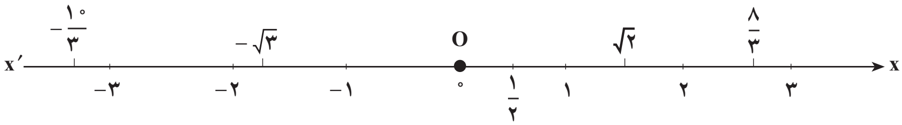
فصل دوم

تابع

یادآوری و تکمیل

می‌دانیم که هر عدد حقیقی متناظر با یک نقطه از محور مختصات و هر نقطه از محور مختصات، نظیر یک عدد حقیقی است. بدین‌ترتیب که مبدأ O را همتا یا نظیر عدد صفر گرفت؛ آنگاه، اگر x یک عدد حقیقی مثبت باشد، نقطه‌ای از محور را که به فاصلهٔ x از O و در سمت راست O (سوی مثبت) قرار دارد نظیر عدد x و چنانچه x یک عدد حقیقی منفی باشد (که در این‌صورت x− مثبت است) نقطه‌ای از محور را که به فاصلهٔ x− از O و در سمت چپ آن است نظیر عدد x اختیار کرد. بدین‌گونه به هر عدد حقیقی یک نقطه از محور، و تنها یکی، و به هر نقطه از محور یک عدد حقیقی یکتا نسبت داده می‌شود. بنابراین نقاط یک محور را می‌توانیم با اعداد حقیقی مشخص کنیم. به این جهت محور را گاهی خط حقیقی می‌نامند و برای یک عدد حقیقی و نقطهٔ نظیر آن یک نماد به‌کار می‌برند و عدد حقیقی x را نقطهٔ x نیز می‌گویند.



بازه

در ریاضیات ۲ با مثال‌هایی از بازه آشنا شده‌اید و می‌دانید که مثلاً بازهٔ باز ۲− و ۶ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x بین ۲− و ۶ یعنی ۶ . x . ۲− است که به‌صورت (۲,۶−) نشان داده می‌شود.

(−۲,۶) = {x . ℝ |−۲ . x . ۶}

به‌طور کلی اگر a و b دو عدد حقیقی و a . b باشد:

۱ــ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x را که از a بزرگ‌تر و از b کوچک‌تر باشند بازهٔ باز a و b می‌نامند و آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:

$(a,b) = \{x .\ \mathbb{R} | a .\ x .\ b\}$

۲ــ اجتماع بازهٔ باز (a,b) و دو نقطهٔ a و b را بازهٔ بستهٔ a و b می‌نامند و آن را چنین می‌نویسند :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$$

۳ــ اجتماع (a,b) و نقطهٔ b را بازهٔ نیم‌باز از چپ (یا نیم‌بسته از راست) می‌نامند و چنین نشان می‌دهند :

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$$

به همین ترتیب بازهٔ نیم‌باز از راست (یا نیم‌بسته از چپ) تعریف می‌شود. به‌علاوه بازه‌های بیکران را به شکل زیر تعریف می‌کنند :

۴ــ بازهٔ نیم‌باز a و $+\infty$: $\{x \in \mathbb{R} | x \ge a\} = [a,+\infty)$

۵ــ بازهٔ باز a و $+\infty$: $\{x \in \mathbb{R} | x > a\} = (a,+\infty)$

۶ــ بازهٔ نیم‌باز $-\infty$ و a : $\{x \in \mathbb{R} | x \le a\} = (-\infty,a]$

۷ــ بازهٔ باز $-\infty$ و a : $\{x \in \mathbb{R} | x < a\} = (-\infty,a)$

به‌طور خلاصه داریم :

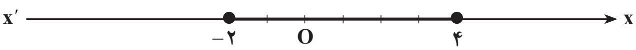
$$x \in (a,b) \Leftrightarrow a < x < b$$
$$x \in [a,b] \Leftrightarrow a \le x \le b$$
$$x \in [a,b) \Leftrightarrow a \le x < b$$
$$x \in (a,b] \Leftrightarrow a < x \le b$$
$$x \in [a,+\infty) \Leftrightarrow x \ge a$$
$$x \in (a,+\infty) \Leftrightarrow x > a$$
$$x \in (-\infty,a] \Leftrightarrow x \le a$$
$$x \in (-\infty,a) \Leftrightarrow x < a$$

نمایش هندسی بازه‌ها

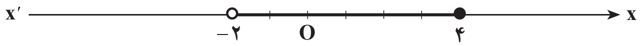
اگر نقاط a و b را روی محور اختیار کنیم هریک از بازه‌های تعریف‌شدهٔ بالا را می‌توان به وسیلهٔ یک پاره‌خط یا یک نیم‌خط، باز یا بسته، از محور نشان داد. نقطه‌هایی را که به بازه متعلق نیستند با دایره‌های توخالی روی محور مشخص می‌کنند.

مثال ۱: بازه‌های داده‌شده را روی محور به شکل زیر نشان می‌دهیم :

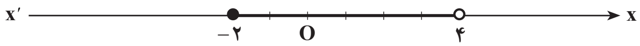
۱) $[-۲,۴] = \{x \in \mathbb{R} | -۲ \le x \le ۴\}$



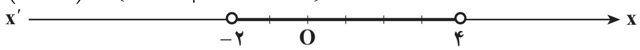
۲)   (−۲,۴. = {x . ℝ|−۲ . x ≤ ۴}



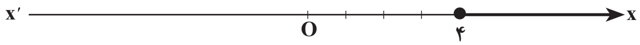
۳)   .−۲,۴) = {x . ℝ|−۲ ≤ x . ۴}



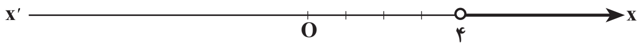
۴)   (−۲,۴) = {x . ℝ|−۲ . x . ۴}



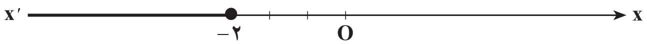
۵)   .۴,+.) = {x . ℝ|x . ۴}



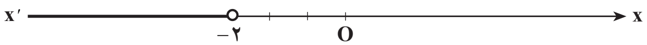
۶)   (۴,+.) = {x . ℝ|x   ۴}



۷)   (−. ,−۲. = {x . ℝ|x ≤ −۲}



۸)   (−. ,−۲) = {x . ℝ|x − . ۲}



برای آشنایی بیش‌تر با مفهوم بازه و عملیات روی آن‌ها، در زیر چند مثال نمونه را همراه با جواب آن‌ها آورده‌ایم :

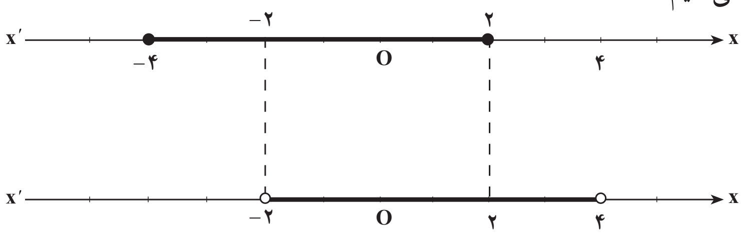
۱ــ عبارت‌های زیر را درصورت امکان ساده کنید :

الف) .−۴,۲.   (−۲,۴)   ب) .−۴,۲.   (−۲,۴)

پ) .−۴,۲.   .۳,+.)   ت) .−۴,۲.   .۳,+.)

جواب:

الف) ابتدا نمودار هندسی هر بازه را روی محور مشخص می‌کنیم، سپس ناحیهٔ مشترک دو بازه را پیدا می‌کنیم :



با توجه به نمودار هندسی بازه‌ها ملاحظه می‌کنیم که اشتراک آن‌ها بازه $.۲,۲-)$ است. باید توجه داشت که اگر نقطه‌های پایانی اشتراک دو بازه به هر دو بازه تعلق داشته باشند (مانند ۲) در این‌صورت بازه در آن نقطه بسته و در حالتی که نقطه‌های پایانی اشتراک دو بازه حداکثر متعلق به یکی از بازه‌ها باشند (مانند ۲-) آن‌گاه بازه در آن نقطه باز است.

چنان‌چه با همین روند ادامه دهیم، جواب‌های قسمت‌های دیگر را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

ب) $.۴,۴-)$ پ) $\varnothing$ ت) $.۲,۴-.\ \ .+,۳.\ )$

۲ــ مجموعهٔ جواب هریک از نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید و آن را به‌صورت یک بازه نشان دهید:

الف) $۰ .\ x-۱ .\ ۲$ ب) $-۱\le x+۲\le ۶$

پ) $\frac{x+۱}{۲} .\ ۲$ ت) $\frac{۲x-۱}{۳} - .\ ۱$

جواب:

الف) $۰ .\ x-۱ .\ ۲ \Rightarrow ۱ .\ x .\ ۳$

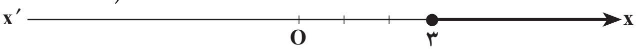
$x .\ (۱,۳)$

ب) $-۱\le x+۲\le ۶ \Rightarrow -۳\le x\le ۴$

$x -.. \ ۳,۴.$

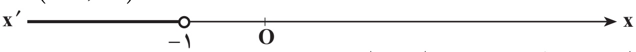
پ) $\frac{x+۱}{۲} .\ ۲ \Rightarrow x+۱ .\ ۴ \Rightarrow x .\ ۳$

$x .\ .۳,.\ )$



ت) $\frac{۲x-۱}{۳} - .\ ۱ \Rightarrow ۲x-۱- .\ ۳ \Rightarrow x - .\ ۱$

$x-(.\ \ \ ,-۱)$



۳ــ مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه نمایش دهید.

$A=\{x .\ \mathbb{R}\,|-۱ .\ x\le ۳\}$ $B=\{x .\ \mathbb{R}\,|-۱\le x .\ ۳\}$

$C=\{x .\ \mathbb{R}\,|x .\ ۶\}$ $D=\{x .\ \mathbb{R}\,|x - .\ ۲\}$

جواب:

A = (−۱,۳.   B = .−۱,۳)   C = (−. ,۶)   D = .−۲,+.)

۴ــ بازه‌های زیر را به‌وسیلهٔ مجموعه نمایش دهید.

الف) .۳,۵.   ب) (−۳,۷.   پ) (−. ,۱.   ت) .۲,+.)

جواب:

الف) A = {x . ℝ|۳ ≤ x ≤ ۵}   ب) B = {x . ℝ|−۳ . x ≤ ۷}

پ) C = {x . ℝ|x ≤ ۱}   ت) D = {x . ℝ|x . ۲}

تمرین

۱ــ با استفاده از تعریف بازه، عبارت‌های زیر را درصورت امکان، ساده کنید.

الف) (−۲,۵. .۳,۶)   ب) (−. ,°. .−۴,۴.

پ) (°,+.) (−. ,۳.   ت) .−۳,۵. (۲,۳.

۲ــ بازه‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

الف) .۲,+.)   ب) (۲,+.)   پ) .−۳,۳.

ت) (−۲,۲)   ث) $[-\frac{۵}{۲},\frac{۳}{۲})$ ج) (−. ,−۱.

۳ــ مجموعه‌های زیر را به وسیلهٔ بازه نمایش دهید.

الف) A = {x . ℝ|۲ . x ≤ ۶}   ب) B = {x . ℝ|x   ۱}

پ) C = {x . ℝ|x ≤ −۲}   ت) D = {x . ℝ|−۶ . x − . ۱}

۴ــ بازه‌های زیر را به‌وسیلهٔ مجموعه نمایش دهید.

الف) .۳,۷.   ب) .°,+.)   پ) (°,+.)

ت) .−۴,−۱)   ث) (−. ,°.   ج) .−۳,۲)

۵ ــ اگر A = {x . ℝ|−۳ ≤ x ≤ ۳} و B = {x . ℝ|x   ۲} و C = {x . ℝ|x . °} باشد

بازه‌هایی را که با مجموعه‌های زیر تعریف شده‌اند مشخص کنید :

الف) A   B   ب) A   B   پ) A   B   C

ت) A   C   ث) B   C   ج) (A   B)   C

چ) (A   B)   C   ح) B   C

۶ــ در جدول زیر، خانه‌های خالی را با نماد مجموعه، نماد بازه و نمودار مناسب، پر کنید.

نمودار	نماد مجموعه	نماد بازه
		$.-۱,۳.$
	$\{x \,.\, \mathbb{R} \mid ۲ \,.\, x \,.\, ۴\}$	
		
	$\{x \,.\, \mathbb{R} \mid -۲ \,.\, x \leq ۳\}$	

۷ــ مجموعه جواب هریک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید و روی محور نمایش دهید.

الف) $۲x-۳ \,.\, ۰$ ب) $۲x-۴ \,.\, ۰$ پ) $\frac{x+۱}{۲} \quad ۲x-۱$

ت) $۰ \leq x+۲ \,.\, ۳$ ث) $-۲ \leq \frac{x}{۲}-۱ \leq ۲$ ج) $-۱ \leq \frac{-۲x+۱}{۳} \,.\, ۴$

معادلات و نامعادلات گویا

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند. برای مثال عبارت‌های زیر همگی عبارت‌های گویا هستند.

$$\frac{x+۱}{x-۲}-\frac{۳x}{x+۵} \quad , \quad \frac{۲x^۲+x-۱}{x+۲} \quad , \quad ۳x-\frac{۱}{x+۳}$$

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنی است که مخرجش صفر نباشد. یعنی درحالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آن‌گاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است.

عبارت گویای $\frac{۱}{x+۳}-\frac{۳x}{۲}$ به‌ازای $x=-۳$ تعریف نشده است، زیرا با قرار دادن $x=-۳$ در آن مخرج کسر دوم برابر با صفر شده و در این حالت، کسر تعریف نشده است.

معادله‌هایی که در آن‌ها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند، معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

می‌نامند. برای حل این معادله‌ها، ابتدا همهٔ عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله منتقل می‌کنیم، سپس با مخرج مشترک‌گیری و ساده کردن عبارت‌های جبری به‌دست آمده به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ می‌رسیم. از قبل می‌دانیم کسری برابر با صفر است که صورت آن برابر با صفر باشد، درنتیجه معادلهٔ $P(x) = 0$ را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده از این معادله نباید مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر کنند (چرا؟) بنابراین از بین جواب‌های به‌دست آمده آن‌هایی را قبول می‌کنیم که مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و هم‌چنین در شرایط مسأله صدق کنند.

قبل از این‌که چند معادلهٔ شامل عبارت‌های گویا را حل کنیم، بهتر است مخرج مشترک‌گیری کسرها را بیان کنیم. مخرج مشترک بین دو یا چند کسر همان کوچک‌ترین مضرب مشترک بین مخرج‌های آن‌ها است و برای محاسبهٔ ک.م.م. مخرج کسرها، کافی است در صورت امکان مخرج هر کسر را تجزیه کنیم، سپس حاصل‌ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک را به‌دست آوریم.

مثال ۱: معادلهٔ $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$ را حل کنید.

ابتدا عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله می‌بریم :

$$\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+3} = 0$$

اکنون مخرج مشترک را محاسبه کرده و عملیات جبری را انجام می‌دهیم.

$(x-4) =$ مخرج کسر اول

$(x+3) =$ مخرج کسر دوم

$(x-4)(x+3) =$ ک.م.م. مخرج‌ها

بنابراین داریم :

$$\frac{(x-2)(x+3)-(x+1)(x-4)}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-6-x^2+3x+4}{(x-4)(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x-2}{(x-4)(x+3)} = 0$$

ملاحظه می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ رسیدیم، بنابراین با حل معادلهٔ $P(x) = 0$ سعی می‌کنیم جواب‌های معادله را پیدا کنیم.

$$4x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

چون $x = \frac{۱}{۲}$ مخرج کسرهای $\frac{x-۲}{x-۴}$ و $\frac{x+۱}{x+۳}$ را صفر نمی‌کند، پس قابل‌قبول است و $x = \frac{۱}{۲}$ جواب این معادله است.

مثال ۲: معادلهٔ $\frac{x-۱}{x-۲} = \frac{x^۲ - ۲x + ۲}{x^۲ - ۲x} - \frac{۱+x}{x}$ را حل کنید.

ابتدا عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله می‌بریم، سپس مخرج مشترک را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x^۲ - ۲x + ۲}{x^۲ - ۲x} - \frac{۱+x}{x} - \frac{x-۱}{x-۲} = ۰$$

مخرج کسر اول $= x^۲ - ۲x = x(x-۲)$

مخرج کسر دوم $= x$

مخرج کسر سوم $= x-۲$

ک.م.م. مخرج‌ها $= x(x-۲)$

بنابراین داریم :

$$\frac{x^۲ - ۲x + ۲ - (x-۲)(۱+x) - x(x-۱)}{x(x-۲)} = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{-x^۲ + ۴}{x(x-۲)} = ۰ \Rightarrow -x^۲ + ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = ۲, x = -۲$$

چون $x = ۲$ مخرج کسرهای $\frac{x-۱}{x-۲}, \frac{x^۲ - ۲x + ۲}{x^۲ - ۲x}$ را صفر می‌کند، جواب قابل‌قبول نیست و فقط $x = -۲$ جواب این معادله و قابل‌قبول است. از آن‌جا که جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، با قرار دادن $x = -۲$ در معادله، به یک رابطهٔ درست به‌صورت زیر می‌رسیم :

$$\frac{(-۲)^۲ - ۲(-۲) + ۲}{(-۲)^۲ - ۲(-۲)} - \frac{۱ + (-۲)}{-۲} = \frac{-۲-۱}{-۲-۲} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $\frac{۲x+۴}{x+۲} = ۱$

۲) $\frac{x+۵}{۳x+۱۵} = \frac{۱}{۳}$

۳) $\dfrac{3x-2}{x}+\dfrac{2x+5}{x+3}=5$

۴) $\dfrac{2x+3}{2x-2}-\dfrac{5}{x^2-1}=\dfrac{2x-3}{2x+2}$

۵) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}$

۶) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=3x(1-\dfrac{x-1}{x+1})$

۷) $\dfrac{2x+3}{x-1}-\dfrac{2x-3}{x+1}=\dfrac{10}{x^2-1}$

۸) $\dfrac{3}{3x^2-3x-28}=\dfrac{5}{5x^2-x-20}$

۹ــ به‌ازای چه مقدار a، معادلهٔ $\dfrac{x}{a-x}+\dfrac{a-x}{x}=\dfrac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است.

۱۰ــ به‌ازای چه مقدار k، معادلهٔ $\dfrac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}=\dfrac{4-t}{2-2t}$ دارای جواب $t=-3$ است.

نامعادله‌های شامل عبارت‌های گویا

وقتی نوعی دارو در عضلهٔ دست راست یک بیمار تزریق می‌شود، غلظت دارو (برحسب میلی‌گرم در هر میلی لیتر) t ساعت بعد از تزریق در عضله دست چپ، به‌طور تقریبی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$C=\frac{0/12t}{t^2+2}$$

می‌خواهیم بدانیم که چند ساعت بعد از تزریق، غلظت دارو در عضلهٔ دست چپ برابر با ۰/۰۴ میلی‌گرم در میلی‌لیتر یا بیشتر است؟ برای حل این مسئله داریم :

$$C \geq 0/04 \Rightarrow \frac{0/12t}{t^2+2} \geq 0/04$$

چنان‌چه دو طرف معادله را در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم، خواهیم داشت :

$$\frac{12t}{t^2+2} \geq 4 \Rightarrow \frac{12t}{t^2+2}-4 \geq 0 \Rightarrow \frac{12t-4t^2-8}{t^2+2} \geq 0$$

اکنون عبارت $P=\dfrac{-4t^2+12t-8}{t^2+2}$ را تعیین علامت می‌کنیم، چون مخرج کسر همواره

مثبت است یعنی همواره $t^2+2>0$، پس علامت P بستگی به علامت صورت کسر دارد، بنابراین کافی است صورت کسر را تعیین علامت کنیم.

$$-4t^2+12t-8=0 \quad -4(t^2-3t+2)=0 \Rightarrow -4(t-1)(t-2)=0 \Rightarrow t=1 \text{ یا } t=2$$

t	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-4t^2+12t-8$		$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$-$	
				جواب			

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنیم، برای این‌که $C \geq 0/04$ باشد باید $1 \le t \le 2$ یعنی در فاصلهٔ یک تا دو ساعت بعد از تزریق، غلظت دارو در عضله دست چپ بیمار برابر با $0/04$ میلی‌گرم در هر میلی‌لیتر یا بیشتر است.

نامعادله‌هایی که در آن‌ها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند را نامعادله‌های شامل عبارت‌های گویا می‌نامند. برای حل این نامعادله‌ها، ابتدا همهٔ عبارت‌های جبری را به یک طرف نامعادله منتقل می‌کنیم، سپس با مخرج مشترک‌گیری و ساده کردنِ عبارت‌های جبری به‌دست آمده به نامعادله‌هایی نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)}\le 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ می‌رسیم (که در آن‌ها صورت و مخرج کسر چندجمله‌ای‌های برحسب متغیر x هستند)، سپس برای یافتن مجموعهٔ جواب هریک از نامعادله‌های بالا، برای مثال $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$، عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را در یک جدول تعیین علامت می‌کنیم و در این حالت قسمت‌هایی از جدول تعیین علامت که به‌ازای آن‌ها عبارت فوق در آن‌ها مثبت یا صفر هستند، مجموعهٔ جواب نامعادله است.

مثال ۱: نامعادلهٔ $\frac{x+2}{2x-1} \le \frac{1}{x-2}$ را حل کنید.

$$\frac{x+2}{2x-1}-\frac{1}{x-2}\le 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2)-(2x-1)}{(2x-1)(x-2)}\le 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{(2x-1)(x-2)}\le 0$$

اکنون عبارت $P=\frac{x^2-2x-3}{(2x-1)(x-2)}$ را تعیین علامت می‌کنیم ؛ برای این منظور جواب‌های صورت و مخرج کسر را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم :

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=3, x=-1$$

$$(2x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}, x=2$$

جدول تعیین علامت عبارت P را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$	-۱		$\frac{۱}{۲}$		۲		۳	$+\infty$
$x^۲-۲x-۳$	+	●	−		−		−	●	+
$(۲x-۱)(x-۲)$	+		+	●	−	●	+		+
P	+	●	−	تعریف نشده	+	تعریف نشده	−	●	+
			جواب				جواب		

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنیم که عبارت P برای $۲,۳.\ \left(-۱,\frac{۱}{۲}\right)\ .\ .\ x$ دارای علامت منفی یا صفر است، درنتیجه داریم :

$$\text{مجموعهٔ جواب}=\left\{x\ .\ \mathbb{R}\ \middle|\ -۱\le x\ .\ \frac{۱}{۲}\ \text{ یا }\ ۲\ .\ x\le ۳\right\}$$

مثال ۲: نامعادلهٔ $\frac{x^۲+x+۲}{x^۲-۳x+۲}\ .\ ۱$ را حل کنید.

$$\frac{x^۲+x-۲}{x^۲-۳x+۲}-۱\ .\ ۰\Rightarrow\frac{x^۲+x-۲-x^۲+۳x-۲}{x^۲-۳x+۲}\ .\ ۰\Rightarrow\frac{۴x-۴}{x^۲-۳x+۲}\ .\ ۰$$

عبارت $P=\frac{۴x-۴}{x^۲-۳x+۲}$ را تعیین علامت می‌کنیم، برای این منظور جواب‌های صورت و مخرج کسر را در صورت وجود پیدا می‌کنیم :

$$۴x-۴=۰\Rightarrow x=۱$$

$$x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow(x-۱)(x-۲)=۰\Rightarrow x=۱\ \text{ یا }\ x=۲$$

جدول تعیین علامت عبارت P را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$	۱		۲	$+\infty$
$۴x-۴$	−	●	+		+
$x^۲-۳x+۲$	+	●	−	●	+
P	−	تعریف نشده	−	تعریف نشده	+
	جواب		جواب		

باید توجه داشت که در عبارت P به‌ازای $x=۱$ مخرج کسر صفر می‌شود که در این حالت کسر تعریف نشده است. با توجه به جدول ملاحظه می‌کنیم که عبارت P برای $(۱,۲)$ $(۱,\ .-)$ $x\ .$ دارای علامت منفی است، درنتیجه داریم :

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \{x\ .\ \mathbb{R} | x\ .\ ۱ \quad \text{یا} \quad ۱\ .\ x\ .\ ۲\}$$

تمرین: هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $۱-\frac{۱}{x}\ .\ x+۱$

۲) $\frac{۶-x^۲}{x} \quad ۱$

۳) $\frac{۲x-۱}{x} \quad ۱$

۴) $\frac{x^۲-۲}{x}\ .\ ۱$

۵) $\frac{x+۱}{x}-\frac{x}{x-۱} \le ۲$

۶) $\left|\frac{۱-x}{۲x-۵}\right| \quad ۱$

۷) $\frac{۱}{۲x^۲+x+۱}\ .\ \frac{۱}{x^۲+۱}$

۸) $۲x-۳-\frac{۱}{x-۵}\ .\ x-۴-\frac{۱}{x-۵}$

به‌ازای چه مقادیری از x عبارت‌های جبری زیر قابل محاسبه‌اند؟

۹) $\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}-\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}$

۱۰) $\sqrt[۴]{\frac{۱}{x^۲}-\frac{۳}{۴}}$

۱۱) $\sqrt{\frac{۲x^۲+x-۶}{۳x^۲-۷x-۶}}-۵x\sqrt{۱۶-x^۲}$

۱۲ــ وقتی یک نوع کالای مرغوب و جدید به بازار می‌آید، فروش هفتگی آن کالا به‌طور معمول برای یک دورهٔ زمانی افزایش و سپس کاهش می‌یابد. فرض کنید بازار فروش S هزار واحد کالا، t هفته بعد از معرفی، از رابطهٔ زیر به‌دست آید :

$$S=\frac{۲۰۰t}{t^۲+۱۰۰}$$

چه موقع فروش هفتگی کالا ۸ هزار واحد یا بیشتر در هر هفته است؟

محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی (&. +)

در ریاضی ۲ با نسبت‌ها و توابع مثلثاتی آشنا شدیم و منحنی نمایش تغییرات بعضی از توابع

مثلثاتی را رسم کردیم. دیدیم اگر % یک زاویه دلخواه باشد، آن‌گاه :

$$\sin^{۲}+.\ \cos^{۲}=.\ ۱ \quad \text{و} \quad \tan=.\ \frac{\sin\%}{\cos\%} \quad \text{و} \quad ۱+\tan^{۲}=.\ \frac{۱}{\cos^{۲}\%}$$

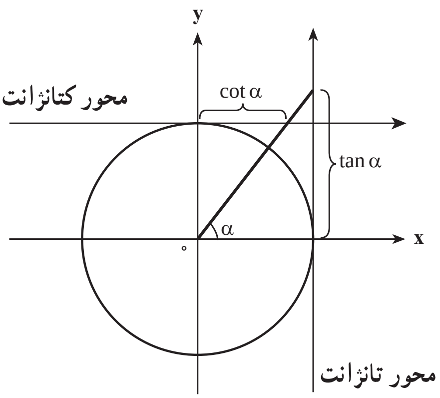
یکی دیگر از نسبت‌های مهم مثلثاتی، کتانژانت است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\cot=.\ \frac{\cos\%}{\sin\%}=\frac{۱}{\tan\%}$$

از این تعریف می‌توان نتیجه گرفت که در زاویه‌هایی که مقدار تانژانت ناصفر است، مقدار کتانژانت قابل تعریف است، از طرفی داریم :

$$\cot=.\ \frac{۱}{\tan\%}\Rightarrow \tan\times.\ \cot=.\ ۱$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که تانژانت و کتانژانت قابل تعریف برای یک زاویه، همواره هر دو هم‌علامت می‌باشند، درنتیجه علامت کتانژانت در دایره مثلثاتی مانند علامت تانژانت است.



مثال ۱:

الف) $\cot ۶۰ = \frac{۱}{\tan ۶۰}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ب) $\cot ۴۵ = \frac{۱}{\tan ۴۵}=\frac{۱}{۱}=۱$

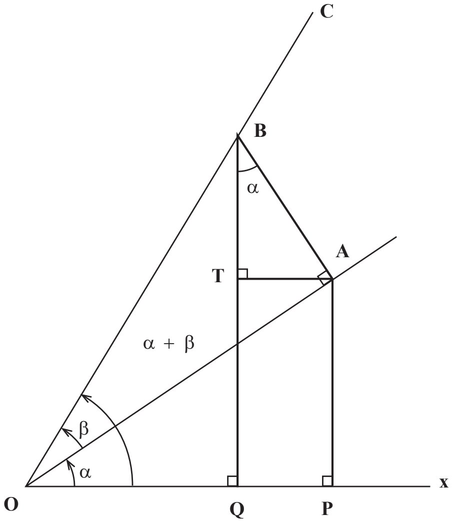
مثال ۲: اگر $\sin^{۲}\%\cot\%\ .\ ۰$ در این‌صورت انتهای کمان % در کدام ناحیه دایره مثلثاتی واقع است؟

حل: با توجه به تعریف کتانژانت داریم :

$$\sin^{۲}\times.\ \cot\%\ .\ ۰\Rightarrow \sin^{۲}\times.\ \frac{\cos\%}{\sin\%}\ .\ ۰\Rightarrow \sin\times.\ \cos\%\ .\ ۰$$

برای این‌که نابرابری اخیر برقرار باشد، باید $\sin\%$ و $\cos\%$ دارای علامت‌های متفاوت باشند، درنتیجه انتهای کمان $\%$، در ربع دوم ($\cos\% . ۰\ ,\ \sin\%\ \ ۰$) یا در ربع چهارم ($\cos\%\ \ ۰\ ,\ \sin\% . ۰$) واقع است.

محاسبه برخی نسبت‌های مثلثاتی (&. +) برحسب نسبت‌های مثلثاتی % و &



فرض کنید نیم‌خط OA با محور OX زاویه % و با OC زاویه& بسازد. از A بر OA عمودی خارج می‌کنیم تا OC را در نقطهٔ B قطع کند. از Aعمود AP و از B عمود BQ را بر OX رسم می‌کنیم و نیز از A عمود AT را بر BQ فرود می‌آوریم. زاویهٔ ABT برابر % است و داریم :

$$\sin(+ .\&) = \frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BT}+\overline{TQ}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BT}+\overline{AP}}{\overline{OB}}$$

$$= \frac{\overline{BA}\cos+ .\ \ \overline{OA}\sin\%}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}}\cos+ .\ \ \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\sin\%$$

$$= \sin\&\cos+ .\ \ \cos\&\sin\%$$

$$= \sin\%\cos+ .\ \ \cos\%\sin\&$$

بنابراین :

$$\boxed{\sin(+ .\&) = \sin\%\cos+ .\ \ \cos\%\sin\&} \quad (۱)$$

با قرار دادن &. = نتیجه زیر نیز به‌دست می‌آید :

$$\boxed{\sin ۲= .\ \ ۲\sin\%\cos\%} \quad (۲)$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که :

$$\boxed{\cos(+ .\&) = \cos\%\cos- .\ \ \sin\%\sin\&} \quad (۳)$$

با قرار دادن $\&\ . =$ نتیجه زیر نیز حاصل می‌شود :

$$\boxed{\cos ۲ = .\ \cos^{۲} - .\ \sin^{۲} \%} \quad (۴)$$

اگر در رابطه (۴) به‌جای $\sin^{۲}\%$ ، $۱-\cos^{۲}\%$ قرار دهیم ؛ خواهیم داشت :

$$\cos ۲ = .\ \cos^{۲} - .\ \sin^{۲} = .\ \cos^{۲} - .\ (۱-\cos^{۲}\%) = ۲\cos^{۲} - .\ ۱$$

درنتیجه :

$$\boxed{\cos ۲ = .\ ۲\cos^{۲} - .\ ۱} \quad (۵)$$

و اگر در رابطهٔ (۴) به‌جای $\cos^{۲}\%$ ، $۱-\sin^{۲}\%$ قرار دهیم ؛ خواهیم داشت :

$$\cos ۲ = .\ \cos^{۲} - .\ \sin^{۲} = .\ ۱ - \sin^{۲} - .\ \sin^{۲} = .\ ۱ - ۲\sin^{۲}\%$$

درنتیجه :

$$\boxed{\cos ۲ = .\ ۱ - ۲\sin^{۲}\%} \quad (۶)$$

مثال ۱: عبارت مثلثاتی $\frac{\sin ۲\%}{۱+\cos ۲\%}$ را ساده کنید.

حل:

$$\frac{\sin ۲\%}{۱+\cos ۲\%} = \frac{۲\sin\%\cos\%}{۱+(۲\cos^{۲} - .\ ۱)} = \frac{۲\sin\%\cos\%}{۲\cos^{۲}\%} = \frac{\sin\%}{\cos\%} = \tan\%$$

چنان‌چه در رابطه‌های (۱) و (۳) $-.$ را جایگزین& کنیم، فرمول‌های زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{array}{|l|}\hline \sin(-.\&) = \sin\%\cos - .\ \cos\%\sin\& \\ \hline \cos(-.\&) = \cos\%\cos + .\ \sin\%\sin\& \\ \hline \end{array}$$

با فرض این‌که $\cos(+.\&) \neq ۰$ ، از تعریف تانژانت داریم :

$$\tan(+.\&) = \frac{\sin(+.\&)}{\cos(+.\&)} = \frac{\sin\%\cos + .\ \cos\%\sin\&}{\cos\%\cos - .\ \sin\%\sin\&}$$

چنان‌چه $\cos\%\cos \neq .\ ۰$ ، با تقسیم صورت و مخرج کسر سمت راست بر $\cos\%\cos\&$ خواهیم داشت :

$$\tan(+.\&) = \frac{\frac{\sin\%\cos\&}{\cos\%\cos\&} + \frac{\cos\%\sin\&}{\cos\%\cos\&}}{\frac{\cos\%\cos\&}{\cos\%\cos\&} - \frac{\sin\%\sin\&}{\cos\%\cos\&}} = \frac{\tan + .\ \tan\&}{۱-\tan\%\tan\&}$$

بنابراین :

$$\boxed{\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{۱ \mp \tan\alpha\tan\beta}}$$

با قرار دادن $\beta = \alpha$ نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\boxed{\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}}$$

مثال ۲:

الف) $\sin ۷۵ = \sin(۳۰ + ۴۵)$

$$= \sin ۳۰ \cos ۴۵ + \cos ۳۰ \sin ۴۵$$

$$= \frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۴}+\frac{\sqrt{۶}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

ب) $\cos ۷۵ = \cos(۳۰ + ۴۵)$

$$= \cos ۳۰ \cos ۴۵ - \sin ۳۰ \sin ۴۵$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

ج) $\tan ۷۵ = \tan(۳۰ + ۴۵)$

$$= \frac{\tan ۳۰ + \tan ۴۵}{۱-\tan ۳۰ \tan ۴۵} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}+۱}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times ۱} = \frac{\sqrt{۳}+۳}{۳-\sqrt{۳}}$$

د) $\cot ۷۵ = \frac{۱}{\tan ۷۵} = \frac{۳-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۳}$

هـ) $\cos ۱۵ = \cos(۴۵ - ۳۰)$

$$= \cos ۴۵ \cos ۳۰ + \sin ۴۵ \sin ۳۰$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

مثال ۳: درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin(x-\frac{\pi}{۶})+\cos(x+\frac{\pi}{۳})=۰$

حل:

$$\text{طرف چپ تساوی} = (\sin x \cos\frac{\div}{۶} - \cos x \sin\frac{\div}{۶}) + (\cos x \cos\frac{\div}{۳} - \sin x \sin\frac{\div}{۳})$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x - \frac{۱}{۲}\cos x + \frac{۱}{۲}\cos x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x = ۰$$

ب) $\sin(a+b) + \sin(a-b) = ۲\sin a \cos b$

حل:

$$\text{طرف چپ تساوی} = \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$= \sin a \cos b + \sin a \cos b = ۲\sin a \cos b$$

ج) $\cos^۴ x - \sin^۴ x = \cos ۲x$

حل:

$$\cos^۴ x - \sin^۴ x = (\cos^۲ x - \sin^۲ x)(\cos^۲ x + \sin^۲ x)$$

$$= (\cos ۲x) \times ۱ = \cos ۲x$$

مثال ۴: فرض کنید $\frac{۵}{۱۳}$. $\sin=$ و $\frac{۳}{۴}$. $\tan=$ در زاویه‌های % و & حاده باشند، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sin(+ .\& \ )$ ‏ ‏ ‏ ب) $\cos ۲\&$ ‏ ‏ ‏ ج) $\tan ۲\%$

حل: الف) برای محاسبهٔ $\sin(+ .\& \ )$ نیاز به نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس برای زاویه‌های حادهٔ % و & داریم:

$$\cos^۲ = .\ ۱ - \sin^۲ = .\ ۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹} = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \Rightarrow \cos = (\ .\ \frac{۱۲}{۱۳}$$

چون % زاویه‌ای حاده است، پس انتهای کمان % در ربع اول دایره مثلثاتی است، پس ۰ $\cos\%$

درنتیجه $\frac{۱۲}{۱۳}$. $\cos=$.

$$\frac{۱}{\cos^۲ \&} = ۱ + \tan^۲ = .\ ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \cos^۲ = .\ \frac{۱۶}{۲۵} \xRightarrow{\text{حاده } \&} \cos = .\ \frac{۴}{۵}$$

$$\sin^۲ = .\ ۱ - \cos^۲ = .\ ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \sin^۲ = .\ \frac{۹}{۲۵} \xRightarrow{\text{حاده } \&} \sin = .\ \frac{۳}{۵}$$

$$\sin(+ .\& \ ) = \sin\%\cos + .\ \cos\%\sin = .\ \frac{۵}{۱۳} \times \frac{۴}{۵} + \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۵۶}{۶۵}$$

ب) $\cos ۲=.\ \cos^{۲}-.\ \sin^{۲}=.\ \frac{۱۶}{۲۵}-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۷}{۲۵}$

ج) $\tan ۲=.\ \frac{۲\tan \%}{۱-\tan^{۲} \%}$

از آن‌جا که $\sin=.\ \frac{۵}{۱۳}$ و $\cos=.\ \frac{۱۲}{۱۳}$، خواهیم داشت :

$$\tan=.\ \frac{\sin \%}{\cos \%}=\frac{۵}{۱۲}$$

درنتیجه :

$$\tan ۲=.\ \frac{۲\times\frac{۵}{۱۲}}{۱-\frac{۲۵}{۱۴۴}}=\frac{\frac{۱۰}{۱۲}}{\frac{۱۱۹}{۱۴۴}}=\frac{۱۲۰}{۱۱۹}$$

تمرین

۱ــ نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۱۵ و ۲۲/۵ را محاسبه کنید.

۲ــ فرض کنید $\tan=.\ \frac{۳}{۴}$ و $\tan=.\ \frac{۵}{۱۲}$ و % و & حاده باشند، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\sin(+.\&\ )\ ,\ \cos(+.\&\ )\ ,\ \tan(+.\&\ )$$

۳ــ فرض کنید $\sin=.\ \frac{۴}{۵}$ و $\sin=.\ \frac{۱۵}{۱۷}$ و % حاده و & منفرجه باشد، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\sin(+.\&\ )\ ,\ \cos(+.\&\ )\ ,\ \cot(+.\&\ )$$

$$\sin ۲\%\ ,\ \cos ۲\%\ ,\ \tan ۲\&$$

۴ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\sin(x+\frac{.}{۳})\ ,\ \cos(\frac{.}{۳}+\frac{.}{۴})\ ,\ \tan(\frac{.}{۶}+\frac{.}{۴})$$

۵ــ درستی برابری‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin(\frac{۳.}{۲}-x)=-\cos x$

ب) $\cos(\frac{.}{۲}+.\ )=-\sin)$

ج) $\cos(-\ .\&\ ) - \cos(+\ .\&\ ) = ۲\sin\%\sin\&$

د) $\sin ۲x \cos x - \cos ۲x \sin x = \sin x$

هـ) $\sin =.\ \ ۲\sin\frac{\%}{۲}\cos\frac{\%}{۲}$

و) $\cos =.\ \ ۲\cos^{۲}\frac{\%}{۲} - ۱$

ز) $۱ - \cos =.\ \ ۲\sin^{۲}\frac{\%}{۲}$

ح) $\tan =.\ \ \dfrac{۲\tan\frac{\%}{۲}}{۱ - \tan^{۲}\frac{\%}{۲}}$

ط) $\dfrac{۲}{\tan +.\ \ \cot\%} = \sin ۲\%$

ی) $\dfrac{\sin x}{۱ + \cos x} = \tan\frac{x}{۲}$

ک) $\cot\frac{x}{۲} - \tan\frac{x}{۲} = ۲\cot x$

تابع

تاریخچه تابع

برای نخستین بار مفهوم تابع با عنوان «مقدار متغیر» در قرن هفدهم میلادی در کارهای رنه‌دکارت (۱۶۵۰ـ۱۵۶۹م) ریاضیدان فرانسوی و در نوشته‌های هندسی پدید آمد. دکارت در کتاب هندسهٔ خود مفهوم تابع را به‌عنوان «تغییر عرض در نتیجه تغییر طول» بررسی می‌کند. در قرن هجدهم یوهان برنولی (۱۷۴۸ـ۱۶۶۷) دیدگاه جدید و به اصطلاح تحلیلی را نسبت به تابع مطرح می‌کند، او می‌گوید :

«تابع به‌عنوان دستوری است که مقدار یک متغیر را با مقدار متغیر دیگر درنظر می‌گیرد.»

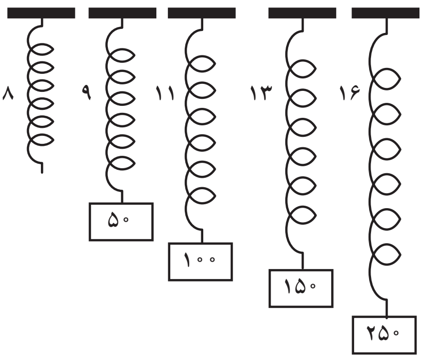
در سال ۱۷۴۸ لئونارد اولر (۱۷۸۳ـ۱۷۰۷م) شاگرد یوهان برنولی نماد[1] f را برای تابع درنظر گرفت و آن را از دیدگاه تحلیلی به این صورت مطرح می‌کند :

۱ـ Function

«تابع یک متغیر، عبارت است از یک عبارت تحلیلی که به‌نحوی از این مقدار متغیر و از عددها یا مقدارهای ثابت تشکیل شده است.» بالاخره، پس از طی دو قرن یوهان پیتر گوستاو لوژن دیریکله (۱۸۵۹ـ۱۸۰۵م) ریاضی‌دان آلمانی در اواسط قرن نوزدهم، تعریف امروزی تابع را به‌صورتی روشن بیان می‌کند :

«y تابعی از متغیر x در بازهٔ $a \le x \le b$ است، به شرطی که برای هر مقدار x از این بازه، مقدار مشخص و منحصر به‌فردی مانند y متناظر با آن وجود داشته باشد.»

همان‌طور که می‌دانید تابع عملی است که روی عناصر یک مجموعه عمل می‌کند و عنصری در یک مجموعه را نظیر می‌سازد. به‌عنوان مثال (۱) به شکل و جدول زیر توجه کنید.



وزن (p)	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
طول (l)	۸	۹	۱۱	۱۳	۱۶

این جدول اندازهٔ طول یک فنر را، که تابعی است از مقدار وزنی که به آن آویخته شده است، نشان می‌دهد (وزن برحسب گرم و طول بر حسب سانتی‌متر). وزن را با p و طول را با l مشخص می‌کنیم. مثلاً اگر $p=۱۰۰$ گرم باشد $l=۱۱$ سانتی‌متر است. به‌طوری که دیده می‌شود به هر p تنها یک l وابسته می‌گردد. بدین‌ترتیب جدول بالا رابطه میان دو کمیت p و l را به‌صورت یک عمل نظیرسازی که به اعداد سطر بالا اعداد سطر پایین نظیر می‌شوند، نشان می‌دهد.

مجموعه عناصری که یک تابع روی آن‌ها عمل می‌کند، دامنه تابع نام دارد. در این مثال دامنه تابع بازه $[۰,M]$ است که M حداکثر وزنی است که می‌توان به آن فنر آویزان نمود تا فنر پاره نشود.

مثال۲: تابع $f(x)=۳x-۱$ را با دامنه $\{-۱,-\frac{۱}{۳},۰,\frac{۱}{۳},۱,۲\}$ درنظر بگیرید. توجه کنید که

در ارائهٔ هر تابعی، دامنه آن نیز باید ارائه شود. می‌خواهیم f را به‌وسیلهٔ جدول و هم‌چنین به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب نمایش دهیم.

حل: مقادیر $f(x)$ را پیدا می‌کنیم :

$$f(-۱)=۳(-۱)-۱=-۳-۱=-۴$$

$$f(-\frac{۱}{۳})=۳(-\frac{۱}{۳})-۱=-۱-۱=-۲$$

$$f(۰)=۳(۰)-۱=۰-۱=-۱$$

$$f(\frac{۱}{۳})=۳(\frac{۱}{۳})-۱=۱-۱=۰$$

$$f(۱)=۳(۱)-۱=۳-۱=۲$$

$$f(۲)=۳(۲)-۱=۶-۱=۵$$

جدول زیر مقادیر $f(x)$ متناظر با مقادیر x را نشان می‌دهد :

x	-۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۱	۲
$y=f(x)$	-۴	-۲	-۱	۰	۲	۵

اکنون برای مشخص کردن تابع به صورت زوج‌های مرتب، مجموعهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$f=\{(x,f(x))|x\ .\ D_f\}$$

$$f=\{(-۱,-۴)\ \text{و}\ (-\frac{۱}{۳},-۲)\ \text{و}\ (۰,-۱)\ \text{و}\ (\frac{۱}{۳},۰)\ \text{و}\ (۱,۲)\ \text{و}\ (۲,۵)\}$$

مثال ۳: تابع $f(x)=۲x+۳$ را با دامنه $\{-۲,-۱,۰,۱\}$ درنظر می‌گیریم. f را به وسیلهٔ زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

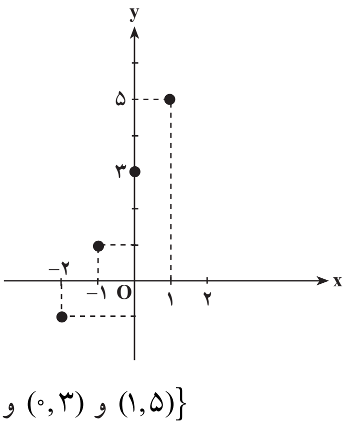
حل: داریم :

$$f(-۲)=-۴+۳=-۱$$

$$f(-۱)=-۲+۳=۱$$

$$f(۰)=۰+۳=۳$$

$$f(۱)=۲+۳=۵$$



$$f=\{(-۲,-۱)\ \text{و}\ (-۱,۱)\ \text{و}\ (۰,۳)\ \text{و}\ (۱,۵)\}$$

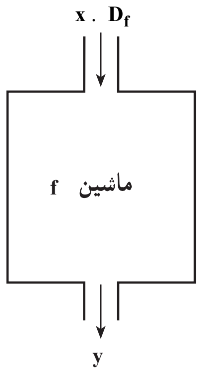
به‌طوری که در مثال‌های قبل دیده می‌شود، $f(x)$ علاوه‌براین که مقدار تابع f را معین می‌کند، قانون این تابع را نیز مشخص می‌نماید و به هر عضو از دامنهٔ تابع تنها یک عضو از بُرد را نسبت می‌دهد. اگر تابع f به عضوی از دامنه، مانند x ؛ عنصر y از بُرد تابع را نسبت دهد، می‌نویسیم :

$$y = f(x)$$

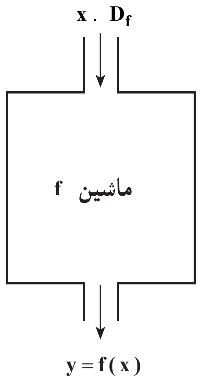
در این کتاب، دامنه و برد تابع‌هایی که با آن‌ها سروکار داریم مجموعهٔ اعداد حقیقی یا بخشی از اعداد حقیقی است. تابع f را که دامنه و بردش اعداد حقیقی باشد یعنی $D_f \subseteq \mathbb{R}$ و $R_f \subseteq \mathbb{R}$ تابع حقیقی با مقادیر حقیقی می‌نامند. اگر دامنه یک تابع مانند f مجموعه A و مقادیر تابع اعداد حقیقی باشند می‌نویسیم :

$$f:A \rightarrow .\ \mathbb{R}$$

تابع به‌عنوان ماشین



در ابتدای این بخش، تاریخ پیدایش و تکمیل مفهوم و تعریف امروزی تابع بیان شد، با کمی دقت در آن، مشخص می‌شود که تصور ذهنی مشترک همهٔ ریاضیدان‌ها از تعریف تابع این است که تابع مانند یک ماشین عمل می‌کند، به‌طوری که x از دامنهٔ تابع را در ورودی ماشین می‌گیرد و تنها یک مقدار y را در خروجی ظاهر می‌کند، پس می‌توان مدل مقابل را برای تابع درنظر گرفت :



چون ماشین f روی x عملی را انجام می‌دهد، می‌توان حاصل آن عمل روی x را با $f(x)$ نمایش داد، بنابراین در خروجی ماشین می‌توان به‌جای y از $f(x)$ استفاده کرد.

مقادیر x که متعلق به دامنهٔ تابع هستند، از طریق ورودی به ماشین راه پیدا می‌کنند، سپس درون ماشین f طبق دستور یا قاعده‌ای که از قبل مشخص شده است، مقدار منحصر به‌فرد $y = f(x)$ ساخته می‌شود.

باید توجه داشت که معمولاً از x برای نشان دادن متغیر، از f برای نشان دادن تابع و از y یا $f(x)$ برای نشان دادن مقدار تابع استفاده می‌کنیم.

اکنون می‌توان مثال صفحهٔ ۳۹ را که دربارهٔ طول فنر و وزنه آویخته شده به آن است را باتوجه به آنچه که دیدیم، با نمادهای :

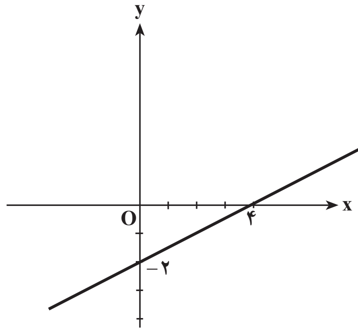
$$\begin{cases} f:D_f \to . \quad \mathbb{R} \\ p \quad f(p) \end{cases} \quad \text{یا} \quad f=\{(p,f(p)) | p \,.\, D_f\}$$

نیز نشان داد. بنابراین تابع f را به وسیلهٔ جدول، نمودار یا یکی از شکل‌های بالا می‌توان نمایش داد. آشکار است که تعریف f به هر صورت که باشد به هر p تنها یک l وابسته می‌کند. مثلاً همهٔ نمادهایی که برای تعریف تابع به‌کار برده‌ایم به $p=۱۵۰$ تنها مقدار $l=۱۳$ را نسبت می‌دهند.

از آنجا که تابع $f:x \quad y$ و مجموعهٔ زوج‌های مرتب که f را مشخص می‌کند، و مقدار تابع یعنی $f(x)$ و معادلهٔ $y=f(x)$، همگی به‌طور یکسان بستگی میان x و y را معین می‌کنند، پس از این، متناسب با موقعیت، ما از $f(x)$ و $y=f(x)$ نیز به‌عنوان تابع نام می‌بریم[۱]. اما گاهی بیان یک تابع به‌صورت یک قانون $f(x)$ مشکل و یا عملاً غیرممکن است، که در این صورت برای تجسم تابع از جدول و نمودار استفاده می‌شود.

مثال ۴: تابع حقیقی $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x \quad \frac{۱}{۲}x-۲ \end{cases}$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ درنظر می‌گیریم. داریم و $f(۰)=-۲$ و $f(۴)=۰$ و نمودار آن خط گذرنده بر دو نقطهٔ $(۰,-۲)$ و $(۴,۰)$ است.

x	y
۰	−۲
۴	۰



نکته: هر نقطه که مختصاتش در معادلهٔ $y=f(x)$ صدق کند بر نمودار تابع f قراردارد ؛ و برعکس، اگر نقطه‌ای بر نمودار تابع f واقع باشد مختصاتش در معادلهٔ بالا صدق خواهد کرد.

البته اگر دامنهٔ تابع را یک بازه، مثلاً $.۰,۴.$ درنظر بگیریم، نمودار تابع فقط پاره‌خطی خواهد بود که بین دو نقطه $(۰,-۲)$ و $(۴,۰)$ رسم می‌شود.

۱ــ تعریف تابع به وسیلهٔ مجموعهٔ زوج‌های مرتب و با استفاده از مفاهیم مجموعه‌ها روشن‌تر و دقیق‌تر و از نظر صوری نیز جالب است. اما چنین تعریفی نه صورت شهودی دارد و نه از توصیفی برخوردار است، و به‌کاربردن آن در بسیاری از موارد غیرعملی است.

مثال ۵: تابع $f(x)=۲x+۱$ با دامنه $.۱,۱-.$ داده شده است. کدام‌یک از نقاط زیر متعلق به نمودار آن می‌باشند؟

$$E(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}) \text{ و } D(-۱,-۱) \text{ و } C(-\frac{۱}{۲},۰) \text{ و } B(۰,۱) \text{ و } A(۲,۵)$$

حل: داریم :

$$A + (\text{نمودار} f) \quad : \quad A(۲,۵):۲+D_f$$

$$B\,.\,(\text{نمودار} f) \quad : \quad B(۰,۱):f(۰)=۲(۰)+۱=۱$$

$$C\,.\,(\text{نمودار} f) \quad : \quad C(-\frac{۱}{۲},۰):f(-\frac{۱}{۲})=۲(-\frac{۱}{۲})+۱=۰$$

$$D\,.\,(\text{نمودار} f) \quad : \quad D(-۱,-۱):f(-۱)=۲(-۱)+۱=-۱$$

$$E + (\text{نمودار} f) \quad : \quad E(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}):f(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲})+۱=۲$$

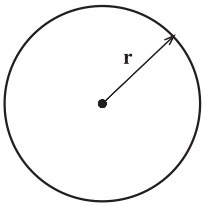
مثال ۶: تابع خطی $f(x)=ax+b$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌گونه‌ای مشخص نمایید که $f(۱)=۳$ و $f(-۱)=۱$.

حل: داریم :

$$\begin{aligned} &f(۱)=a(۱)+b=a+b && \Rightarrow \begin{cases} a+b=۳ \\ -a+b=۱ \end{cases} \\ &f(-۱)=a(-۱)+b=-a+b && \Rightarrow \quad \overline{۲b=۴ \Rightarrow b=۲, a=۱} \\ &f(x)=x+۲ \end{aligned}$$

مثال ۷: مساحت (A) دایره‌ای به شعاع r (شکل ۱) از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$A=.\,r^۲ \quad (. \simeq ۳/۱۴۱۶)$$



شکل ۱

به‌طور معمول این فرمول را با نماد تابعی به‌صورت $A(r)=.\,r^۲$ می‌نویسیم تا مشخص شود، مساحت دایره A، وابسته به شعاع دایره r است. هرچه شعاع بزرگتر شود، مساحت بزرگتر می‌شود. دامنه این تابع بازه $(۰,+.\,)$ است.