با تشکیل جدول تغییرات تابع نشان دهید که وقتی x که به سمت .+ برود ، f(x) نیز به سمت .+ می‌رود.

مثال ۲: تابع همانی f(x)=x را درنظر می‌گیریم و مقادیر f(x) متناظر با xهای از لحاظ قدرمطلق بزرگ مثبت و منفی محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	−.	.	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰		→	+.
f(x)	−.	.	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰		→	+.

این جدول نشان می‌دهد که وقتی x به سمت .− می‌رود، f(x) نیز به سمت .− می‌رود و هنگامی که x به سمت .+ می‌رود، f(x) نیز به سمت .+ می‌رود. یعنی داریم :

$$\lim_{x\to -.} f(x) = \lim_{x\to -.} (x) = -.$$

$$\lim_{x\to +.} f(x) = \lim_{x\to +.} (x) = +.$$

به‌طور خلاصه می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to ..} (x) = .$$

مثال ۳: تابع $f(x) = x^{۲} + ۱$ را درنظر می‌گیریم و مقادیر f(x) متناظر با مقادیر از لحاظ قدرمطلق بزرگ x را محاسبه کرده و در جدولی می‌نویسیم :

x	−. .	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰		→	+.
f(x)	+. .	$۱۰^{۱۰}+۱$	$۱۰^{۸}+۱$	$۱۰^{۶}+۱$	$۱۰^{۴}+۱$	۱	$۱۰^{۴}+۱$	$۱۰^{۶}+۱$	$۱۰^{۸}+۱$	$۱۰^{۱۰}+۱$		→	+.

این جدول نشان می‌دهد که :

$$\lim_{x\to -.} (x^{۲}+۱) = +. \quad و \quad \lim_{x\to +.} (x^{۲}+۱) = +.$$

به‌صورت خلاصه :

$$\lim_{x\to ..} (x^{۲}+۱) = +.$$

نکتهٔ ۱: دیدیم که $\lim_{x\to ..} (x) = .$. با توجه به حد توان nام یک تابع، حد تابع $f(x) = x^n$ (n عدد صحیح مثبت) در .+ و .− به‌صورت زیر تعیین می‌شود :

اگر n = ۲k آن‌گاه،

$$\lim_{x\to +.} x^n = +. \quad و \quad \lim_{x\to -.} x^n = +.$$

اگر $n = ۲k + ۱$ آن‌گاه،

$$\lim_{x\to+.} x^n = +. \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-.} x^n = -.$$

یعنی حد تابع $f(x) = x^n$ در .) حالتی که n عددی زوج باشد برابر .+ است، و هنگامی که n عددی فرد باشد، $\lim_{x\to+.} x^n = +.$ و $\lim_{x\to-.} x^n = -.$. در این حالت به‌طور خلاصه می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to..} x^n = .$$

مثال ۱: حد $f(x) = x^۲$ در .) برابر است با .+

مثال ۲: حد $f(x) = x^۳$ در .) برابر است با .) یعنی :

$$\lim_{x\to+.} x^۳ = +. \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-.} x^۳ = -.$$

نکتهٔ ۲: اگر $a \neq ۰$ عددی حقیقی باشد حد $f(x) = ax^n$ (n عدد صحیح مثبت) را در .) با توجه به علامت a می‌توانیم به‌دست آوریم.

مثال

$$\lim_{x\to+.} ۲x^۲ = ۲(+.\ ) = +. \qquad \lim_{x\to+.} (-۲x^۲) = -۲(+.\ ) = -.$$

$$\lim_{x\to+.} ۲x^۳ = ۲(+.\ ) = +. \qquad \lim_{x\to-.} (-۲x^۳) = -۲(-.\ ) = +.$$

قضایای حد مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع برای حدهای در .) که مقدار حد اعداد باشند، نیز برقرار است. اما این قضایا را نباید در مورد توابعی که حد .) دارند به‌کار برد. زیرا توابع با حدهای .) ، اصولاً جزو توابعی که دارای حد باشند محسوب نمی‌شوند.

حد چند جمله‌ای‌ها در .) : چند جمله‌ای $f(x) = ۲x^۳ + ۵x^۲ + ۴x - ۱$ را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم حد آن را در .) محاسبه کنیم. برای این کار $f(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$f(x) = ۲x^۳ + ۵x^۲ + ۴x - ۱ = ۲x^۳(۱ + \frac{۵x^۲}{۲x^۳} + \frac{۴x}{۲x^۳} - \frac{۱}{۲x^۳})$$
$$= ۲x^۳(۱ + \frac{۵}{۲x} + \frac{۴}{۲x^۲} - \frac{۱}{۲x^۳})$$

پس :

$$\lim_{x\to..} (۲x^۳ + ۵x^۲ + ۴x - ۱) = \lim_{x\to..} ۲x^۳(۱ + \frac{۵}{۲x} + \frac{۴}{۲x^۲} - \frac{۱}{۲x^۳})$$
$$= \lim_{x\to..} (۲x^۳) \times \lim_{x\to..} (۱ + \frac{۵}{۲x} + \frac{۴}{۲x^۲} - \frac{۱}{۲x^۳})$$

حد مجموع جمله‌های داخل پرانتز دوم در .) برابر با ۱ است پس :

$$\lim_{x\to ..} (۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱)=\lim_{x\to ..}(۲x^۳)\times ۱=\lim_{x\to ..}(۲x^۳)=.$$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\quad +l$ ‏(n عدد صحیح مثبت) در .) ، مساوی حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to ..}(ax^n+bx^{n-۱}+\quad +l)=\lim_{x\to ..} ax^n$$

مثال ۱: حد چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۲+۳x-۱$ در .) برابر است با حد $(۲x^۲)$ در .) ، یعنی :

$$\lim_{x\to ..}(۲x^۲+۳x-۱)=\lim_{x\to ..}(۲x^۲)=+.$$

مثال ۲: حد تابع $f(x)=-۳x^۲+۴x+۵$ در .) برابر است با حد $(-۳x^۲)$ در .) ، یعنی :

$$\lim_{x\to ..}(-۳x^۲+۴x+۵)=\lim_{x\to ..}(-۳x^۲)=-.$$

مثال ۳: حد تابع $f(x)=۳x^۵-۲x^۴+x^۳+۲x^۲+۱$ در .) برابر است با حد $(۳x^۵)$ در .) ، پس داریم :

$$\lim_{x\to ..}(۳x^۵-۲x^۴+x^۳+۲x^۲+۱)=\lim_{x\to ..}(۳x^۵)=.$$

مثال ۴: حد تابع $f(x)=-۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱$ در .) چنین است :

$$\lim_{x\to ..}(-۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱)=\lim_{x\to ..}(-۲x^۳)=.$$

حد تابع $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{ax^m+bx^{m-۱}+\quad +l}{a'x^n+b'x^{n-۱}+\quad +l'}$ در .) (m و n اعداد صحیح مثبت):

چون حد هر چند جمله‌ای در .) ، برابر حد جملهٔ بزرگ‌ترین درجهٔ آن می‌باشد، پس می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to ..}\frac{ax^m+bx^{m-۱}+\quad +l}{a'x^n+b'x^{n-۱}+\quad +l'}=\lim_{x\to ..}\frac{ax^m}{a'x^n}=\lim_{x\to ..}\left(\frac{a}{a'}x^{m-n}\right)$$

بنابراین یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید :

حالت اول m n

$$m\quad n\Rightarrow m-n\quad \circ\Rightarrow \lim_{x\to ..}\left(\frac{a}{a'}x^{m-n}\right)=.$$

یعنی : وقتی درجهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج کسر بیش‌تر است، حد کسر در .) ، برابر . است و علامت آن بستگی به علامت $\frac{a}{a'}$ و زوج یا فرد بودن $m-n$ دارد.

مثال: با به‌کار بردن روش بالا حد کسرهای زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$۱)\ \lim_{x\to ..} \frac{۲x^{۳}+x^{۲}-x+۱}{۵x^{۲}-x+۶} = \lim_{x\to ..} \frac{۲x^{۳}}{۵x^{۲}} = \lim_{x\to ..} (\frac{۲}{۵}x) = .$$

زیرا $\lim_{x\to +.} (\frac{۲}{۵}x) = +. \quad , \quad \lim_{x\to -.} (\frac{۲}{۵}x) = -.$

$$۲)\ \lim_{x\to ..} \frac{-۲x^{۲}+x-۱}{۴x+۳} = \lim_{x\to ..} (\frac{-۲x^{۲}}{۴x}) = \lim_{x\to ..} (-\frac{۱}{۲}x) = .$$

زیرا $\lim_{x\to +.} (-\frac{۱}{۲}x) = -. \quad , \quad \lim_{x\to -.} (-\frac{۱}{۲}x) = +.$

$$۳)\ \lim_{x\to ..} \frac{۴x^{۳}+۲x-۱}{۲x+۵} = \lim_{x\to ..} (\frac{۴x^{۳}}{۲x}) = \lim_{x\to ..} (۲x^{۲}) = +.$$

زیرا $\lim_{x\to +.} (۲x^{۲}) = +. \quad , \quad \lim_{x\to -.} (۲x^{۲}) = +.$

$$۴)\ \lim_{x\to ..} \frac{۳x^{۴}-۲x^{۲}+۵}{-۲x^{۲}+x-۱} = \lim_{x\to ..} (\frac{۳x^{۴}}{-۲x^{۲}}) = \lim_{x\to ..} (-\frac{۳}{۲}x^{۲}) = -.$$

زیرا $\lim_{x\to +.} (-\frac{۳}{۲}x^{۲}) = -. \quad , \quad \lim_{x\to -.} (-\frac{۳}{۲}x^{۲}) = -.$

حالت دوم m=n

$$m=n \Rightarrow m-n=۰ \Rightarrow \lim_{x\to ..} (\frac{a}{a'}x^{m-n}) = \frac{a}{a'}$$

یعنی وقتی درجهٔ صورت و درجهٔ مخرج کسر برابرند، حد کسر در .) برابر است با :

$$\frac{\text{ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ صورت}}{\text{ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج}}$$

مثال:

$$۱)\ \lim_{x\to ..} \frac{۶x-۱}{۲x+۳} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$۲)\ \lim_{x\to ..} \frac{-۲x^{۲}+x-۱}{x^{۲}+۷x+۲} = \frac{-۲}{۱} = -۲$$

$$۳)\ \lim_{n\to +.} \frac{۵n^{۳}+۶n-۲}{۲n^{۳}-۶n+۴}=\frac{۵}{۲}$$

$$۴)\ \lim_{x\to ..} \frac{۶x^{n}-x^{۲}+۵}{-۲x^{n}+۳x-۴}=\frac{۶}{-۲}=-۳$$

حالت سوم m<n

$$m\ .\ n \Rightarrow m-n\ .\ ۰ \Rightarrow \lim_{x\to ..}\left(\frac{a}{a'}x^{m-n}\right)=\lim_{x\to ..}\left(\frac{a}{a'x^{n-m}}\right)=۰$$

یعنی وقتی درجهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج کسر کم‌تر است، حد کسر در .. مساوی صفر است.

مثال:

$$۱)\ \lim_{x\to ..} \frac{۲}{۳x+۴}=۰$$

$$۲)\ \lim_{x\to ..} \frac{۲x+۵}{۳x^{۲}+x+۲}=۰$$

$$۳)\ \lim_{n\to ..} \frac{۲n^{۲}+n-۱}{n^{۳}+n^{۲}-۵}=۰$$

نکته: در برخی حالت‌ها که تابع f(x) کسری است، اما صورت کسر، یا مخرج آن، یا هیچ‌کدام چند جمله‌ای نیستند، باز هم می‌توان با فاکتورگیری از جمله‌هایی از صورت و مخرج که دارای بزرگ‌ترین درجه هستند، حد تابع را به‌دست آورد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ..} \frac{x^{۲}+x+۲}{۲x^{۲}+\sqrt{x^{۲}+۱}}=\lim_{x\to ..}\frac{x^{۲}(۱+\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x^{۲}})}{x^{۲}(۲+\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۴}}})}$$

$$=\lim_{x\to ..}\frac{(۱+\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x^{۲}})}{۲+\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۴}}}}=\frac{۱+۰+۰}{۲+\sqrt{۰+۰}}=\frac{۱}{۲+۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to +.} \frac{-۳x+\sqrt{x+۱}}{۶x+\sqrt{۴x^{۲}-۱}}=\lim_{x\to +.}\frac{x(-۳+\sqrt{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}})}{x(۶+\sqrt{۴-\frac{۱}{x^{۲}}})}=\frac{-۳+\sqrt{۰+۰}}{۶+\sqrt{۴-۰}}=\frac{-۳+۰}{۶+۲}=\frac{-۳}{۸}$$

تمرین

حد هریک از تابع‌های زیر را در ‎ .)‎ ، تعیین کنید. در دو تمرین آخر فقط حد در ‎ .+‎ را به‌دست آورید.

۱) $y=\frac{-1}{3}x+4$

۲) $y=\frac{2}{7}x+1$

۳) $y=3x^2-x+2$

۴) $y=-2x^2-x+3$

۵) $y=x^3+2x^2-1$

۶) $y=-x^3+3x-2$

۷) $y=-(2x-1)^3$

۸) $y=3x^4+5x^2-1$

۹) $y=-x^4+x^2+2$

۱۰) $y=x^5-3x^3+x-1$

۱۱) $y=\frac{2x+1}{x-1}$

۱۲) $y=\frac{-3x+2}{x}$

۱۳) $y=\frac{-x^2+2}{3x^2+5x+1}$

۱۴) $y=\frac{4x^3-x^2+1}{-2x^3+x-2}$

۱۵) $y=\frac{12x^n-x^2+1}{6x^n+x^3+2}(n \;.\; N, n \quad 3)$

۱۶) $y=\frac{3x^2+5x-1}{x^3+7x-2}$

۱۷) $y=\frac{x-5}{2x^2+x-1}$

۱۸) $y=\frac{3x^n-7x+2}{2x^{n+1}+6x^n-1}(n \;.\; N, n \quad 1)$

۱۹) $y=\frac{2x+1}{3}$

۲۰) $y=\frac{6x^2+x-2}{3x-5}$

۲۱) $y=\frac{-3x^2+6x-1}{2x-7}$

۲۲) $y=\frac{2x^3+x-2}{x+3}$

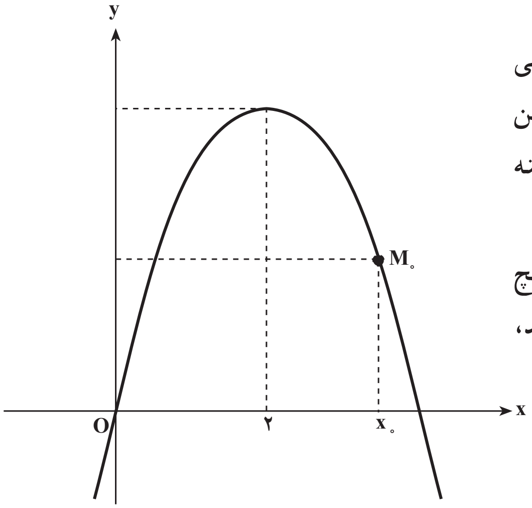
۲۳) $y=\frac{3x^4+x^2-1}{-x^2+5}$

۲۴) $y=\frac{-3x^2+\sqrt{x+2}}{x^2+5x-1}$

۲۵) $y=\frac{2x+1}{x^2+\sqrt{x+2}}$

پیوستگی

پیوستگی در یک نقطه: تابع $f(x)=-x^2+4x$ و نمودار آن را که یک سهمی است درنظر می‌گیریم. این تابع برای همهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است، یعنی $D_f=\mathbb{R}$. بنابراین برای هر $x_0 \;.\; \mathbb{R}$ نقطهٔ $M_0(x_0,f(x_0))$ نقطه‌ای از سهمی است. اما همان‌طوری که می‌دانیم سهمی در هیچ



نقطه‌ای بریدگی ندارد. به‌عبارت دیگر سهمی یک منحنی یک تکه یا پیوسته است. به این علت تابع $f(x)=-x^۲+۴x$ را نیز پیوسته می‌گویند.

به‌طور کلی اگر نمودار تابع f در هیچ نقطه‌ای از دامنهٔ تعریفش بریدگی نداشته باشد، تابع f را پیوسته می‌نامند.

اکنون مقدار تابع f و حد آن را در یک نقطه، مثلاً در $x=۱$ ، به‌دست می‌آوریم. داریم :

$$f(۱)=-(۱)^۲+۴(۱)=-۱+۴=۳$$

$$\lim_{x\to۱}f(x)=\lim_{x\to۱}(-x^۲+۴x)=-۱+۴=۳$$

به‌طوری که دیده می‌شود، در این مثال که f تابعی پیوسته است، مقدار تابع و حد آن در نقطهٔ $x=۱$ با یکدیگر برابرند، یعنی :

$$\lim_{x\to۱}f(x)=f(۱)=۳$$

این ویژگی در هر نقطهٔ دیگر نیز برقرار است. یعنی به‌طور کلی برای هر عدد حقیقی دلخواه $x_۰$ داریم :

$$\lim_{x\to x_۰}f(x)=f(x_۰) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to x_۰}(-x^۲+۴x)=-x_۰^۲+۴x_۰$$

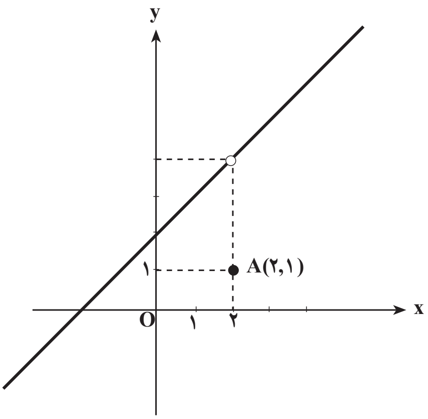
اینک به‌عنوان مثالی دیگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & , \quad x\neq۲\\ ۱ & , \quad x=۲\end{cases}$ را درنظر می‌گیریم. دامنهٔ تعریف این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $D_f=\mathbb{R}$ است.

برای هر $x\neq۲$ داریم $x-۲\neq۰$ و می‌توان نوشت :

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲$$

پس :

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & , \quad x\neq۲\\ ۱ & , \quad x=۲\end{cases}$$



نمودار این تابع را رسم می‌کنیم. این نمودار اجتماع نقطهٔ A(۲,۱) و یک خط است که تنها در نقطهٔ $x=۲$ بریدگی دارد (مطابق شکل). زیرا نقطهٔ A(۲,۱) روی این خط نیست و نقطهٔ B(۲,۴) نیز به نمودار تابع تعلق ندارد. بدین جهت گفته می‌شود که این تابع در $x=۲$ پیوسته نیست (این تابع در سایر نقاط پیوسته می‌باشد).

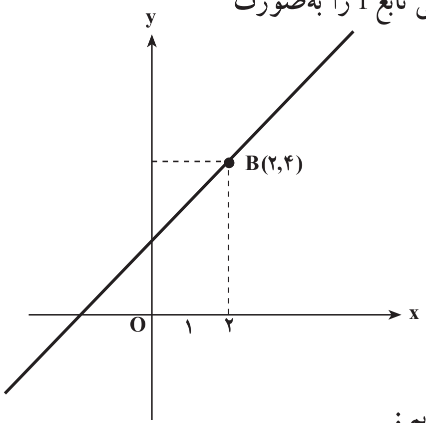
امّا در نقطهٔ $x=۲$ داریم:

$$\lim_{x\to ۲} f(x) = \lim_{x\to ۲}(x+۲) = ۲+۲ = ۴ \neq f(۲) = ۱$$

یعنی حد تابع در $x=۲$ با مقدار تابع در $x=۲$ برابر نیست.

اگر در تابع بالا، f(۲) را مساوی ۴ بگیریم، یعنی تابع f را به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & , \ x\neq ۲\\ ۴ & , \ x=۲\end{cases}$$



تعریف کنیم نقطهٔ B(۲,۴) روی نمودار تابع قرار می‌گیرد و در نتیجه نمودار در هیچ نقطه‌ای بریدگی نخواهد داشت و در این صورت تابع در همهٔ نقاط تعریفش پیوسته است.

از آنچه که گذشت به تعریف زیر رهنمون می‌شویم:

تعریف: تابع f که در بازه I تعریف شده است در نقطه $x_{\circ}$ از دامنه آن را پیوسته گویند، هرگاه:

۱ـ تابع در $x=x_{\circ}$ حد داشته باشد.

۲ـ حد تابع در $x=x_{\circ}$ با مقدار تابع در $x_{\circ}$ برابر باشد یعنی:

$$\lim_{x\to x_{\circ}} f(x) = f(x_{\circ})$$

بنابراین هرگاه تابعی که روی یک بازه تعریف شده است و در یک نقطه از دامنه آن، دست کم یکی از دو شرط بالا را نداشته باشد در آن نقطه ناپیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۲x & , \ x - .\,۱\\ x^۲+۱ & , \ x - .\,۱\end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x=-۱$ بررسی کنیم.

این تابع در $x=-۱$ تعریف شده است و داریم :

$$f(-۱)=-(-۱)^{۲}+۲(-۱)=-۳$$

امّا تابع $f(x)$ در $x=-۱$ دارای حد نیست زیرا :

$$\lim_{x\to -۱^{+}} f(x)=\lim_{x\to -۱^{+}}(-x^{۲}+۲x)=-(-۱)^{۲}+۲(-۱)=-۳$$

$$\lim_{x\to -۱^{-}} f(x)=\lim_{x\to -۱^{-}}(x^{۲}+۱)=(-۱)^{۲}+۱=۲$$

یعنی
$$\lim_{x\to -۱^{+}} f(x)=-۳\neq ۲=\lim_{x\to -۱^{-}} f(x)$$

در نتیجه این تابع در $x=-۱$ پیوسته نیست.

مثال ۲: تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x^{۲}+۱ \ , & x\neq ۲ \\ ۳ \ , & x=۲ \end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x=۲$ بررسی کنیم.

این تابع در $x=۲$ تعریف شده است زیرا $f(۲)=۳$ است، و در $x=۲$ تابع دارای حد است و مقدار این حد برابر است با :

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}(۲x^{۲}+۱)=۹$$

به‌طوری که دیده می‌شود مقدار تابع در $x=۲$ یعنی $f(۲)=۳$ با حد تابع در این نقطه برابر نیست $(۹\neq ۳)$. بنابراین تابع بالا در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته نیست.

مثال ۳: می‌خواهیم پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۳x-۱ \ , & x - . ۲ \\ -۴x+۱ \ , & x - . ۲ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=-۲$ بررسی کنیم.

۱ــ تابع در $x=-۲$ تعریف شده است و داریم $f(-۲)=(-۲)^{۲}-۳(-۲)-۱=۹$

۲ــ در $x=-۲$ تابع دارای حد است چون :

$$\text{حد راست}=l_{۱}=\lim_{x\to -۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to -۲^{+}}(x^{۲}-۳x-۱)=(-۲)^{۲}-۳(-۲)-۱=۹$$

$$\text{حد چپ}=l_{۲}=\lim_{x\to -۲^{-}} f(x)=\lim_{x\to -۲^{-}}(-۴x+۱)=-۴(-۲)+۱=۹$$

$$\Rightarrow\ l_{۱}=l_{۲}=۹\ \Rightarrow\ \lim_{x\to -۲} f(x)=۹$$

۳ــ حد تابع در $x=-۲$ با مقدار تابع در $x=-۲$ برابر است.

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=f(-۲)=۹$$

بنابراین تابع بالا در نقطهٔ $x=-۲$ پیوسته می‌باشد.

مثال ۴: پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ که دامنه آن $[-۱,۱]$ است را در نقاط ۱ و ۱− بررسی می‌کنیم. ۱ و ۱− در دامنه تعریف تابع هستند و داریم $f(۱)=f(-۱)=۰$. حد تابع در این نقاط نیز همان حد چپ یا راست در این نقاط است و داریم :

$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{۱-x^۲}=\lim_{x\to -۱}\sqrt{۱-x^۲}=۰$$

بنابراین حد این تابع در این نقاط با مقدار تابع در این نقاط برابر است و تابع در این نقاط پیوسته است. البته این تابع در سایر نقاط دامنه خود نیز پیوسته است.

مثال ۵: تابع $f(x)=\begin{cases}ax+۳ & , \ x\neq ۱ \ (a\neq ۰)\\ ۵ & , \ x=۱\end{cases}$ مفروض است. مقدار a را طوری تعیین کنید که این تابع در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد.

تابع در $x=۱$ تعریف شده است و

$$f(۱)=۵$$

هم‌چنین در $x=۱$ تابع دارای حد است.

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=\lim_{x\to ۱}(ax+۳)=a+۳$$

حال برای آن که تابع در $x=۱$ پیوسته باشد باید داشته باشیم :

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=f(۱)\ \Rightarrow\ a+۳=۵\ \Rightarrow\ a=۲$$

مثال ۶: تابع $f(x)=\begin{cases}ax^۲+۲ & , \ x>-۱ \ (a\neq ۰)\\ ۳ & , \ x=-۱\\ -۳x+b & , \ x<-۱\end{cases}$ داده شده است. a و b را چنان بیابید که تابع در $x=-۱$ پیوسته باشد.

داریم :

$$f(-۱)=۳$$

$$\text{حد راست}=l_۱=\lim_{x\to -۱^+}f(x)=\lim_{x\to -۱^+}(ax^۲+۲)=a(-۱)^۲+۲=a+۲$$

$$\text{حد چپ}=l_۲=\lim_{x\to -۱^-}f(x)=\lim_{x\to -۱^-}(-۳x+b)=-۳(-۱)+b=۳+b$$

برای این که تابع دارای حد باشد باید $l_۱=l_۲$ یعنی :

$$a+۲=۳+b\ \Rightarrow\ a-b=۱ \qquad (۱)$$