1$$

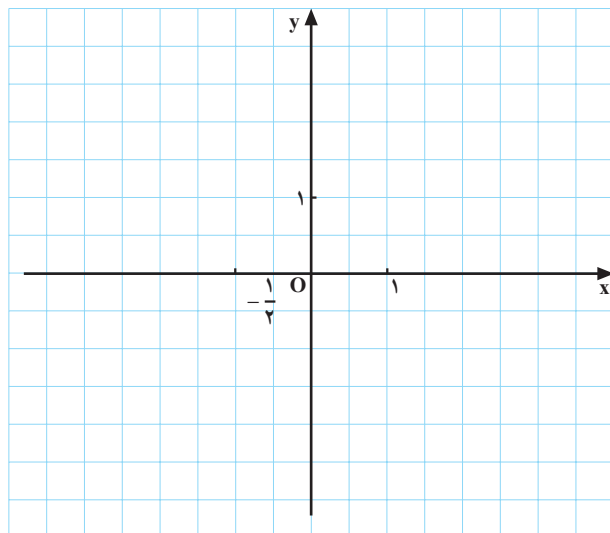
$$2) \frac{x \cdot 7}{5} \cdot 2 - \frac{1-x}{3}$$

$$3) \frac{5z-2}{4} \cdot \frac{-7z \cdot 3}{3}$$

$$4) (2t-3)^2 - 4t^2 \cdot 8 \cdot 12$$

جدول ۱-۲

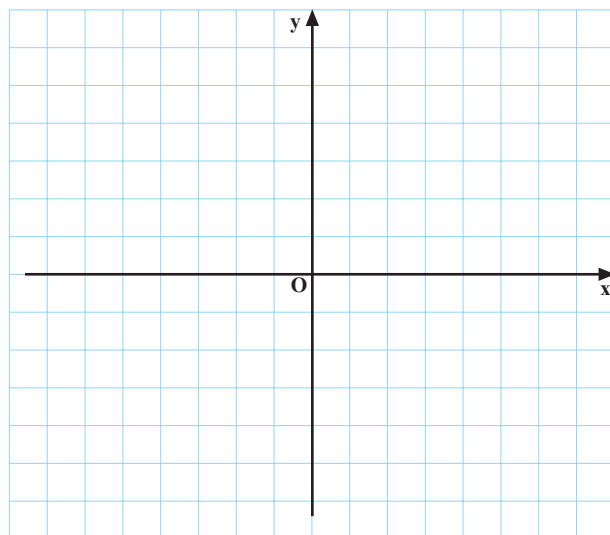
x	°	<input type="text"/>
y	<input type="text"/>	°



نمودار ۱-۱

جدول ۱-۳

x	°	<input type="text"/>
y	<input type="text"/>	°



نمودار ۱-۲

فعالیت ۱-۲

با تکمیل جدول ۱-۲ نمودار خط $y = 2x + 1$ را رسم

کنید.

الف) برای رسم خط، حداقل چند نقطه نیاز داریم؟

ب) طول نقطه‌ی برخورد خط با محور x ها چند می‌باشد؟

ج) آیا نقطه‌ی برخورد خط با محور x ها، جواب معادله‌ی

$2x + 1 = 0$ می‌باشد؟

فعالیت ۱-۳

با تکمیل جدول ۱-۳ نمودار خط $y = 3x - 2$ را رسم

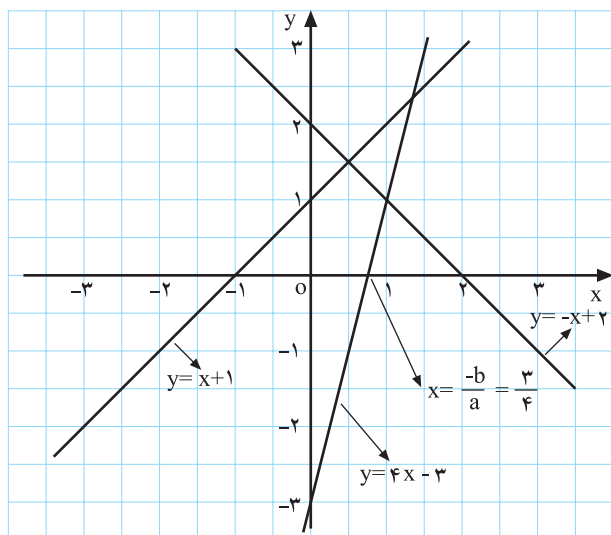
کنید.

الف) با توجه به شکل، جواب معادله‌ی $3x - 2 = 0$

را بیابید.

ب) آیا نقطه‌ی $(-1, 5)$ بر روی خط $y = 3x - 2$ قرار

دارد؟ چرا؟



نمودار ۱-۳



شکل ۱-۴

$$x^2 \text{ و } (x+1)^2$$

$$x^2 \cdot (x+1)^2 - 21 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot 2x \cdot 1 - 21$$

$$\cdot 2x - 20 \cdot \cdot \cdot x \cdot 10$$

$$x \cdot 8000 \cdot 10000 \cdot x \cdot 18000$$

$$x \cdot 18000 \cdot (x \cdot 8000) \cdot x \cdot 47000$$

$$3x \cdot 26000 \cdot 47000$$

$$3x \cdot 47000 - 26000 \cdot 21000 \cdot x \cdot 7000$$

نتیجه: هر معادله که پس از ساده کردن به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ،
 $ax^2 + bx + c = 0$ تبدیل شود، معادله‌ی درجه اول نامیده می‌شود.
 ریشه‌ی این معادله طول محل تلاقی خط $y = ax + b$ با محور
 x ها می‌باشد $(x - \frac{b}{a})$ (شکل ۱-۳).

کاربرد معادله‌ی درجه اول در حل مسائل: معمولاً برای
 حل مسائل ابتدا یک حرف به عنوان متغیر برای مجهول مسئله
 در نظر می‌گیریم و سپس صورت مسئله را به شکل معادله
 می‌نویسیم، به نحوی که ریشه‌ی آن معادله جواب مسئله است.
 مثال ۱: عددی به دست آورید که مربع آن از مربع عدد
 بعدی ۲۱ واحد کم‌تر باشد.

مراحل حل: اگر عدد مورد نظر را x بگیریم عدد بعدی
 ۱. x خواهد بود؛ پس مربع آن‌ها برابر است با:
 بنابراین:

مثال ۲: ۴۷۰۰۰ ریال را بین سه نفر چنان تقسیم کنید که
 اولی ۱۰۰۰۰ ریال بیش‌تر از دومی و دومی ۸۰۰۰ ریال بیش‌تر
 از سومی داشته باشد.

مراحل حل: اگر پول سومی را x ریال بگیریم پول دومی
 ۸۰۰۰ ریال و پول اولی برابر با:

نخست مسئله را به صورت معادله می‌نویسیم:

با حل این معادله‌ی درجه‌ی اول داریم:

— سهم نفر سوم:

$$7000. 8000. 15000$$

$$15000. 10000. 25000$$

— سهم نفر دوم ؛

— سهم نفر اول ؛

مثال ۳: سن پدری ۲۴ سال است. سن او شش برابر سن فرزندش می باشد. چند سال دیگر سن پدر سه برابر سن فرزندش می شود؟

$$24. x$$

مراحل حل: سال مورد نظر را x می گیریم. سن پدر بعد

از x سال :

$$4. x$$

سن پدر ۲۴ سال

سن فرزند ۴ . $\frac{24}{6}$ سال

$$24. x. 3(4. x). 24. x. 12. 3x$$

$$. x - 3x. 12 - 24 - . 2x - . 12$$

— سن فرزند بعد از x سال

بنابر صورت مسئله داریم :

$$. x. 6$$

حل:

تعداد موفقیت : x

کل امتیاز به دست آمده : $8000x$

امتیاز از دست داده : $5000(8-x)$

با توجه به صورت مسئله داریم :

38000 . مجموع امتیاز از دست داده . مجموع امتیاز

به دست آمده

$$8000x. 5000(8-x). 38000$$

پس از ۶ سال سن پدر ۳ برابر سن فرزندش می شود (سن پدر ۳۰ سال و سن فرزند ۱۰ سال است).

مثال ۴: پدری با فرزندش قرار گذاشت که اگر در هر نوبت بیش از ۱۰۰ بار بدون توقف طناب بزند ۸۰۰۰ امتیاز پاداش بگیرد، و در غیر این صورت ۵۰۰۰ امتیاز از وی کسر شود. پس از گذراندن ۸ مرحله فرزند ۳۸۰۰۰ امتیاز دریافت کرد، مشخص کنید که در چند نوبت موفق بوده است.

— بیان مسئله به صورت معادله :

با حل معادله، معلوم می شود که

او ۶ بار موفق بوده و ۲ بار ناموفق.

$$. 8000x. 40000 - 5000x. 38000$$

$$8000x. 5000x. 78000$$

$$. 13000x. 78000. x. 6$$

مثال ۵: مجموع سه عدد طبیعی متوالی برابر ۲۴۳ می باشد
آن اعداد را بیابید.

حل: اولین عدد را x ، دومین عدد را $x + 1$ و سومین عدد
را $x + 2$ فرض می کنیم. بنابراین مجموع آن ها برابر با:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 243$$

— با حل معادله اولین عدد برابر با:

$$x = 80, \quad x + 1 = 81, \quad x + 2 = 82$$

— در نتیجه سه عدد برابر با:

$$80, 81, 82$$

تمرین

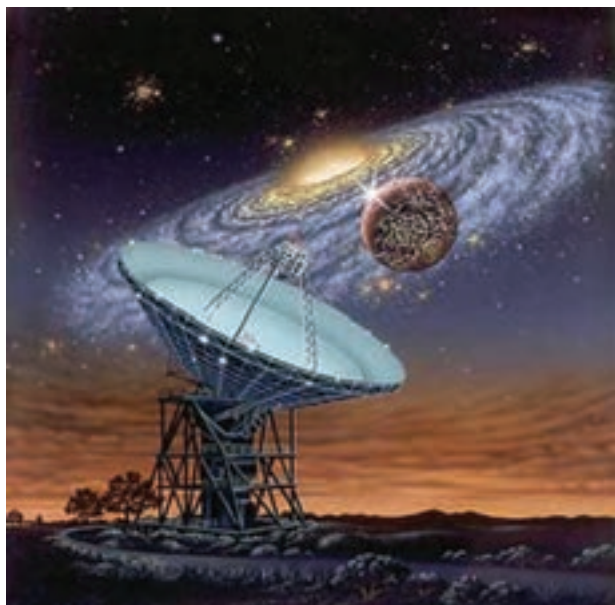
۱— فردی برای پرداخت ۴۹ ریال، روی هم ۱۴ قطعه سکه
۵ ریالی و ۲ ریالی داده است. از هر کدام چند سکه داده است؟
۲— مجموع سه عدد زوج متوالی برابر ۶۰۶ است. آن
اعداد را بیابید.

۳— طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. اگر محیط
مستطیل ۴۴ متر باشد مساحت آن را حساب کنید.

راهنمایی: (طول . عرض) . محیط

عرض . طول . مساحت

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$$



شکل ۱-۵



شکل ۱-۶

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

۶-۱-۱-۱ معادله‌ی درجه دوم: هرگاه پس از

ساده کردن یک معادله، بزرگ‌ترین توان متغیر آن، عدد ۲ باشد، آن یک معادله درجه دوم است. فرم کلی معادله‌ی درجه دوم به صورت رویه‌رو است.

مثال ۱: کدام یک از عبارات زیر، معادله‌ی درجه دوم

است؟

الف) $3x^2 + 7x = 0$

ب) $t^3 + 5t = 0$

ج) $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 0$

حل:

الف) درجه دوم است، زیرا بزرگ‌ترین توان x ، برابر دو

است.

ب) درجه دوم نیست زیرا بزرگ‌ترین توان متغیر t ، سه

است.

– حاصل عبارات $(x-2)^3$ و $(x+2)^3$ را به دست

می آوریم :

– عبارت را ساده می کنیم.

پس معادله ی ج درجه دوم است.

$$0 = (4x-3)^2 - 4(2x-1)^2 \quad \text{د)}$$

– عبارت را ساده می کنیم. پس معادله درجه ی اول است

زیرا :

$$2^3 - 3(x+2)^2 + 3(x-2)^2 - x^3 \quad \text{ج)}$$

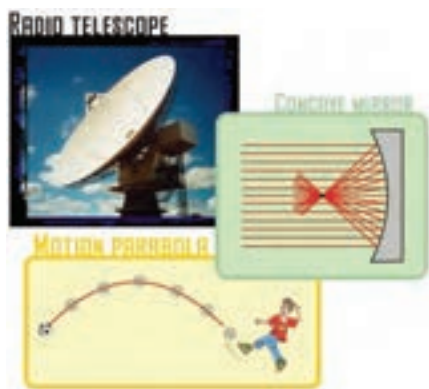
$$-(x^3 - 3(x+2)^2 + 3(x-2)^2 - 2^3).$$

$$0 = \cancel{x^3} - 6x^2 - \cancel{12x} - 8 - \cancel{x^3} + 6x^2 - \cancel{12x} + 8 + 0 = 12x^2 - 16 = 0$$

$$0 = \cancel{16x^4} - 24x - 9 - \cancel{16x^2} + 16x - 4 = 0$$

$$0 = 40x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$



شکل ۷-۱

حل معادله ی درجه دوم: منظور از حل معادله ی درجه

دوم پیدا کردن مجموعه جواب های معادله است. برای این منظور

در سال های گذشته با روش هایی آشنا شده اید که در این جا به

بعضی از آنها اشاره می کنیم.

حل معادله ی درجه دوم به روش تجزیه: از این روش

زمانی استفاده می کنیم که بتوانیم معادله ی درجه دوم را به

عامل های اول تجزیه کنیم و آن را به صورت حاصل ضرب دو

چند جمله ای درجه اول بنویسیم،

سپس با استفاده از ویژگی اعداد که :

$$0 = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$0 = (x+a)(x+b)$$

«اگر حاصل ضرب دو عدد برابر صفر شود، حداقل یکی از آنها مساوی صفر است»

$$0 = x \text{ یا } 0 = y$$

هریک از دو جمله ای ها را مساوی صفر قرارداده و مانند

معادله ی درجه اول آن را حل و ریشه های معادله درجه دوم را

می یابیم.

$$0 = x + a \text{ یا } 0 = x + b$$

$$x = -a \text{ یا } x = -b$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$x^2 - 3x = 0$$

حل: در هر دو جمله x مشترک است، بنابراین از x فاکتور

می‌گیریم:

$$x^2 - 3x = x(x - 3) = 0$$

$$x = 0$$

یا

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

مجموعه‌ی جواب $-3, 0$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$4x^2 - (x - 2)^2 = 0$$

حل: با استفاده از اتحاد مزدوج $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

داریم:

$$4x^2 - (x - 2)^2 = (2x)^2 - (x - 2)^2$$

$a \quad b$

$$= (2x - (x - 2))(2x + (x - 2)) = 0$$

$$(2x - x + 2)(3x - 2) = 0 \Rightarrow (x + 2)(3x - 2) = 0$$

با استفاده از $x \cdot y = 0$ داریم $x = 0$ یا $y = 0$ بنابراین

خواهیم داشت:

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

یا

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$-2, -\frac{2}{3}$$

مجموعه‌ی جواب برابر با:

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

حل: اتحاد جمله‌ی مشترک به صورت روبه‌رو است:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - a)(x - b)$$

پس با توجه به اتحاد جمله‌ی مشترک داریم:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

مجموعه‌ی جواب معادله برابر است با:

$$-3, -2$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$y^2 - y - 3 = 0$$

حل: دو عدد ۵ و ۶- که حاصل ضربشان ۳- و

حاصل جمع آن‌ها ۱- است، پس:

$$y^2 - y - 3 = (y - 5)(y + 6)$$

– هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} y - 5 &= 0 \quad \text{یا} \quad y + 6 = 0 \\ y &= 5 \quad \text{یا} \quad y = -6 \end{aligned}$$

مجموعه‌ی جواب‌های معادله برابر است با:

$$\{5, -6\}$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

حل: در این قسمت جمله مشترک مربع کامل نیست، بنابراین

لازم است که به‌صورت مربع کامل نوشته شود.

$$3x^2 - 5x - 2 = \frac{1}{3}(3^2x^2 - 5(3x) + 6)$$

$$= \frac{1}{3}((3x)^2 - 5(3x) + 6)$$

حاصل ضرب دو عدد ۲ و ۳ برابر ۶ و حاصل جمع آن‌ها

۵ است؛ پس داریم:

$$= \frac{1}{3}(3x - 2)(3x + 3)$$

اکنون هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 0 \quad \text{یا} \quad 3x + 3 = 0 \\ x &= \frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad x = -1 \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{2}{3}, -1 \right\}$$

– مجموعه‌ی جواب‌های معادله برابر است با:

مثال: معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

حل: جمله‌ی مشترک مربع کامل نیست، لازم است که

به‌صورت مربع کامل نوشته شود.

$$5x^2 - 3x - 2 = \frac{1}{5}(5^2x^2 - 3(5x) - 10)$$

$$= \frac{1}{5}((5x)^2 - 3(5x) - 10)$$

حاصل ضرب دو عدد ۲- و ۵ برابر ۱۰- و حاصل جمع

آن‌ها برابر ۳ است، پس:

حال هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{5}(5x - 5)(5x - 2) = 0$$

$$5x - 5 = 0 \quad 5x - 2 = 0 \quad x = 1$$

$$\therefore 5x - 2 = 0 \quad 5x = 2 \quad x = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \frac{2}{5}, 1 \text{ - مجموعه جواب}$$

- مجموعه‌ی جواب برابر است با:

تمرین

۱- ریشه‌های معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $5x^2 - 7x = 0$

۲) $t^3 - 25t = 0$

۳) $4z^2 - 9 = 0$

۴) $y^3 - 15y^2 - 56y = 0$

۲- با تکمیل جاهای خالی ریشه‌های معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $x^2 - 7x = 0$

$$(x - \square)(x - \bigcirc) = 0$$

$$\Rightarrow x = \square \text{ یا } x = \bigcirc$$

۲) $y^2 - 14y = 0$

$$(y - \square)(y - \bigcirc) = 0$$

$$\Rightarrow y = \square \text{ یا } y = \bigcirc$$

۳) $(2x - 1)^2 - (5 - x)^2 = 0$

$$(\square - \square)(\square - \square) = 0$$

$$\Rightarrow (3x - \square)(x - \square) = 0$$

$$\Rightarrow x = \square \text{ یا } x = \triangle$$

۴) $7x^2 - 8x = 0$

$$\frac{1}{7}(7x^2 - 8(7x) \cdot 7) = 0$$

$$\frac{1}{7}(\square - \square)(\square - \square) = 0$$

$$\Rightarrow \square = 0 \text{ یا } \square = 8$$

$$\Rightarrow \square = 0 \text{ یا } \square = 8$$

۵) $5 - x^2 = 0$

$$(\sqrt{5} - \square)(\bigcirc - x) = 0$$

$$\Rightarrow \square = \sqrt{5} \text{ یا } \bigcirc = x$$

$$\Rightarrow \square = \sqrt{5} \text{ یا } \bigcirc = x$$

– با توجه به معادله‌ی درجه دوم روبه رو نکات زیر را
می‌توان برای حل معادله‌های درجه دوم به کار گرفت:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

نکته‌ی ۱: هرگاه مجموع ضرایب معادله‌ی درجه دوم برابر صفر باشد، یعنی:

$$a + b + c = 0 \quad \text{آنگاه ریشه‌های معادله عبارتند از:} \quad x_1 = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = -\frac{c}{a}$$

مثال ۱: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$5x^2 + 7x - 12 = 0$$

حل: مجموع ضرایب برابر صفر است، زیرا:

$$a + b + c = 5 + 7 - 12 = 0$$

– پس ریشه‌های معادله برابر با:

$$x_1 = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{-12}{5} = \frac{12}{5}$$

نکته‌ی ۲: هرگاه در معادله‌ی درجه دوم داشته باشیم:

$$a + c = b$$

$$\text{آنگاه ریشه‌های معادله برابر خواهد بود با:} \quad x_1 = -1 \quad \text{و} \quad x_2 = -\frac{c}{a}$$

مثال ۲: ریشه‌های معادله‌ی روبه‌رو را به دست آورید.

$$5x^2 + 7x + 2 = 0$$

حل: با توجه به رابطه‌ی $a + c = b$ ، ریشه‌ها برابر است با:

$$x_1 = -1 \quad \text{و} \quad x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{2}{5}$$

نکته‌ی ۳: هرگاه معادله‌ی درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، داریم:

$$x_1 = 0 \quad \text{و} \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

مثال ۳: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$7x^2 + 5x = 0$$

حل: در این معادله ضریب c برابر صفر است، پس:

$$x_1 = 0 \quad \text{و} \quad x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{7}$$

نکته ۴: هرگاه معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت روبه‌رو باشد: $ax^2 + c = 0$
 در صورتی معادله دارای جواب حقیقی خواهد بود که a و c دارای علامت‌های مختلف باشند (یعنی $ac < 0$)
 که در آن صورت جواب‌های معادله عبارتند از:

$$x_1, x_2 = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

مثال ۴: معادله‌های الف و ب را حل کنید.

الف) $7x^2 - 2 = 0$

x_1 و $x_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{7}}$

ب) $5x^2 - 4 = 0$

حل: (الف) چون $ac < 0$ ، پس ریشه‌های معادله برابر است

با:

$a = 5$ و $c = 4$ و $ac < 0$

(ب) چون $ac < 0$ پس معادله جواب حقیقی ندارد.

تمرین

۱- معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $5x^2 - 8x - 3 = 0$

۲) $4x^2 - 5x - 1 = 0$

۳) $-7x^2 - 4x - 3 = 0$

۴) $x^2 - 9 = 0$

۵) $4x^2 - 36 = 0$

۶) $x^2 - 5x - 4 = 0$



$$۷) ۱۱x^2 \cdot 9x - 2 \cdot \circ$$

$$۸) ۷x^2 \cdot ۱ \cdot x \cdot ۳ \cdot \circ$$

$$۹) x^3 - ۱۶x \cdot \circ$$

$$۱۰) (x-۱)^2 - ۵(x-۱) \cdot \circ$$

$$۱۱) (3t \cdot ۵)^2 - ۶(3t \cdot ۵)$$

$$ax^2 \cdot bx \cdot c \cdot \circ, a \cdot \circ$$

$$x^2 \cdot \frac{b}{a}x \cdot \frac{c}{a} \cdot \circ \quad x^2 \cdot \frac{b}{a}x \cdot \frac{c}{a} \cdot \circ$$

$$x^2 \cdot \frac{b}{a}x \cdot \frac{-c}{a}$$

$$x^2 \cdot \frac{b}{a}x \cdot \frac{b}{2a} \cdot \frac{b}{2a} \cdot \frac{c}{a}$$

$$(x \cdot \frac{b}{2a})^2 \cdot \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \cdot \frac{c}{4a^2},$$

$$\cdot \# \cdot \circ \quad x \cdot \frac{b}{2a} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot x_1, x_2 \cdot \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



شکل ۸-۱

حل معادله‌ی درجه دوم به روش مربع کامل: گاهی اوقات

جواب‌های معادله‌ی درجه دوم اعداد صحیح نیستند بنابراین از روش تجزیه نمی‌توانیم به راحتی آن‌ها را حدس بزنیم. برای حل این نوع معادله‌ها هرگاه ضریب درجه دوم، یک نباشد آن را با تقسیم معادله بر عدد a به یک تبدیل می‌کنیم. سپس با افزودن مربع نصف ضریب جمله‌ی درجه اول به دو طرف، سمت چپ را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم، و با جذرگیری ریشه‌های معادله را می‌یابیم.