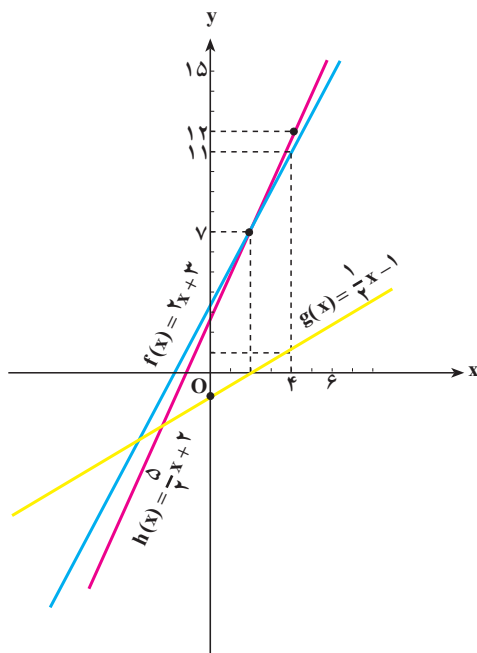


x	۲	۴	۶
f(x)	۴+۳=۷	۸+۳=۱۱	۱۲+۳=۱۵
g(x)	۱-۱=۰	۲-۱=۱	۳-۱=۲
f(x)+g(x)	۷+۰=۷	۱۱+۱=۱۲	۱۵+۲=۱۷
$h(x) = \frac{5}{2}x + 2$	۵+۲=۷	۱۰+۲=۱۲	۱۵+۲=۱۷

به طوری که دیده می شود: $f(2) = 7$ و $g(2) = 0$ و $f(2) + g(2) = 7$ و $h(2) = 7$ است. در جدول های قبل مشاهده می شود که مقادیر $f(x) + g(x)$ و $h(x)$ برای x های مورد نظر با یکدیگر برابرند. این مطلب ما را به تعریف تابع جدید $h = f + g$ ، که مجموع دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ می باشد، رهنمون می سازد یعنی:

$$y = h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

در شکل زیر نمودار تابع های f و g و h مثال بالا را رسم کرده ایم. ملاحظه می شود که برای همه x های مورد نظر اندازه های به دست آمده بر روی نمودار با اعداد به دست آمده در جدول سازگار است.



تمرین

مقدار هر یک از توابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2 - 1$ و $h(x) = x(x^2 - 1)$ را برای $x = -1$ و $x = 0$ و $x = 1$ محاسبه کنید و با تشکیل جدولی مقادیر به دست آمده برای $f(x) \times g(x)$ را با $h(x)$ مقایسه نمایید. آیا از روی آن می توانید تعریفی برای حاصل ضرب دو تابع نتیجه بگیرید؟

همان‌طور که دیده‌ایم، در توابع حقیقی مقدار تابع برای هر مقدار از دامنه، عددی حقیقی است. بنابراین همان‌گونه که در اعداد حقیقی، چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم تعریف می‌شود برای توابع نیز می‌توان مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و خارج قسمت تعریف کرد.

تعریف: دو تابع حقیقی f و g را در نظر می‌گیریم و دامنه آن‌ها را یکسان می‌کنیم، یعنی دامنه آن‌ها را مجموعه $D = D_f = D_g$ قرار می‌دهیم. فرض کنید x متعلق به D باشد، در این صورت:

الف - مجموع دو تابع f و g را با نماد $f+g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

ب - تفاضل دو تابع f و g را با نماد $f-g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

ج - حاصل ضرب دو تابع را با نماد $f.g$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

د - تقسیم دو تابع f و g را با نماد $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

دامنه همه توابع تعریف شده در بالا $D_f = D_g$ است مگر در حالت (د) که باید جواب‌های $g(x) = 0$ را از دامنه مشترک حذف کرد.

مثال ۱: اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = x^2 - 1$ داریم:

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D = \mathbb{R} \quad \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R} \quad \text{برای مجموع، تفاضل و حاصل ضرب}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x + x^2 - 1 = 2x^2 + x - 1$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + x - x^2 + 1 = x + 1$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2 + x)(x^2 - 1) = x^4 + x^3 - x^2 - x$$

و برای $\frac{f}{g}$:

$$D = \mathbb{R} - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x | x^2 - 1 = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{y(x)} = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x-1}$$

$$(f+g)(-2) = 2(-2)^2 + (-2) - 1 = 5 \quad \text{پس :}$$

$$(f-g)(-2) = -2 + 1 = -1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$$

$$(f.g)(1) = 1+1-1-1 = 0$$

$\frac{f}{g}$ در $x=1$ تعریف نشده است. بنابراین $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$ را نمی‌توان تشکیل داد.

مثال ۲: اگر $f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = x^2 - 3$ ، برای جمع، تفریق و ضرب دو تابع داریم:

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 4 + x^2 - 3 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 2x + 4 - x^2 + 3 = -x^2 + 2x + 7$$

$$(f.g)(x) = f(x)g(x) = (2x+4)(x^2-3) = 2x^3 - 6x + 4x^2 - 12$$

$$= 2x^3 + 4x^2 - 6x - 12$$

$$D = \mathbb{R} - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid x^2 - 3 = 0\} \quad \text{و برای تقسیم دو تابع :}$$

$$D = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\} \quad \text{پس :}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+4}{x^2-3}$$

مثال ۳: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ باشد دامنه و قانون تابع‌های $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را چنين

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad \text{حساب می‌کنیم :}$$

$$D_{f-g} = (\mathbb{R} - \{0\}) \cap (\mathbb{R} - \{1\}) = \mathbb{R} - \{0, 1\} \quad \text{داریم :}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1-x^2-x}{x(x-1)} = \frac{-x^2-1}{x(x-1)}$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = D_f \cap D_g - \left\{x \mid \frac{x+1}{x-1} = 0\right\}$$

$$D_{f/g} = \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x(x+1)}$$

مثال ۴: اگر $P(x) = x + 1$ و $h(x) = \sqrt{x-1}$ باشد داریم:

$$D_p = \mathbb{R}, D_h = \{x | x - 1 \geq 0\} = [1, +\infty)$$

$$D_{p \cdot h} = \mathbb{R} \cap [1, +\infty) = [1, +\infty) \quad (p \cdot h)(x) = (x+1)\sqrt{x-1}$$

$$D_{p/h} = [1, +\infty) - \{x | \sqrt{x-1} = 0\} = (1, +\infty)$$

$$\left(\frac{p}{h}\right)(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$$

مثال ۵: در صورتی که $f(x) = 3x - 1$ و $g(x) = \frac{x+1}{3x-1}$ ، داریم:

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \Rightarrow D_{f \pm g} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = 3x - 1 \pm \frac{x+1}{3x-1} = \begin{cases} \frac{9x^2 - 5x + 2}{3x-1} = (f+g)(x) \\ \frac{9x^2 - 7x}{3x-1} = (f-g)(x) \end{cases}$$

$$(f \cdot g)(x) = (3x-1) \left(\frac{x+1}{3x-1}\right) = x+1$$

$$D_{f/g} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} - \{x | g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}, -1\right\}$$

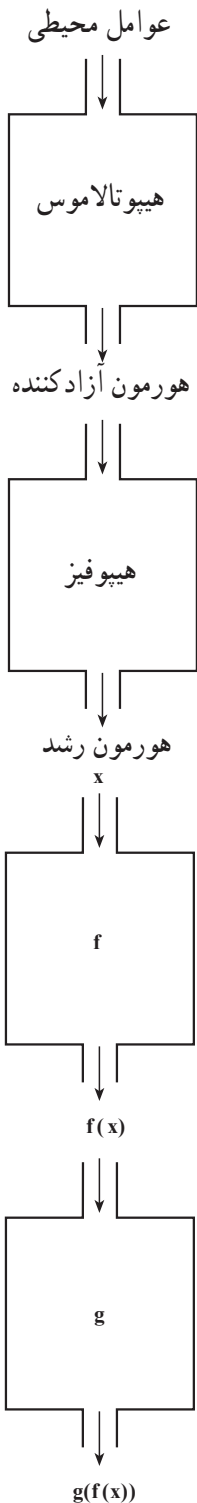
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (3x-1), \left(\frac{x+1}{3x-1}\right) = \frac{(3x-1)^2}{x+1}$$

۲- ترکیب دو تابع حقیقی

هیپوتالاموس بخشی از مغز است که تنظیم محیط درون بدن را انجام می‌دهد. اگر گرسنه یا تشنه می‌شویم یا دمای بدنمان افزایش یا کاهش می‌یابد، همگی با فرماندهی هیپوتالاموس انجام می‌شود،



برای مثال هیپوتالاموس با تأثیر از عوامل محیطی و شرایط درون بدن، ملکولی به نام «هورمون آزادکننده هورمون رشد» را به درون خون ترشح می‌کند. پس از رسیدن این ملکول به غده هیپوفیز که بر سطح زیرین مغز چسبیده است، غده هیپوفیز به آزادسازی هورمون رشد در خون می‌پردازد. هورمون رشد از راه خون به بافت استخوان می‌رسد و بر سلول‌های آن اثر می‌گذارد و باعث رشد استخوان می‌شود.



بنابراین رشد استخوان تابعی از «هورمون رشد» و هورمون رشد تابعی از «هورمون آزادکننده هورمون رشد» است، در نتیجه رشد استخوان از ترکیب این دو تابع به دست می آید. چنانچه تابع را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم کار هیپوتالاموس و هیپوفیز را می توان به صورت روبه‌رو نشان داد :

اکنون اگر عمل هیپوتالاموس بر عوامل محیطی و شرایط درون بدن را با f و عمل غده هیپوفیز را با g نمایش دهیم، ترکیب دو تابع f و g را به صورت روبه‌رو خواهیم داشت :

پیش از تعریف ترکیب دو تابع به مثال‌های زیر توجه کنید :

مثال ۱: اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 2x + 1$ ، می‌خواهیم مقادیر $g(\circ)$ و $g(\frac{1}{3})$ و $g(2x)$ و سپس $f(1)$ و $f(2)$ و $f(2x+1)$ و $f(4x+1)$ را محاسبه کنیم.

$D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$

داریم :

$g(\circ) = 2(\circ) + 1 = 1$, $g(\frac{1}{3}) = 2(\frac{1}{3}) + 1 = 1 + 1 = 2$

$g(2x) = 2(2x) + 1 = 4x + 1$

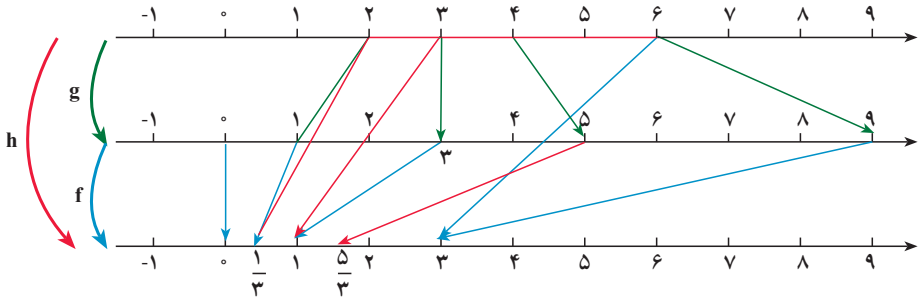
$f(1) = (1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$, $f(2) = (2)^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

$f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) = 4x^2 - 1$

$f(4x+1) = (4x+1)^2 - 2(4x+1) = 16x^2 + 8x + 1 - 8x - 2 = 16x^2 - 1$

مثال ۲: توابع $\begin{cases} h: 2, 6 \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$, $\begin{cases} g: 2, 6 \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 2x - 3 \end{cases}$, $\begin{cases} f: 0, 9 \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{1}{3}x \end{cases}$

را در نظر می‌گیریم و نمودار و جدول آن‌ها را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم :



	g	f	
x	$2x - 3$	$\frac{1}{3}(2x - 3) = \frac{2}{3}x - 1$	
۲	۱	$\frac{1}{3}$	$h(2) = \frac{1}{3}$
۳	۳	۱	$h(3) = 1$
۶	۹	۳	$h(6) = 3$

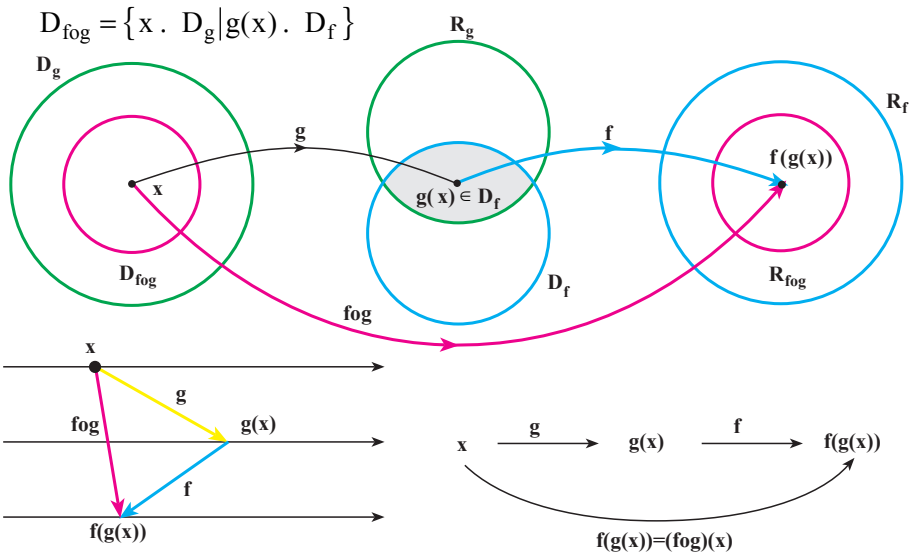
به طوری که دیده می شود :

$$x \xrightarrow{g} 2x - 3 = y \xrightarrow{f} f(y) = f(2x - 3) = \frac{2}{3}x - 1 = h(x) \Rightarrow h(x) = f(g(x))$$

یعنی $h: x \rightarrow \frac{2}{3}x - 1$ تابعی است که نخست بر روی x مانند تابع g عمل می کند و آن را به $g(x) = 2x - 3$ تبدیل می نماید، آنگاه بر $g(x) = 2x - 3$ مانند تابع f عمل می نماید و آن را به $\frac{1}{3}(2x - 3)$ تبدیل می کند.

تابع h را که به این ترتیب به دست می آید ترکیب دو تابع f و g می نامند. اینک به بیان تعریف کلی زیر می پردازیم :

تعریف: ترکیب دو تابع g و f تابعی است که آن را با نماد $f \circ g$ نشان می دهیم (بخوانید اف اُجی) و به صورت $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ یا $f \circ g: x \rightarrow f(g(x))$ تعریف می کنیم، دامنه این تابع همه عددهای حقیقی x متعلق به D_g است به طوری که $g(x)$ متعلق به D_f باشد یعنی :



مثال ۱: اگر $f(x) = x^2$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، داریم :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

توجه کنید که دامنه تابع $(f \circ g)(x) = x$ ، \mathbb{R} نیست زیرا :

$$D_f = \mathbb{R} , D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in [0, +\infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$$

پس :

اما \mathbb{R} . \sqrt{x} . برقرار است؛ زیرا (. , + , ° , . , x .)

بنابراین داریم: $D_{f \circ g} = (. , + , °)$

$$(f \circ g)(x) = x \quad , \quad x \in (. , + , °)$$

مثال ۲: دو تابع $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ داده شده‌اند. دامنه تابع‌های $f \circ g$ و $g \circ f$ را

محاسبه نمایید و سپس توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را تشکیل دهید.

حل: $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = (-1 , +)$

$$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \in (-1 , +) \}$$

$$x - 2 \in (-1 , +) \Rightarrow x - 2 > -1 \Rightarrow x > 1$$

$$D_{g \circ f} = (1 , +)$$

$$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \} = \{ x \in (-1 , +) \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \} = (-1 , +)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)+1} = \sqrt{x-2+1} = \sqrt{x-1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) - 2 = \sqrt{x+1} - 2$$

مثال ۳: تابع $f(x) = \frac{1}{3}x - 3$ داده شده است تابع $f \circ f$ را تشکیل دهید.

حل: $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f \circ f} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3}x - 3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{3}f(x) - 3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x - 3\right) - 3$$

$$(f \circ f)(x) = \frac{1}{9}x - 1 - 3 = \frac{1}{9}x - 4$$

مثال ۴: اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = x - 2$ ، جدول زیر همه عملیات تعریف شده روی این دو

تابع را نشان می‌دهد.

عمل	تابع	قانون تابع	دامنه
+	$f+g$	$(f+g)(x) = x^2 + x - 2$	$D_f \cap D_g$
-	$f-g$	$(f-g)(x) = x^2 - x + 2$	$D_f \cap D_g$
\times	$f \cdot g$	$(fg)(x) = x^2(x-2)$	$D_f \cap D_g$
,	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-2}$; $x \neq 2$	$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$
o	$f \circ g$	$(f \circ g)(x) = (x-2)^2$	$\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$
	$g \circ f$	$(g \circ f)(x) = x^2 - 2$	$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

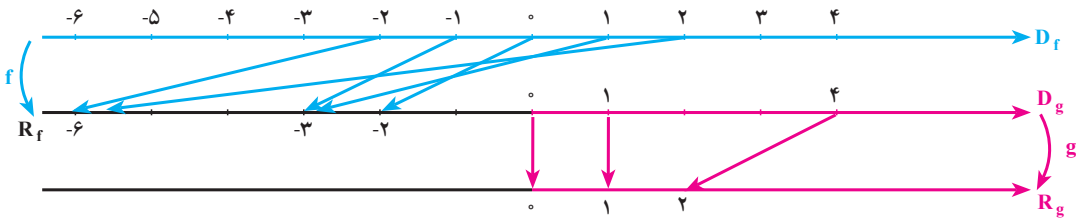
توجه: به طوری که دیده می شود $(g \circ f)(x) = x^2 - 2$ و $(f \circ g)(x) = (x-2)^2$ و چون

$$(x-2)^2 \neq x^2 - 2 \text{ پس در حالت کلی } f \circ g \neq g \circ f$$

در برخی از موارد ترکیب دو تابع ممکن نیست به مثال زیر توجه کنید.

مثال: دو تابع $g: x \rightarrow \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$ و $f: x \rightarrow -x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$ داده شده اند، نمودار زیر

نشان می دهد که ترکیب $g \circ f$ ممکن نیست زیرا $D_g \cap R_f = \emptyset$



تمرین: آیا در مثال بالا ترکیب دو تابع به صورت $f \circ g$ ممکن است؟

مثال: دو تابع $f(x) = \frac{2}{x}$ و $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ داده شده اند. عملیات روی این دو تابع را می توان

نظیر جدول قبل مشخص کرد.

عمل	تابع	قانون تابع	دامنه
+	$h = f + g$	$h(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x^2}$	$\mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$
-	$h = f - g$	$h(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{1-x^2}$	$\mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$
.	$h = f \cdot g$	$h(x) = \frac{2}{x} \times \frac{1}{1-x^2} = \frac{2}{x(1-x^2)}$	$\mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$
,	$h = \frac{f}{g}$	$h(x) = \frac{2}{x}, \frac{1}{1-x^2} = \frac{2(1-x^2)}{x} \quad g(x) \neq 0$	$\mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$
,	$h = \frac{g}{f}$	$h(x) = \frac{1}{1-x^2}, \frac{2}{x} = \frac{x}{2(1-x^2)} \quad f(x) \neq 0$	$\mathbb{R} - \{0, -1, +1\}$
o	$h = f \circ g$	$h(x) = f(g(x)) = \frac{2}{\frac{1}{1-x^2}} = 2(1-x^2)$	$\{x \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\} \mid \frac{1}{1-x^2} \in \mathbb{R} - \{0\}\} = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$
o	$h = g \circ f$	$h(x) = g(f(x)) = \frac{1}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2-4}$	$\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{2}{x} \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}\} = \mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، تابع $P(x) = f(x) + g(x)$ را به دست آورید.

$$D_f = \{x \mid 1-x \geq 0\} = (-\infty, 1] \quad \text{داریم:}$$

$$D_g = \{x \mid x-1 \geq 0\} = [1, +\infty)$$

$$D_p = D_f \cap D_g = \{1\}, \quad P(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1} \quad \text{پس:}$$

$$P = \{(1, 0)\} \quad \text{یا } P(1) = 0, \quad \text{بنابراین}$$

تمرین

۱- توابع f و g داده شده اند، تابع های $f \circ g$ و f/g و دامنه های آنها را به دست آورید.

$$f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = 4x + 2$$

$$f(x) = \frac{2x-3}{5}, \quad g(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f(x) = 2x^2 - x, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \quad g(x) = x-1$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}, \quad g(x) = \frac{x-3}{x+3}$$

$$f(x) = \sin 2x, \quad g(x) = \sin x$$

$$f(x) = \tan x, \quad g(x) = \cot x$$

$$۲- \text{ توابع } f(x) = -2 \text{ و } g(x) = x^2 + 1 \text{ داده شده اند:}$$

الف - توابع $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ و $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید؛

ب - نمودار تابع های f , g و $f+g$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید (بهتر است در ترسیم از رنگ های مختلف استفاده شود).

۳- برای توابع f و g داده شده در زیر، تابع های $f \circ g$ و $g \circ f$ و دامنه های آنها را مشخص

نمایید.

$$۱) f(x) = x+2, \quad g(x) = x^2 - 3$$

$$۲) f(x) = x^2 + x, \quad g(x) = \sqrt{4x+1}$$

$$۳) f(x) = \frac{x}{x+1} \quad , \quad g(x) = 2x^2 - x + 1$$

$$۴) f(x) = \cos x \quad , \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$۵) f(x) = x^2 + 2x + 1 \quad , \quad g(x) = |x|$$

۴- اگر $f(x) = x$ و $g(x) = (x+1)^2$ باشد $(g \circ f)(x) - (f \circ g)(x)$ را بیابید.

۵- اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = ax^2 + bx + c$ باشد a و b و c را طوری تعیین کنید که

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 3x + 4 \text{ باشیم}$$

۶- اگر $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}$ باشد $g \circ f$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۷- اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ باشد $f \circ f$ را به دست آورید و سپس $f, f(f(3))$ را محاسبه نمایید.

حد و پیوستگی

احمد یکی از دانش‌آموزان درس ریاضی ۳ است. احمد علاقه‌مند به رسم توابع و تشخیص

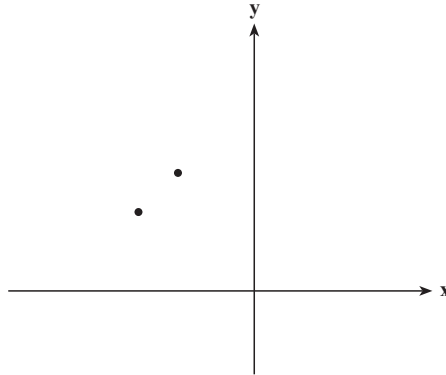
چگونگی نمودار تابع است. یک روز او تصمیم گرفت نمودار تابع $y = f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ را در

بازه $3, 3-$ رسم کند. احمد با استفاده از ماشین حساب با محاسبات تقریبی جدول زیر را تشکیل داد

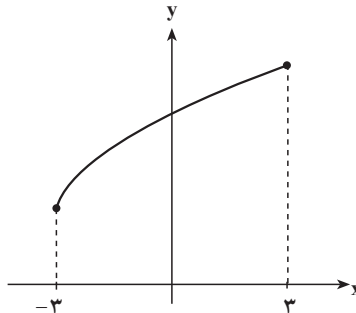
x	-3	-2/5	-2	-1/5	-1	-0/5	0	0/5	1/5	2	2/5	3
y	2	2/7	3	3/22	3/41	3/58	3/73	3/87	4/12	4/23	4/34	4/44

احمد به‌ازای $x=1$ مقدار تابع را حساب نکرد. چون تابع در این نقطه تعریف نشده است و این

نقطه در دامنه تابع قرار ندارد. او نقاط به‌دست آمده از نمودار تابع را در صفحه مشخص کرد.



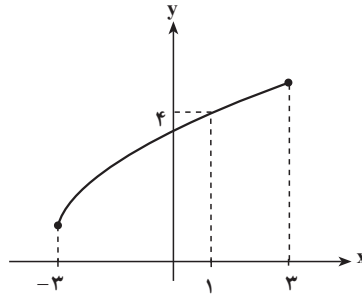
احمد نتیجه گرفت نمودار تابع باید به شکل زیر باشد.



یکی از دوستان احمد گفت این تابع در $x=1$ تعریف نشده است اما این نمودار مقداری برای این تابع در $x=1$ مشخص می‌کند. حتماً در این نتیجه‌گیری اشکالی وجود دارد. احمد برای اطمینان از درستی نتیجه‌گیری خود گفت بهتر است مقادیرهای این تابع در اطراف نقطه $x=1$ را بیشتر بررسی کنیم. اگرچه تابع در $x=1$ تعریف نشده است ولی می‌توانیم برای مقادیرهایی از x نزدیک ۱ مقادیرهای تابع را حساب کنیم و ببینیم آیا مقادیرهای به دست آمده همانند نمودار رسم شده عدد خاصی را نشان می‌دهند؟ این بار احمد جدولی ساخت که مقادیرهای تابع را در نزدیکی‌های نقطه ۱ حساب کند.

x	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	$\rightarrow 1$	۱/۰۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
y	۳/۹۴	۳/۹۷	۳/۹۹۷	۳/۹۹۹۷	۳/۹۹۹۹۷	$\rightarrow ?$	۴/۰۰۰۰۰۲	۴/۰۰۰۰۲	۴/۰۰۰۰۲	۴/۰۰۲	۴/۰۲

با محاسبه جدول بالا احمد نتیجه‌گیری کرد که با نزدیک شدن مقادیرهای x به ۱ مقادیرهای $f(x)$ به ۴ نزدیک می‌شوند. نمودار رسم شده برای تابع نیز چنین مطلبی را نشان می‌دهند.



آنچه که احمد برای بررسی این تابع در اطراف نقطه ۱ انجام داد حدگیری نام دارد و می‌گویند حد تابع $y = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$ در نقطه ۱ برابر ۴ است.

موارد بسیاری پیش می‌آید که تابعی مانند $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a تعریف نشده باشد ولی ما علاقه‌مند باشیم بدانیم که مقادیرهای تابع برای مقادیرهای x نزدیک a چگونه است. در این حالت باید بررسی کرد که با نزدیک شدن x به a آیا مقادیرهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟



تمرین

۱- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با قانون $f(x) = x^2 + 3x + 4$ مفروض است.

مقدار $f(x)$ را برای هر x داده شده در جدول‌های صفحه بعد محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجه محاسبه را بنویسید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

x	-3	$-2/9$	$-2/5$	$-2/1$	$-2/0.1$	$-2/0.01$	$-2/0.001$	$-2/0.0001$	$-2/0.00001$	\rightarrow	-2	
$f(x)$	\rightarrow											
x	-2	$.$	$-1/99999$	$-1/9999$	$-1/999$	$-1/99$	$-1/9$	$-1/8$	$-1/5$	$-1/2$	-1	
$f(x)$		$.$										

نتیجه: جدول‌های بالا نشان می‌دهند که وقتی x به سمت عدد ... نزدیک می‌شود، تابع $f(x)$ به عدد ... نزدیک می‌شود.

۲- تابع $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با قانون $g(x) = x^2 - 2x$ داده شده است. مقادیر $g(x)$ را برای هر x داده شده در جدول زیر محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجه را بنویسید.

x	0	0.1	0.5	0.8	0.9	0.99	0.999	0.9999	\rightarrow	1	
$g(x)$	\rightarrow										
x	1	$.$	$1/0.0001$	$1/0.001$	$1/0.01$	$1/1$	$1/2$	$1/5$	$1/9$	2	
$g(x)$		$.$									

نتیجه: جدول بالا نشان می‌دهد...

۳- تابع $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با قانون $h(x) = -x^2 + 4$ مفروض است. مقدارهای $h(x)$ را برای هر x داده شده در جدول زیر محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجه را بنویسید.

x	\rightarrow	-1	-0.9	-0.5	-0.3	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	\rightarrow	0	$.$	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.2	0.5	1		
$h(x)$	\rightarrow	\rightarrow											$.$								

نتیجه: جدول بالا نشان می‌دهد...

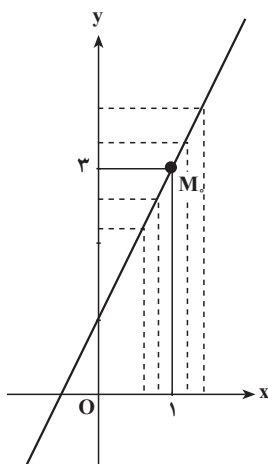
مثال ۱: تابع $f(x) = 2x + 1$ را در نظر می‌گیریم و مقدار این تابع را برای برخی مقادیر x کوچک‌تر از ۱ که به تدریج به عدد ۱ نزدیک می‌شوند، هم‌چنین مقدار این تابع را برای بعضی مقادیر x بزرگ‌تر از ۱ که به تدریج به عدد ۱ نزدیک می‌شوند، محاسبه می‌کنیم.

x	0	0.5	0.9	0.99	0.999	\rightarrow	1	$.$	$1/0.01$	$1/0.1$	$1/1$	$1/5$	2
$f(x)$	1	2	2.8	2.98	2.998	\rightarrow	3	$.$	3.002	3.02	3.2	4	5

نمودار تابع $f(x) = 2x + 1$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است دو نقطه از خط را مشخص کنیم:

$$A \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$



همان‌طور که از جدول و نمودار دیده می‌شود با نزدیک شدن متغیر x به عدد ۱، مقدار تابع f یعنی $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

مثال ۲: تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ داده شده است. می‌خواهیم:

الف - رفتار این تابع را در نزدیکی $x_0 = 2$ بررسی کنیم؛

ب - نمودار این تابع را رسم کرده و از روی آن درستی محاسبه قسمت الف را بررسی کنیم.

حل: الف - مقادیر $f(x)$ را برای برخی از مقدارهای x نزدیک به عدد ۲ محاسبه می‌کنیم و در

جدول زیر می‌نویسیم.

x	۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→ ۲	.	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۲/۹	۳
$f(x)$	۲	۲/۰۴	۲/۲۵	۲/۶۴	۲/۸۱	۲/۹۸	۲/۹۹۸	→ ۳	.	۳/۰۰۲	۳/۰۲	۳/۲	۴/۲۵	۵/۶۱	۶

به‌طوری که دیده می‌شود، هرگاه x به عدد ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ به عدد ۳ نزدیک می‌شود.