

مثال ۸: اگر یک سنگ‌ریزه از بالای برجی به طرف پایین رها شود و شتاب جاذبه زمین $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ باشد، در این صورت فاصله پیموده شده d از موقع رها شدن پس از t ثانیه، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d(t) = 4.9t^2$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید فاصله پیموده شده d تابعی از t است. دامنه این تابع بازه $0, t_1$ است که t_1 زمان رسیدن سنگ‌ریزه به زمین است.

مثال ۹: انرژی پایه در بدن به مقدار انرژی گفته می‌شود که برای تأمین سوخت دستگاه‌های غیرارادی درون بدن مانند قلب، ریه، کلیه، دستگاه گوارش، دستگاه تنفس، غدد درون‌ریز و مانند این استفاده می‌شود.

به‌طور معمول $\frac{2}{3}$ از انرژی دریافتی بدن از غذاها، صرف تأمین فعالیت‌های پایه و $\frac{1}{3}$ دیگر برای تأمین سوخت فعالیت‌های فیزیکی روزانه است. برای مثال، مقدار کالری لازم برای یک کارمند در یک شبانه‌روز از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$30 \times \text{وزن بدن برحسب کیلوگرم} = \text{مقدار انرژی لازم برای بدن}$$

چنانچه وزن کارمندی 80 کیلوگرم باشد، برای تأمین انرژی موردنیاز خود به $2400 = 80 \times 30$ کالری در یک شبانه‌روز احتیاج دارد. بنابراین اگر این شخص روزانه بیش از 2400 کالری دریافت کند، آن‌گاه دچار اضافه وزن شده و اگر کمتر از 2400 کالری دریافت کند، سبب کاهش وزن می‌شود. ولی اگر همان 2400 کالری را دریافت کند وزن او ثابت باقی می‌ماند. با توجه به فرمول مقدار انرژی لازم برای بدن، ملاحظه می‌کنیم که مقدار این انرژی تابعی از وزن انسان است. هرچه وزن بیشتر باشد، مقدار انرژی مصرفی لازم برای بدن بیشتر و هرچه وزن کمتر باشد، مقدار انرژی مصرفی لازم برای بدن نیز کمتر می‌شود، دامنه این تابع بازه x_1, x_2 است که x_1 کمترین وزن انسان‌ها و x_2 بیشترین وزن انسان‌ها است.

مثال ۱۰: یکی از روش‌های مرسوم سنجش وزن ایده‌آل افراد، استفاده از شاخص توده بدنی یا BMI^1 است که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$BMI = \frac{\text{وزن برحسب کیلوگرم}}{\text{مجدور طول قد برحسب متر}}$$

^۱ - Body Mass Index

پس از محاسبه BMI یکی از حالت‌های زیر برای هر فرد اتفاق می‌کند.

شخص لاغر است و کمبود وزن دارد $\Rightarrow BMI < 19$.

شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است $\Rightarrow 19 \leq BMI < 25$.

شخص اضافه وزن دارد $\Rightarrow BMI \geq 25$.

شخص چاق و وضعیت بحرانی دارد. $\Rightarrow BMI \geq 30$.

با این روش، وضعیت وزنی هر فردی مشخص می‌شود و افرادی که اضافه وزن دارند، با یک

رژیم مناسب می‌توانند به محدوده سلامت وزنی برسند. اما وزن ایده‌آل چیست؟

در پاسخ به این سؤال باید بگوییم که وزن ایده‌آل با سن شما رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش

سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا می‌رود و BMI افزایش می‌یابد. به همین جهت

متخصصان علوم تغذیه به کمک جدول سن، BMI مناسب گروه سنی افراد مختلف را به صورت زیر

تعیین می‌کنند.

گروه سنی	BMI
۱۹-۲۴	۲۲
۲۵-۳۴	۲۳
۳۵-۴۴	۲۴
۴۵-۵۴	۲۵
۵۵-۶۴	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

پس از یافتن BMI مناسب با گروه سنی هر فرد، وزن ایده‌آل طبق فرمول زیر محاسبه می‌شود:

مجدور قد برحسب متر \times BMI = وزن ایده‌آل برحسب کیلوگرم

اکنون که وزن ایده‌آل خود را دانستید، معلوم می‌شود که چه قدر اضافه وزن یا چه قدر کمبود

وزن دارید.

با دقت در فرمول وزن ایده‌آل درمی‌یابیم که وزن ایده‌آل تابعی از طول قد هر فرد است،

هم‌چنین چون وزن ایده‌آل از حاصل ضرب BMI در مجدور قد برحسب متر به دست می‌آید، مشخص

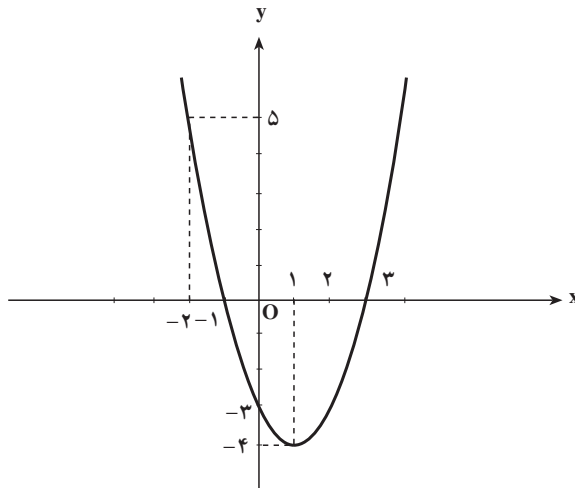
می‌شود که وزن ایده‌آل تابعی از BMI و در نتیجه گروه سنی هر فرد می‌شود. در این فرمول طول قد

و BMI متغیرهایی مستقل و وزن ایده‌آل متغیری وابسته به آن‌ها است.

در سال گذشته با تابع خطی که ضابطه آن به صورت $y = ax + b$ است آشنا شدید، همچنین رسم نمودار برخی از توابع درجه دوم را به کمک انتقال تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ مطالعه کردید. به نمودار تابع درجه دوم با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ سهمی می‌گوییم. در زیر رسم نمودار یک تابع درجه دوم را به کمک نقطه‌یابی مشاهده می‌کنید.

مثال ۱۱: نمودار تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ را رسم کنید.

حل: می‌دانیم که نمودار تابع بالا یک سهمی است. با توجه به آن که $f(x) = (x-1)^2 - 4$ با انتقال سهمی $y = x^2$ به اندازه یک واحد به راست و ۴ واحد به پایین، نمودار این تابع رسم می‌شود.



معادله کلی سهمی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

مثال ۱۲: معادله یک سهمی را بیابید که از نقاط $(0, -1)$ ، $(1, 0)$ ، $(2, 3)$ بگذرد.

حل: داریم:

$$f(0) = 0 + 0 + c \Rightarrow -1 = c$$

$$f(1) = a(1)^2 + b(1) + c \Rightarrow 0 = a + b - 1 \Rightarrow a + b = 1$$

$$f(2) = a(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 3 = 4a + 2b - 1 \Rightarrow 4a + 2b = 4$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 0$$

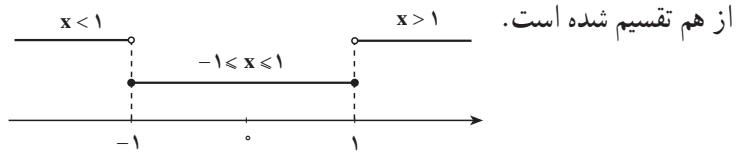
که از آن نتیجه می شود :

$$f(x) = x^2 - 1$$

تابع چند ضابطه ای

هرگاه دامنه یک تابع را به چند مجموعه جدا از هم تقسیم کنیم، به طوری که اجتماع آن مجموعه ها برابر با دامنه تابع باشد و روی هر مجموعه ضابطه ای متمایز تعریف کنیم، در این صورت یک تابع چند ضابطه ای به دست می آید.

مثال ۱۳: دامنه تابع $f(x)$ برابر با \mathbb{R} است. دامنه این تابع به صورت زیر، به سه مجموعه جدا



روی هر مجموعه، ضابطه ای به صورت زیر تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$$

در این حالت $f(x)$ را تابعی سه ضابطه ای می گوئیم.

مثال ۱۴: نمودار تابع سه ضابطه ای مثال قبل را رسم کنید.

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار هر ضابطه را در محدوده اعتبارش رسم کنیم. به همین

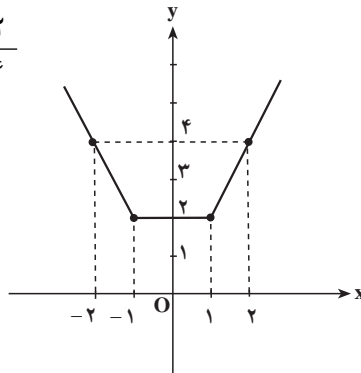
منظور، $f(x) = 2x$ را برای $x < -1$ ، $f(x) = 2$ را برای $-1 \leq x \leq 1$ و $f(x) = -2x$ را برای $x > 1$.

رسم می کنیم :

$$f(x) = 2x ; \begin{array}{c|cc} x & -1 & 2 \\ \hline y & 2 & 4 \end{array}$$

$$f(x) = 2 ; \begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ \hline y & 2 & 2 \end{array}$$

$$f(x) = -2x ; \begin{array}{c|cc} x & -1 & -2 \\ \hline y & 2 & 4 \end{array}$$



توجه: نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کردیم و روی هر نمودار، قسمت‌هایی که در محدوده اعتبار آن ضابطه است را پررنگ کردیم. ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار این تابع سه ضابطه‌ای، همواره بزرگتر یا برابر با ۲ است.

مثال ۱۵: نمودار تابع $f(x) = |2x - 1|$ را رسم کنید.

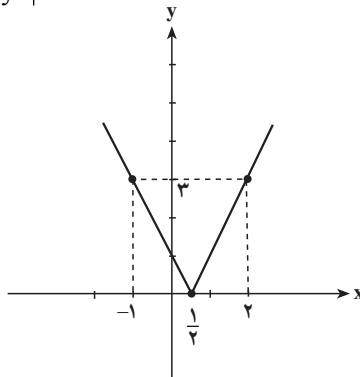
می‌دانیم که اگر $2x - 1 \geq 0$ آن‌گاه $f(x) = 2x - 1$ و در حالی که $2x - 1 < 0$ خواهیم داشت:

$f(x) = -(2x - 1)$ ، در نتیجه ابتدا این تابع را به صورت چند ضابطه می‌نویسیم، سپس آن را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & 2x - 1 \geq 0 \\ -2x + 1 & 2x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = 2x - 1 \quad \begin{array}{c|c} x & \frac{1}{2} \quad 2 \\ \hline y & 0 \quad 3 \end{array} \quad (x \geq \frac{1}{2})$$

$$f(x) = -2x + 1 \quad \begin{array}{c|c} x & \frac{1}{2} \quad -1 \\ \hline y & 0 \quad 3 \end{array} \quad (x < \frac{1}{2})$$



مثال ۱۶: تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & x \leq 0 \\ 1 - 2x & x > 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حاصل $f(x^2 + 1)$ ، $f(-\sqrt{2})$ و $f(-\frac{1}{4}x^2 - 1)$ را به دست آورید.

حل: چون همواره $x^2 + 1 > 0$ ، بنابراین از ضابطه اول برای محاسبه $f(x^2 + 1)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x^2 + 1) = -(x^2 + 1)^2 + 1 = -(x^4 + 2x^2 + 1) + 1 = -x^4 - 2x^2$$

چون $-\sqrt{2} \leq 0$ ، بنابراین برای محاسبه $f(-\sqrt{2})$ از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\sqrt{2}) = 1 - 2(-\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$$

چون $-\frac{1}{4}x^2 \leq 0$ ، بنابراین $-\frac{1}{4}x^2 - 1 \leq 0$. در نتیجه برای محاسبه $f(-\frac{1}{4}x^2 - 1)$ از ضابطه

دوم استفاده می‌کنیم:

$$f(-\frac{1}{4}x^2 - 1) = 1 - 2(-\frac{1}{4}x^2 - 1) = 1 + x^2 + 2 = x^2 + 3$$

مثال ۱۷: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$ داده شده است.

الف - $f(-1)$ و $f(0)$ و $f(\frac{1}{4})$ و $f(1)$ و $f(2)$ را محاسبه نمایید.

ب - نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(-1) = -1 - 1 = -2$$

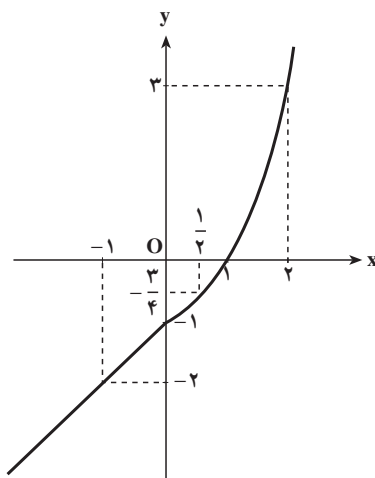
$$f(0) = (0)^2 - 1 = -1$$

$$f(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4})^2 - 1 = \frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16}$$

$$f(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

x	-1	0	$\frac{1}{4}$	1	2
y	-2	-1	$-\frac{15}{16}$	0	3



نمودار تابع f با توجه به دامنه‌اش قسمتی از سهمی $y = x^2 - 1$ و قسمتی از خط به معادله $y = x - 1$ است.

تمرین

۱- اگر تابع $y = f(x) = \frac{3}{2x^2 + 1}$ با دامنه \mathbb{R} باشد، برابری‌های زیر را کامل کنید:

$$f(0) = \quad , \quad f(\sqrt{2}) = \quad , \quad f(\frac{1}{4}) = \quad , \quad f(2x) =$$

۲- اگر تابع $f(x) = x^2 - 4$ با دامنه \mathbb{R} باشد، مقادیر زیر را حساب کنید.

$$f(3), f(5), f(f(3))$$

۳- تابع f به صورت $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} + x & x \cdot 1 \\ f(x) = \sqrt{x} - x & x \cdot 1 \end{cases}$ تعریف شده است. برابری‌های زیر را کامل کنید.

$$f(\sqrt{2}-1) = \quad , f(3-\sqrt{2}) = \quad , f(-\sqrt{2}) =$$

$$f(0) = \quad , f(f(-1)) =$$

۴- کدام یک از مجموعه‌های زیر یک تابع را مشخص می‌کند.

$$۱) \{(-1, 0) \text{ و } (0, 1) \text{ و } (2, 3) \text{ و } (\sqrt{-1}, 4)\}$$

$$۲) \{(-1, 2)\}$$

$$۳) \{(0, 0) \text{ و } (2, 1) \text{ و } (3, 2) \text{ و } (-1, 0) \text{ و } (2, -2)\}$$

$$۴) \{(1, 1) \text{ و } (2, 3) \text{ و } (-1, -1) \text{ و } (-2, 5)\}$$

۵- معادله خطی را مشخص کنید که محور x ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{3}{4}$ قطع کند و از نقطه

$(1, 5)$ بگذرد.

۶- اگر تابع $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ باشد مقادیر زیر را محاسبه نمایید:

$$f(1) \text{ و } f(-1) \text{ و } f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ و } f\left(\frac{-1}{x}\right) \text{ و } f(\sqrt{x})$$

۷- اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ را به دست آورید و درستی تساوی $f(x) \times f\left(\frac{-1}{x}\right) = -1$ را

بررسی نمایید. $(x \neq 0, 1)$

۸- اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، a و b و c را طوری بیابید که این سهمی محور y ها را در

نقطه‌ای به عرض ۳ و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند و از نقطه $A(2, 3)$ نیز بگذرد.

$$۹- \text{تابع } f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x \cdot 0 \\ x+4 & x \cdot 0 \end{cases} \text{ را در نظر بگیرید.}$$

الف- $f(-2)$ و $f(-1)$ و $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$ را محاسبه کنید و در یک جدول مرتب نمایید.

ب- نمودار تابع را رسم کنید.

۱۰- دو تابع $y = x^2 + ax - 3b$ و $y = -x + b$ با دامنه \mathbb{R} داده شده‌اند، a و b را طوری

محاسبه کنید که نمودارهای این دو تابع روی محور x ها در نقطه‌ای به طول ۱ همدیگر را قطع کنند.
۱۱- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } f(x) &= \begin{cases} x^2 - 4 & x < 2 \\ x + 3 & x \geq 2 \end{cases} & \text{ب) } f(x) &= \begin{cases} -x^2 + 2x & x < 2 \\ 2x - 1 & x \geq 2 \end{cases} \\ \text{ج) } f(x) &= \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} & \text{د) } f(x) &= -3 \left| \frac{1}{3}x + 6 \right| \end{aligned}$$

روش محاسبه دامنهٔ تعریف ضابطه‌ها

در توابع حقیقی با مقادیر حقیقی گاهی اوقات دامنهٔ تابع داده نمی‌شود و فقط ضابطه تابع ارائه می‌شود. در این صورت طبق قرارداد دامنهٔ تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی است که برای آن‌ها ضابطه تعریف شده باشد.

مثال ۱: تابع $f(x) = x^2 + 3$ داده شده است، دامنهٔ تابع را به دست آورید.

حل: تابع بالا چنان است که هر عدد حقیقی x را به توان ۲ می‌رساند و ۳ را به آن می‌افزاید و عدد معین $x^2 + 3$ را می‌دهد. مثلاً برای $x = 2$ ، $x^2 + 3 = 7$ و برای $x = -3$ ، $x^2 + 3 = 12$ ، پس این تابع برای همهٔ اعداد حقیقی x تعریف شده است. بنابراین $D_f = \mathbb{R}$.

مثال ۲: تابع $f(x) = x^3 - 2x - 5$ داده شده است، دامنهٔ آن را معین کنید.

$$\text{حل: چون برای هر عدد حقیقی } x, \mathbb{R} \text{، } f(x) = x^3 - 2x - 5 \text{،}$$

پس این تابع نیز برای همهٔ مقادیر x ، متعلق به مجموعهٔ اعداد حقیقی، تعریف شده است یعنی: $D_f = \mathbb{R}$.

به طور کلی دامنهٔ تابع‌های چندجمله‌ای که به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ یا $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + 1$ ، $n \in \mathbb{W}$ ، نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ اعداد حقیقی است. یعنی: $D_f = \mathbb{R}$ زیرا در چند جمله‌ای‌ها برای همهٔ مقادیر x متعلق به \mathbb{R} ، $f(x)$ قابل محاسبه است.

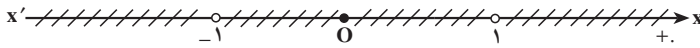
مثال ۳: دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$ را تعیین کنید.

حل: می‌دانیم که اگر $x^2 - 1$ صفر باشد کسر بالا تعریف نشده است و هرگاه $x^2 - 1$ ناصفر باشد $f(x)$ تعریف شده است. اما داریم:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس این تابع برای همه اعداد حقیقی x جز $x=1$ و $x=-1$ تعریف شده است. بنابراین دامنهٔ تابع به صورت زیر است:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\} \quad \text{یا} \quad D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$



مثال ۴: دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ را مشخص کنید.

حل: چون x^2+1 هیچ‌گاه صفر نمی‌شود پس کسر بالا برای همهٔ مقادیر x تعریف شده است، بنابراین دامنهٔ تابع \mathbb{R} است.

به طور کلی در توابع کسری به صورت $y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند (توابع کسری گویا) دامنه، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به غیر از ریشه‌های $q(x)$ است یعنی:

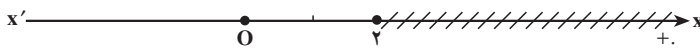
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$$

مثال ۵: دامنهٔ تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x-3}$ عبارت است از:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3, -1\}$$

مثال ۶: تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ برای همهٔ اعداد حقیقی x به طوری که $x-2 \geq 0$ تعریف شده است ولی برای $x-2 < 0$ تعریف نشده است. بنابراین داریم:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x-2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, +\infty)$$



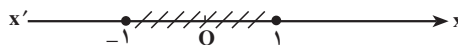
مثال ۷: تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ برای $x \in \mathbb{R}$ که $1-x^2 \geq 0$ تعریف شده است. بنابراین:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1-x^2 \geq 0\}$$

که با توجه به جدول:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$		$-$	$+$	$-$

$$D_f = [-1, 1]$$



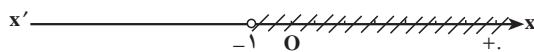
خواهیم داشت:

مثال ۸: تابع $g(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 1}$ برای همه اعداد حقیقی x تعریف شده است. زیرا فرجه رادیکال فرد است و عبارت زیر رادیکال چندجمله‌ای است، پس $D_g = \mathbb{R}$.

مثال ۹: تابع $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ برای مقادیری از x که $\sqrt{x+1}$ معین و مخالف با صفر باشد، تعریف شده است.

پس، از یک طرف مخرج کسر باید مخالف با صفر باشد، یعنی $x+1 \neq 0$ یا $x \neq -1$ ، و از طرف دیگر عبارت زیر رادیکال، با توجه به فرجه زوج آن، باید نامنفی باشد، یعنی $x+1 \geq 0$. بنابراین داریم:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \geq 0, x+1 \neq 0\} = (-1, +\infty)$$



به طور کلی دامنه توابع گنگ به صورت $f(x) = \sqrt[k]{p(x)}$ و $g(x) = \sqrt[k+1]{p(x)}$ عبارت‌اند از:

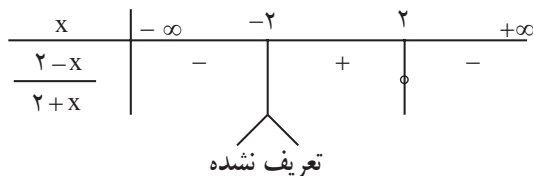
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_p, p(x) \geq 0\} \quad D_g = D_p$$

مثال ۱۰: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ عبارت است از:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2-x}{2+x} \geq 0, 2+x \neq 0\}$$

$$2-x=0 \Rightarrow x=2$$

$$2+x=0 \Rightarrow x=-2$$



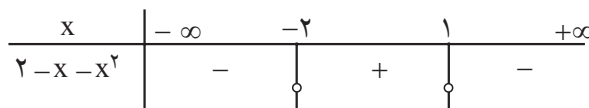
$$D_f = (-2, 2)$$

پس:

مثال ۱۱: دامنه تابع‌های $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$ و $g(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{x-1}}$ به صورت زیر به دست

می‌آید:

$$2-x-x^2 \geq 0 \Rightarrow (2+x)(1-x) \geq 0$$



پس:

$$D_f = [-2, 1]$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

و به همین ترتیب:

مثال ۱۲: دامنه تابع های $f(x) = \log_2(x-1)$ و $g(x) = \log \frac{x+1}{1-x}$ را به این صورت معین

می کنیم :

بنابر تعریف لگاریتم، دامنه تابع f مقادیری از x است که برای آن ها $x-1 > 0$ یا $x > 1$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x-1 > 0\} = (1, +\infty) \quad \text{پس:}$$

و دامنه تابع g مقادیری از x است که $\frac{x+1}{1-x} > 0$. بنابراین :

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{1-x} > 0 \text{ و } 1-x \neq 0\} = (-1, 1)$$

مثال ۱۳: دامنه توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ و $h(x) = \tan x$ و $p(x) = \cot x$ را

تعیین کنید.

حل: دامنه تابع های f و g مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} است، زیرا برای هر عدد حقیقی x مقادیر

f و g معین است.

دامنه تابع h به صورت زیر است :

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

زیرا داریم: $h(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و چون باید داشته باشیم $\cos x \neq 0$ پس $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، سرانجام

دامنه تابع p به صورت $D_p = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$ است زیرا داریم: $p(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ و چون باید

$\sin x \neq 0$ باشد، پس $x \neq k\pi$.

مثال ۱۴: دامنه تابع $f(x) = \sin \sqrt{x}$ و $g(x) = \tan 2x$ به صورت زیر به دست می آید.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$$

تمرین

۱- دامنه هریک از توابع زیر را به دست آورده و آن ها را به صورت بازه نمایش دهید.

$$f(x) = 2x^2 - 3x \quad g(x) = x(x+2)(x-1) \quad h(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} \quad g(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}} \quad h(x) = \frac{2x+5}{x^2 - 2x}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1-x}} \quad g(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{x+1}} \quad h(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$f(x) = \log(x^2 - 1) \quad g(x) = \log(4 - x^2) \quad h(x) = \log(2 - x)^2$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad g(x) = \frac{|x|}{x} \quad h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$f(x) = x\sqrt{x - 3}$$

۲- دامنهٔ توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید :

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad g(x) = \cos\frac{1}{x}, \quad k(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

۳- دامنهٔ تابع های داده شده را به صورت بازه بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \cdot 2 \\ 3x, & x \cdot 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x, & -3 \cdot x \leq 2 \\ 3x-4, & 2 \cdot x \leq 4 \end{cases}$$

عملیات روی توابع

۱- مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و خارج قسمت دو تابع حقیقی

توابع حقیقی $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = 2x$ و $h(x) = x^2 + 2x - 1$ را در نظر می گیریم.

مقادیر $f(-1)$ و $f(2)$ و $g(-1)$ و $g(2)$ و $h(-1)$ و $h(2)$ و $f(-1) + g(-1)$ و $f(2) + g(2)$ را محاسبه می کنیم و جدول زیر را تشکیل می دهیم.

x	-1	2
f(x)	$(-1)^2 - 1 = 0$	$(2)^2 - 1 = 3$
g(x)	$2(-1) = -2$	$2(2) = 4$
f(x) + g(x)	$0 - 2 = -2$	$3 + 4 = 7$
h(x)	$(-1)^2 + 2(-1) - 1 = -2$	$(2)^2 + 2(2) - 1 = 7$

به طوری که دیده می شود :

$$f(-1) = 0, g(-1) = -2, f(-1) + g(-1) = 0 + (-2) = -2, h(-1) = -2$$

$$f(2) = 3, g(2) = 4, f(2) + g(2) = 3 + 4 = 7, h(2) = 7$$

هم چنین دو تابع $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = \frac{1}{4}x - 1$ را در نظر گرفته سپس

$h(x) = f(x) + g(x)$ را محاسبه و جدول صفحهٔ بعد را کامل می کنیم :

$$h(x) = 2x + 3 + \frac{1}{4}x - 1 = \frac{5}{4}x + 2 \quad \text{داریم :}$$