

گراف‌ها و کاربردهای آن



مقدمه

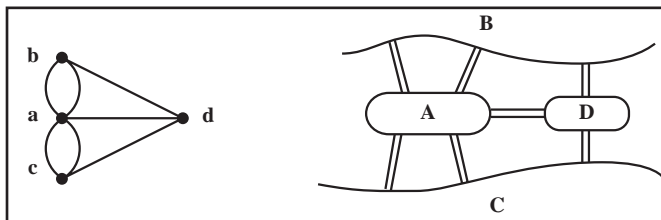
در این قسمت که شامل سه فصل است با الفبای نظریه گراف‌ها و کاربردهایش آشنا می‌شویم. عمدتاً از طبیعت جذاب گراف‌ها استفاده می‌کنیم، شهود را به کار می‌بندیم و با مثال‌های ملموس و معماهای گوناگون مفاهیم را روشن می‌سازیم. در عین حال در بست تسلیم شهود نمی‌شویم و در مواردی اثبات دقیق قضایا را ارائه می‌دهیم. گاه از کاربردهایی استفاده می‌کنیم که ممکن است تاحدی بدیهی به نظر برسند، اما هرگز معماها و مسائل ظاهراً کوچک را که انگیزه بخش‌اند دست کم نمی‌گیریم، زیرا در موارد بسیاری این گونه مسائل سرآغاز ایده‌ها و حتی نظریه‌های مهم ریاضی بوده‌اند. از دانش پژوهانی که دوره دبیرستان را پشت سر گذاشته‌اند انتظار داریم ذهن پویای خود را به کار اندازند و برای پاسخگویی به سؤال‌های عدیده‌ای که خود طرح می‌کنند، یاپرسش‌هایی که در متن مطرح می‌شوند ابتدا مثال‌های ساده و بعد رده‌های خاص گراف‌ها را مورد توجه قرار دهند و مطمئن باشند که در این زمینه می‌توانند مسائلی را مطرح کنند که در عین سادگی بیان، بزرگ‌ترین ریاضیدانان نیز از حل آنها عاجز باشند.

آشنایی با گراف‌ها

در این فصل با بیان چند مثال زمینه را برای تعریف انواع گراف‌ها آماده می‌کنیم و آن را با ارائه چند تعریف و قرارداد پایان می‌دهیم.

۱-۱- چند مثال

در قرن هیجدهم میلادی شهر کونیگسبرگ از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره تشکیل شده بود. در آن زمان هفت پل این چهار منطقه را به هم وصل می‌کردند. معمای زیر سال‌ها شهروندان را سرگرم کرده بود: آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق در شهر گشتی زد، از هر پل یک بار و تنها یک بار گذشت، و به مکان اول بازگشت؟ اوپلر در سال ۱۷۳۶ با حل مسأله پل‌های کونیگسبرگ نظریه گراف‌ها را بنیان گذاشت. وی به هر یک از این چهار منطقه نقطه‌ای از صفحه را تخصیص داد و به ازای هر پل بین دو منطقه، پاره خط یا کمانی بین دو نقطه متناظر با آنها رسم کرد. بدین ترتیب مطابق شکل ۱ به مدلی ریاضی دست یافت و به سادگی پاسخ معما را که منفی است دریافت.



شکل ۱- نمای شهر کونیگسبرگ و گراف مربوط به آن

امروزه این مدل را یک گراف یا، به سبب وجود «چند» به اصطلاح خط بین دو نقطه، به طور دقیق تر یک گراف چندگانه می نامند. اینک ما هم می توانیم مسائل مختلفی را به زبان نظریه گراف ها بیان کنیم.

مثال ۱: فرض می کنیم پنج تیم به نام های a, b, c, d, e باید دو به دو با یکدیگر مسابقه بدهند. پس از چندی می بینیم که:

a با b, c, d, e مسابقه داده (و بر همگی پیروز شده است).

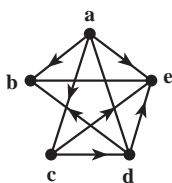
b با a و d روبه رو شده (و از هر دو شکست خورده است).

c با a, b, d, e مسابقه داده (بر d و e پیروز شده و از a شکست خورده است).

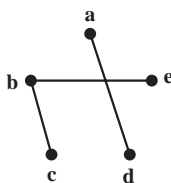
d با b, c, e بازی کرده (و b و e را شکست داده و از c شکست خورده است).

e با a, b, c, d مسابقه داده است (پیروزی ها و شکست های e قبلاً مشخص شده اند).

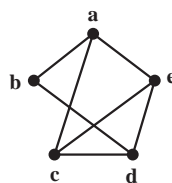
این وضعیت را می توانیم به صورت یک نمودار در صفحه مشخص کنیم. به ازای هر تیم یک نقطه در نظر می گیریم و دو نقطه را با پاره خط یا کمائی به هم وصل می کنیم هرگاه تیم های متناظر با هم مسابقه داده باشند. شکل ۲ مدل مربوط به این وضعیت را نشان می دهد.



شکل ۲



شکل ۳

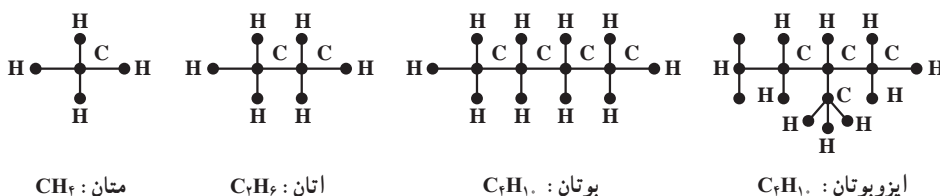


شکل ۴

سه شکل مربوط به مثال ۱

ممکن است به این وضعیت نمودار دیگری هم نسبت داد و آن نمودار مربوط به مسابقات انجام نشده است. برای این کار باز هم به ازای هر تیم یک نقطه در نظر می گیریم و این بار دو نقطه را با پاره خطی به هم وصل می کنیم هرگاه دو تیم مربوط با هم بازی نکرده باشند. نمودار مربوط به این وضعیت که در شکل ۳ نمایش داده شده است نشان می دهد که برای تکمیل این دور از مسابقات سه مسابقه دیگر باید برگزار شوند. فرض می کنیم که این مسابقات حتماً باید برنده هم داشته باشند. (برندگان را قبلاً مشخص کرده ایم). لذا می توانیم هنگام رسم شکل ۲ به جای مثلاً پاره خط، پاره خطی جهت دار رسم کنیم که جهت آن از برنده به سوی بازنده باشد. با این ترتیب شکل ۴ به دست می آید. این گراف نشان می دهد که مثلاً تیم e از سه تیم a, c, d شکست خورده و هنوز برنده نشده است. چنین گرافی را گراف جهت دار می نامیم.

مثال ۲: در درس شیمی دیده ایم که به هیدروکربن های اشباع شده نمودارهایی نسبت می دهند تا ساختار شیمیایی آنها را به نمایش بگذارند. در شکل ۵ چند نمونه از این هیدروکربن ها را که فرمول عمومی آنها C_nH_{2n+2} است می بینید.



شکل ۵ - چند نمونه از هیدروکربن ها

مثلاً نمودار مربوط به اتان که چگونگی پیوند کربن ها و هیدروژن ها را نشان می دهد ظرفیت کربن و هیدروژن را نیز مشخص می کند. در شکل ۵ می بینیم که با چهار کربن و ده هیدروژن دو هیدروکربن اشباع شده «مختلف» وجود دارند. بیش از دو تا چی؟ طبیعتاً پاسخ به این سؤال برای n های بزرگتر از ۴ آسان نیست. ▲

مثال ۳: شرکتی مایل است برای چهار شغل تمام وقت A_1, A_2, A_3 و A_4 کارمند استخدام کند. پنج نفر به نام های B_1, B_2, B_3, B_4 و B_5 برای تصدی این شغل ها داوطلب می شوند که طبق فهرست زیر برخی صلاحیت تصدی بیش از یک کار را دارند:

B_1 می تواند سه شغل A_1, A_2 و A_3 را اداره کند.

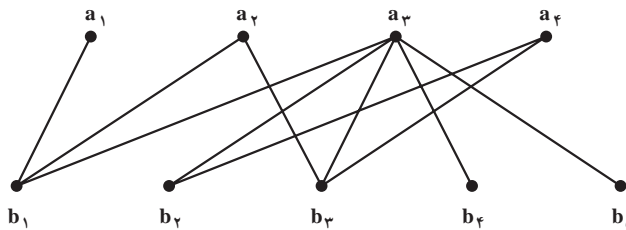
B_2 می تواند دو شغل A_3 و A_4 را بپذیرد.

B_3 قادر است هر یک از شغل های A_1, A_2 و A_3 را انجام دهد.

B_4 و B_5 هم می توانند تنها متصدی شغل A_3 باشند.

آیا با این پنج نفر، شرکت می تواند برای پست های خالی متصدی پیدا کند؟ این مسأله چند جواب دارد؟

برای بررسی این وضعیت باز هم یک مدل می سازیم. به این صورت که در صفحه، چهار نقطه متناظر با چهار شغل موردنظر و پنج نقطه دیگر متناظر با پنج داوطلب مذکور در نظر می گیریم و مطابق شکل ۶ هر نقطه b_i ، $1 \leq i \leq 5$ را با پاره خط یا پاره خط هایی به نقاطی چون a_j ، $1 \leq j \leq 4$ ، در صورتی وصل می کنیم که داوطلب B_i که با نقطه b_i در تناظر است صلاحیت انجام شغل A_j را که با نقطه a_j در تناظر است داشته باشد.



شکل ۶- گراف مربوط به مثال ۳

واضح است که برای تصدی A_1 تنها یک داوطلب وجود دارد و لذا این شغل به B_1 تخصیص داده می‌شود. حال تنها B_2 برای تصدی A_2 باقی می‌ماند. چون B_2 و B_3 تنها داوطلبان احراز پست A_2 هستند و B_2 قبلاً به کار A_2 گماشته شده است، باید الزاماً به B_3 سپرده شود. حال برای تصدی A_3 دو داوطلب باقی می‌مانند: B_4 و B_5 . پس این مسأله تنها دو جواب دارد و شرکت مجبور است B_1 را به کار A_1 ، B_2 را به کار A_2 ، B_3 را به کار A_3 ، B_4 یا B_5 را به کار A_3 بگمارد. ▲

۲-۱- چند تعریف و قرارداد

در زندگی پیچیدهٔ امروزی به مسائل فراوانی برمی‌خوریم که برای حل آنها مجبوریم از مدلی ریاضی مانند گراف استفاده کنیم. لذا لازم است این وضعیت‌ها را به صورت مجرد درآوریم و با الهام گرفتن از همین مسائل به بررسی ویژگی‌های این مجردات بپردازیم. نظریهٔ گراف‌ها به همین ترتیب به وجود آمده و به سرعت در حال رشد و شکوفایی است.

همان‌گونه که دیدیم گراف‌ها انواع گوناگون دارند. مثلاً برخی جهت‌دار و برخی چندگانه‌اند. برخی هم نامتناهی‌اند، به این معنا که بی‌نهایت نقطه یا بی‌نهایت خط دارند. اینک در بین انواع گراف‌ها تعریف رسمی ساده‌ترین نوع را ارائه می‌کنیم. در این قسمت تقریباً همه جا سروکار ما با همین گراف‌های (ساده) است.

تعریف: گراف (ساده) G زوجی مرتب چون (V, E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. اعضای V را رأس‌های G و اعضای E را یال‌های G می‌نامیم. مجموعه رأس‌های G را با $V(G)$ و مجموعه یال‌های آن را با $E(G)$ هم نمایش می‌دهیم.

به یاد داشته باشید که هر عضو یک مجموعه تنها یک بار در آن ظاهر می‌شود. مثلاً نمی‌نویسیم $\{a, a, a, b, b\}$ بلکه می‌نویسیم $\{a, b\}$.

مثال ۴: اگر $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}\}$ آن‌گاه بنا به تعریف،

$G = (V, E)$ گرافی است که پنج رأس و سه یال دارد. ▲

قرار داد: اگر در گراف G ، $u, v \in V(G)$ و $\{u, v\} \in E(G)$ ، برای سادگی، به جای $\{u, v\}$ می نویسیم uv و می گوئیم در G دو رأس u و v مجاورند. در این صورت گاهی گفته می شود رأس u (همچنین رأس v) بر یال uv واقع است. اصطلاح رایج دیگر این است که در G یال uv از رأس u (همچنین از رأس v) می گذرد یا مرور می کند. رأس های u و v دو سر یال uv نام دارند.

مثال ۵: اگر $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{ab, ac, ae, bd, cd, ce, de\}$ آن گاه بنا به تعریف، $G = (V, E)$ گرافی است که پنج رأس و هفت یال دارد. در این گراف مثلاً دو رأس a و b مجاورند زیرا $ab \in E$ ولی دو رأس b و e مجاور نیستند، زیرا $be \notin E$. واضح است که در این گراف از رأس a سه یال و از رأس b دو یال می گذرد. ▲

توجه دارید که هر گراف را می توان با یک نمودار، موسوم به نمودار گراف، نیز نمایش داد. برای این کار به ازای هر رأس G نقطه یا دایره کوچک دلخواهی، مثلاً در صفحه، در نظر می گیریم و دو نقطه متمایز را با پاره خط یا کمانی به هم وصل می کنیم به شرطی که مجموعه متشکل از دو رأس متناظر با آن دو نقطه عضوی از E باشد. یک نمودار گراف مثال ۴ را در شکل ۳ و یک نمودار گراف مثال ۵ را در شکل ۲ نمایش داده ایم. شکل ۶ نموداری از گراف $G = (V, E)$ را نمایش می دهد که در آن:

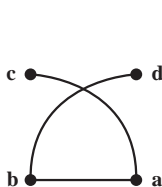
$$V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

$$E = \{a_1b_1, a_2b_1, a_3b_3, a_4b_1, a_1b_2, a_2b_3, a_3b_4, a_4b_5, a_1b_4, a_2b_5\}$$

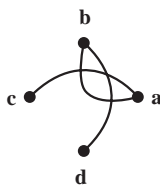
در این گراف از رأس a_3 پنج یال مرور می کنند؛ ولی از هر یک از دو رأس a_1 و b_5 تنها یک یال می گذرد.

مثال ۶: اگر $V(G) = \{a, b, c, d\}$ و $E(G) = \{ab, ac, bd\}$ آن گاه G گرافی است که چهار رأس و سه یال دارد.

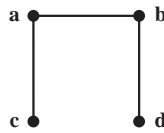
سه نمودار از این گراف را در شکل های زیر رسم کرده ایم.



شکل ۹



شکل ۸

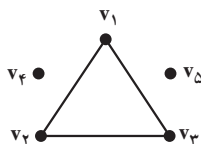


شکل ۷

واضح است که در شکل‌های ۸ و ۹ نقطه برخورد کمان‌های ac و bd متناظر با هیچ رأس این گراف نیست. ▲

برای راحتی گاهی نمودار گراف را با خود آن یکی می‌گیریم و به همین دلیل رأس را نقطه ویال را خط هم می‌نامیم. توجه دارید که نمودار گراف برای درک بهتر مطلب رسم می‌شود و باید حتی‌الامکان ساده باشد.

مثال ۷: فرض کنید گراف G با $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ و $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$ داده شده است. آن گاه G پنج رأس و سه یال دارد. در این گراف مثلاً رأس v_4 با هیچ رأس دیگر مجاور نیست. نمودار G به صورت زیر است که سه «بخش جدا از هم» دارد. ▲



شکل ۱۰- گراف مربوط به مثال ۷

مثال ۸: گراف مربوط به بوتان که در شکل ۵ رسم شده است ۱۴ رأس و ۱۳ یال دارد. این گراف تنها یک «بخش» دارد و در آن مثلاً رأسی وجود دارد که دقیقاً با چهار رأس دیگر مجاور است ولی به طور مثال رأسی وجود ندارد که دقیقاً با سه رأس دیگر مجاور باشد. ▲
توجه کنید که اگر در تعریف گراف (ساده) G تغییر کوچکی بدهیم تعریف گراف جهت دار به دست می‌آید که کاربردهای فراوان دارد.

تعریف: گراف جهت دار G زوجی مرتب چون (V, E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه تمام زوج‌های مرتب متشکل از اعضای V است.
می‌توانیم به هر گراف جهت دار هم نموداری نسبت دهیم. به عنوان مثال، اگر $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{(a, b), (a, c), (a, e), (c, d), (c, e), (d, b), (d, e)\}$ آنگاه (V, E) گراف جهت داری است که نمودار آن در شکل ۴ نمایش داده شده است. توجه دارید که در یک گراف جهت دار به ازای هر $u, v \in V$ با شرط $u \neq v$ حداکثر دو به اصطلاح یال جهت داری یکی از u به v و دیگری از v به u وجود دارند.^۱

۱- در تعریف گراف جهت دار بسیاری از مؤلفان E را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب متشکل از اعضای متمایز V می‌گیرند. بدانید که با این شرط مثلاً با ۲ رأس ۳ و با ۸ رأس ۸۴۸، ۱۹۲، ۳۵۹، ۷۹۳، ۱ گراف جهت دار «متفاوت» وجود دارند!

۱-۳- تمرین‌ها

۱- در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده، B_5 قادر به انجام کار A_7 نیز باشد شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟

۲- در مثال ۳ اگر علاوه بر شرایط داده شده، B_7 قادر به انجام کار A_7 نیز باشد شرکت به چند طریق می‌تواند پست‌های خالی را پر کند؟ (پاسخ ۴ است.)

۳- مسلماً دبیرستان شما در مسابقه‌های زیادی شرکت می‌کند. یکی از مسابقه‌ها را در نظر بگیرید و در پایان گراف یا گراف جهت‌دار مربوط به آن را مشخص کنید.

۴- گراف $G = (V, E)$ با $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ و

$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7\}$$

(الف) نمودار این گراف را رسم کنید.

(ب) اگر این رأس‌ها هفت شهر و این یال‌ها جاده‌های موجود بین این شهرها را نمایش دهند، آیا تنها با عبور از این جاده‌ها می‌توان از هر شهری به شهر دیگر سفر کرد؟

(پ) این گراف از چند «بخش جدا از هم» تشکیل شده است؟ (پاسخ ۳ است.)

۵- در زبان عربی کلمه «شجر» به معنای درخت است و درخت گراف خاصی است که بعداً در فصل ۳ بررسی خواهد شد. درباره ارتباط بین «شجره نامه خانوادگی» و گراف‌ها چه می‌دانید؟ شجره نامه خانوادگی خود را رسم کنید.

۶- شش بازه باز $(0, 2)$ ، $(1, 4)$ ، $(2, 5)$ ، $(3, 4)$ ، $(3, 8)$ ، $(6, 9)$ ، از اعداد حقیقی داده شده‌اند. با این بازه‌ها گرافی چون G می‌سازیم که رأس‌هایش متناظر با این بازه‌ها باشند و دو رأس G با این شرط مجاور باشند که بازه‌های مربوط متمایز باشند و اشتراک آنها تهی نباشد. مثلاً چون اشتراک بازه‌های $(0, 2)$ و $(1, 4)$ تهی نیست رأس‌های مربوط باید مجاور باشند. اما چون اشتراک بازه‌های $(0, 2)$ و $(2, 5)$ تهی است رأس‌های مربوط به این دو بازه نباید مجاور باشند. (چنین گرافی را گراف بازه‌ها می‌نامیم.) (الف) نمودار گراف بازه‌های داده شده را رسم کنید.

(ب) با معرفی پنج بازه مناسب نشان دهید گراف شکل ۳ را می‌توان گراف بازه‌ها دانست.

(پ) نشان دهید گراف شکل ۲ نمی‌تواند گراف بازه‌ها باشد؛ یعنی، پنج بازه باز نمی‌توان یافت که گراف مربوط به آنها، طبق تعریف، «همان» گراف شکل ۲ باشد.

توجه: گراف‌هایی که از بازه‌ها به دست می‌آیند در باستان‌شناسی، ژنتیک و در تحلیل ادبی کاربرد دارند. درک عمیق این کاربردها مستلزم آگاهی از زمینه‌های مربوط است.

مجله ریاضی

می‌گویند در روزگاران پیش نقشه‌کش‌ها از این «واقعیت» آگاه بودند که هر نقشه جغرافیایی مسطح یا کروی را می‌توان با حداکثر چهاررنگ طوری رنگ کرد که مناطق «مجاور» رنگ‌های متفاوت داشته باشند. شاید هم مسأله چهاررنگ از تراوشات ذهن ریاضیدانان باشد. به هر تقدیر، نخستین مرجع مکتوب این مسأله نامه مورخ ۲۳ اکتبر ۱۸۵۲ میلادی^۱ دموگن به ویلیام همیلتن است. مسأله چهاررنگ که به «مرض» چهاررنگ هم شهرت یافت بیش از یک قرن به طور جدی ذهن بسیاری را به خود مشغول داشت و در نظریه گراف‌ها معادل‌های بسیاری برای آن مطرح شد. سرانجام در سال ۱۹۷۷ میلادی ک. اِپِل و و. هِکِن با استفاده از قضیه‌های فراوان و ۱۲۰۰ ساعت از وقت یکی از سریع‌ترین کامپیوترهای زمان این مسأله سرکش را مهار و «قضیه» چهاررنگ را «ثابت» کردند. اما، هنوز هم مرض چهاررنگ شیوع دارد و بسیاری به فکر ارائه اثباتی سنتی و حتی الامکان ساده برای آن هستند.