بخش دوم

فصل سوم

تعمیم حد

هدف کلی

تعیین حد تابع وقتی متغیر به $+\infty$ (یا $-\infty$) میل می‌کند. همچنین بررسی تابع‌هایی که حد آن‌ها، وقتی x به یک عدد حقیقی یا $\pm\infty$ میل می‌کند، $+\infty$ یا $-\infty$ است.

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ حد در بینهایت را تعریف کند.

۲ــ حد بینهایت برای یک تابع را تعریف کند.

پیش‌آزمون (۳)

۱ــ فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$. اگر x برابر عددهای $۲+۱$ ، $۲+\frac{۱}{۲}$ ، ... یا $۲+\frac{۱}{n}$ باشد مقدار $f(x)$، ۱، ۲، ... یا n خواهد شد. مثلاً :

$$f(۲+\frac{۱}{n})=\frac{۱}{(۲+\frac{۱}{n})-۲}=\frac{۱}{\frac{۱}{n}}=n$$

با توجه به شکل ۵۱ــ۲ وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود $۲+\frac{۱}{n}$ به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؟ در چنین حالتی برای $f(۲+\frac{۱}{n})$ چه اتفاقی می‌افتد؟

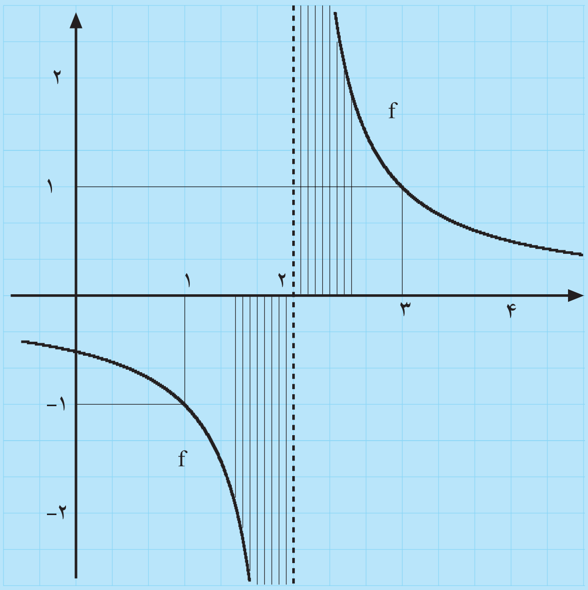
۲ــ اگر در سؤال ۱، x به‌صورت $۲-\frac{۱}{n}$ و با افزایش n، به عدد ۲ نزدیک شود $f(۲-\frac{۱}{n})$ چه وضعیتی دارد؟ توجه کنید که :

$$f(۲-\frac{۱}{n})=\frac{۱}{(۲-\frac{۱}{n})-۲}=\frac{۱}{-\frac{۱}{n}}=-n$$

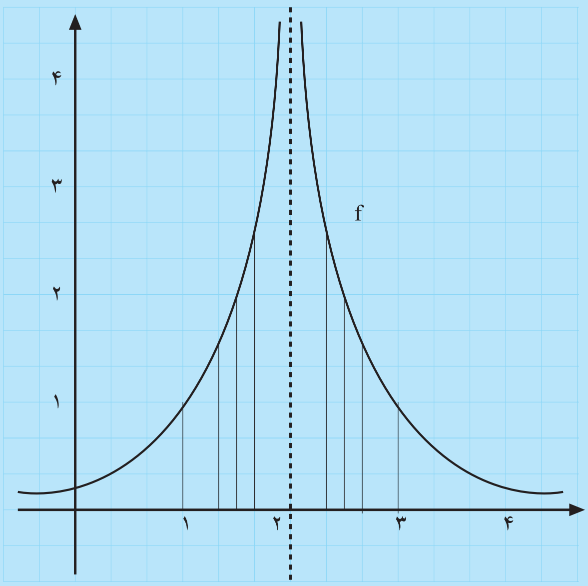
۳ــ اگر $f(x)=\frac{۱}{(x-۲)^۲}$ و متغیر x به‌صورت $۲+\frac{۱}{n}$ یا $۲-\frac{۱}{n}$ ، با افزایش n، به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر شوند وضعیت $f(x)$ چگونه خواهد بود؟ (راهنمایی : نشان دهید که $f(۲-\frac{۱}{n})=f(۲+\frac{۱}{n})=n^۲$) (شکل ۵۲ــ۲).

۴ــ فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$ و x عددهای ۱، ۴، ۹، ۱۶، ...، $n^۲$ را اختیار کند، مقدار $f(x)$ چه عددهایی خواهد بود؟ وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر شود $f(x)$ چگونه تغییر می‌کند؟ نمودار $y=\sqrt{x}$ را در $[۰\ ,\ +\infty)$ رسم کنید و رفتار این تابع را، وقتی x بزرگ می‌شود، ملاحظه کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۵۱ــ۲



شکل ۵۲ــ۲

۳ــ۲ــ تعمیم حد

تاکنون در حدهایی که مورد بررسی قرار داده‌ایم، عدد a و عدد L هر دو، عدد حقیقی بوده‌اند. در این قسمت می‌خواهیم ببینیم اگر a یا L بینهایت شوند چگونه باید عمل کرد.

فعالیت ۱۰ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}\,(x\neq ۰)$ ، را درنظر بگیرید.

(به مثال روبه‌رو نیز توجه کنید.)

۱) جدول ۲۰ــ۲ را کامل کنید.

۲) در جدول ۲۰ــ۲، x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) با نزدیک شدن x به صفر، f(x)ها چگونه تغییر می‌کنند؟

۴) آیا می‌توان گفت که اگر x به عدد صفر بسیار نزدیک باشد، f(x) می‌تواند از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر شود؟

۵) با توجه به آنچه در مورد $+\infty$ می‌دانید، درست است که بگوییم حد f(x)، وقتی $x\to ۰$، $+\infty$ است؟

۶) آیا درست است که بنویسیم؟ $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{x^{۲}}=+\infty$

۷) نمودار $y=f(x)$ در شکل ۵۳ــ۲ رسم شده است آیا از این نمودار هم معلوم می‌شود که وقتی x به عدد صفر میل می‌کند f(x) به $+\infty$ میل می‌کند؟

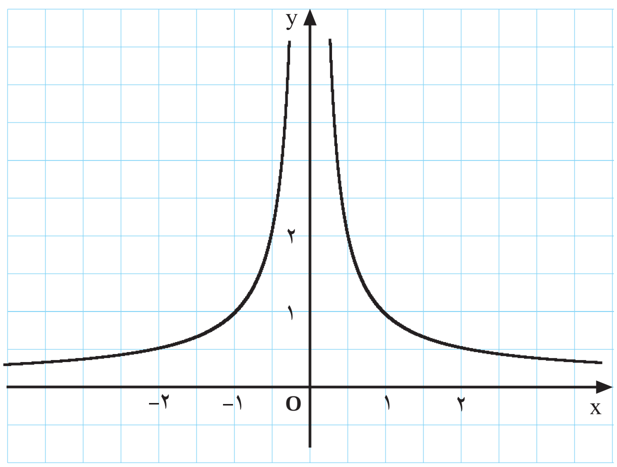
۸) آیا درست است که بگوییم :

> $\frac{۱}{x^{۲}}$ را هرچه بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم به شرط آن‌که x را به‌قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

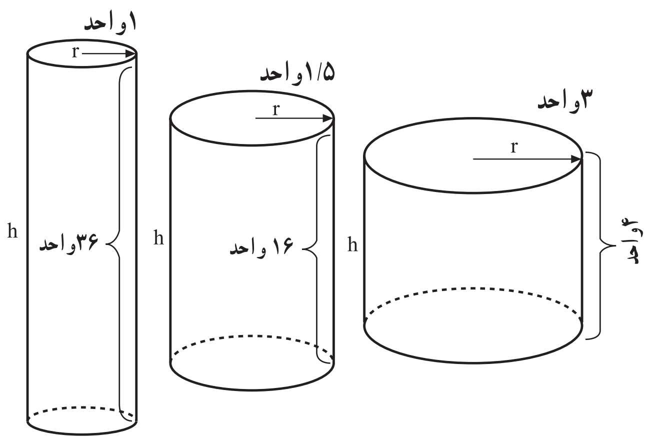
مثال: فرض کنید استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع h داریم که حجم آن عدد ثابت ۱۰۸ است. یعنی $\pi r^{۲}h=۱۰۸\Rightarrow r^{۲}h\simeq ۳۶$ واضح است که با تغییر شعاع، ارتفاع استوانه تغییر خواهد کرد. شکل ۵۴ــ۲ این بستگی را نشان می‌دهد.

جدول ۲۰ــ۲

x	…	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	…	۰	…	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	…
$f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$	…	۴								۴	…



شکل ۵۳ــ۲



شکل ۵۴ــ۲

فعالیت ۱۱ـ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$ ، را درنظر بگیرید.

۱) جدول ۲۱ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۱ـ۲

x	...	−۰/۲	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	...	۰	...	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	...
$f(x)=\frac{1}{x}$	...			−۱۰۰						۱۰۰۰			...

۲) در جدول ۲۱ـ۲ متغیر x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) با نزدیک شدن x به عدد صفر مقدارهای f(x) چگونه تغییر می‌کنند؟

۴) آیا می‌توان گفت وقتی x از چپ به عدد صفر نزدیک می‌شود f(x) به $-\infty$ میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\cdots$$

۵) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

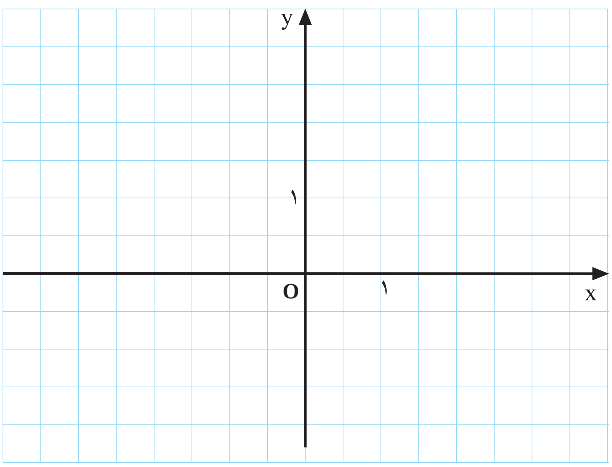
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

۶) جدول ۲۲ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۲ـ۲

x	−۲	−۱	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲
f(x)					تعریف نشده				

۷) نمودار $y=\frac{1}{x}$ را در دستگاه شکل ۵۵ـ۲ رسم کنید.



شکل ۵۵ـ۲

۸) به کمک نمودار $f(x)=\frac{1}{x}$ رفتار این تابع را، وقتی $x\to 0$ ، بررسی کنید.

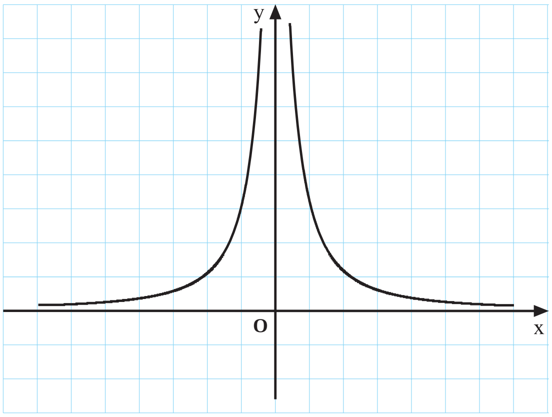
۹) آیا نمودار نیز درستی نتایج مرحله‌های ۵ و ۶ را تأیید می‌کند؟

۱۰) آیا تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ ، وقتی $x\to 0$ حد دارد؟ چرا؟

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ ، وقتی $x\to 0$ ، حد ندارد.

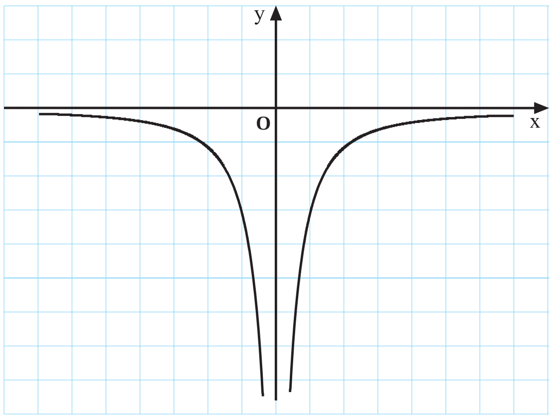
۱ــ۳ــ۲ــ تعریف (حدّ بینهایت): فرض کنید تابع f دربازه‌ی باز I که شامل عدد a است، مگر احتمالاً در a، تعریف شده باشد.

الف) حد تابع f، وقتی $x \to a$ ، $+\infty$ است هرگاه بتوانیم f(x) را از هر عدد بزرگی، بزرگ‌تر کنیم، به شرط آن‌که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.



شکل ۵۶ــ۲

ب) حد تابع f، وقتی $x \to a$ ، $-\infty$ است هرگاه بتوانیم f(x) را از هر عدد منفی با قدر مطلق بزرگ، کوچک‌تر کنیم، به شرط آن که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.



شکل ۵۷ــ۲

مثلاً،

(شکل ۵۶ــ۲) $$\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{x^{۲}} = +\infty$$

(شکل ۵۷ــ۲) $$\lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{x^{۲}} = -\infty$$

مثال‌ها

۱. نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱}{(x-۱)^{۲}} = +\infty$$

حل ۱: فرض کنید $X = x-۱$ واضح است که $x \to ۱$ معادل است با $X \to ۰$ بنابراین،

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱}{(x-۱)^{۲}} = \lim_{X\to ۰} \frac{۱}{X^{۲}} = +\infty$$

۲. نشان دهید که

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{-۴}{(۲x+۱)^{۲}} = -\infty$$

حل ۲: می‌دانیم که $۲x+۱ = ۲(x+\frac{۱}{۲})$ و $x \to \frac{-۱}{۲}$ معادل است با $X = x + \frac{۱}{۲} \to ۰$ بنابراین،

$$\lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{-۴}{(۲x+۱)^{۲}} = \lim_{x\to -\frac{۱}{۲}} \frac{-۴}{۴(x+\frac{۱}{۲})^{۲}} =$$

$$\lim_{X\to ۰} \frac{-۱}{X^{۲}} = -\infty$$

تمرین ۸ ـ ۲

حدهای زیر را بررسی کنید، در صورت وجود حد نامتناهی، آن حد را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{-۱}{(x-۲)^۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۳}} \dfrac{۹}{(۱-۳x)^۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{-۱}{x-۴}$

ت) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} \dfrac{۱}{۲x+۱}$

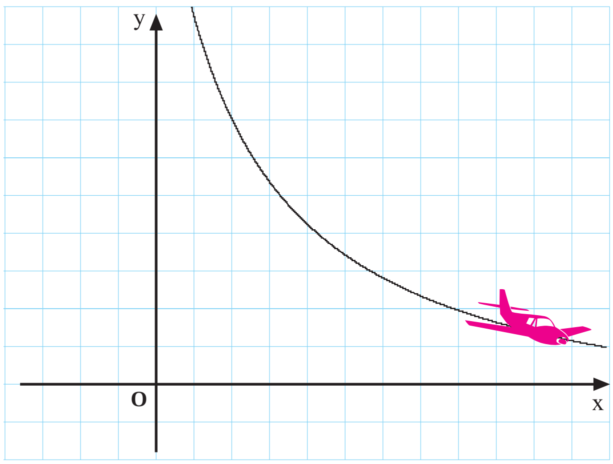
۲ـ۳ـ۲ـ حد در بینهایت: اینک می‌خواهیم مفهوم حد یک تابع را، وقتی $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، بررسی کنیم.

فعالیت ۱۲ـ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر را درنظر می‌گیریم :

$$f(x)=\frac{۱}{x},\quad x\neq ۰$$

می‌خواهیم رفتار این تابع را وقتی $x \to +\infty$ بررسی کنیم.



شکل ۵۸ ـ ۲

۱) جدول ۲۳ـ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۳ ـ ۲

x	...	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
$f(x)=\frac{۱}{x}$	...						...

۲) در جدول ۲۳ـ۲ متغیر x چگونه تغییر کرده است؟

۳) وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند، f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

۴) آیا با میل کردن x به $+\infty$ ، f(x) به صفر میل می‌کند؟

۵) آیا رابطه‌ی زیر برقرار است؟

$$(*) \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

۶) نمودار $y=\frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $(0,+\infty)$ رسم کنید.

۷) با استفاده از نمودار $y=\frac{1}{x}$ حد $\frac{1}{x}$ را وقتی $x\to+\infty$ بررسی کنید.

۸) آیا نمودار هم تساوی رابطه‌ی(*) را تأیید می‌کند؟

کار در کلاس ۴_۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x}, (x\neq 0)$ را درنظر می‌گیریم.

۱) جدول ۲۴_۲ را کامل کنید.

جدول ۲۴_۲

x	...	−۱۰۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰
$f(x)=\frac{1}{x}$	...						

۲) در جدول ۲۴_۲ متغیر x چگونه تغییر می‌کند؟

۳) آیا x به $-\infty$ میل می‌کند؟

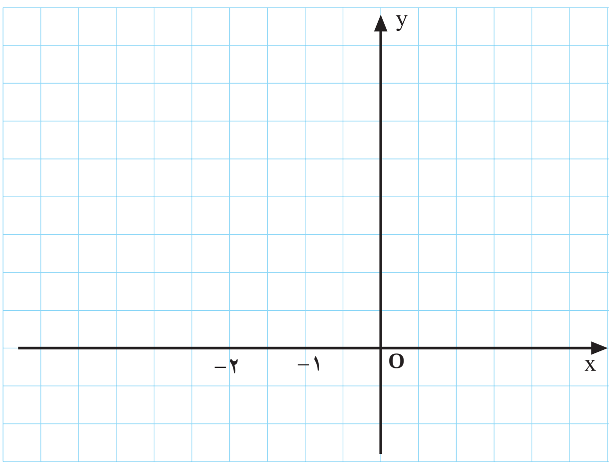
۴) با میل کردن x به $-\infty$ ، f(x) چگونه تغییر کرده است؟

۵) آیا f(x) به صفر میل کرده است؟

۶) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

۷) نمودار $y=\frac{1}{x}$ را در بازه‌ی $(-\infty,0)$ و در شکل ۵۹_۲ رسم کنید.



شکل ۵۹_۲

۸) آیا نمودار هم نشان می‌دهد وقتی $x\to-\infty$ ، f(x) به صفر میل می‌کند؟

بنابراین آنچه مورد بررسی قرار گرفت :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}$$

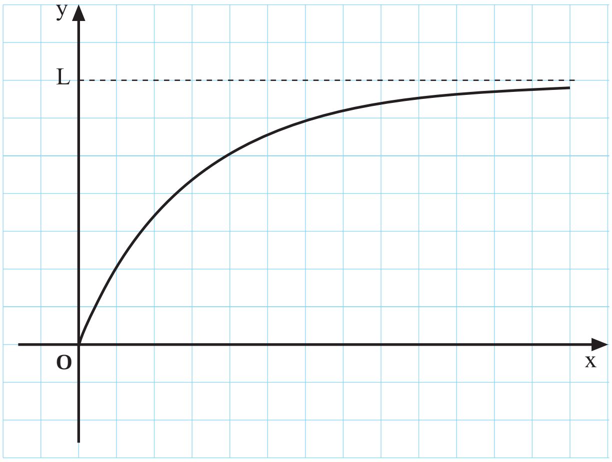
۳ــ۳ــ۲ــ تعریف (حد در بینهایت)

الف) حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$:

فرض کنید تابع f برای $x > a$ تعریف شده باشد. گوییم حد f(x) وقتی $x \to +\infty$ مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم f(x) را هر چه‌قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را به قدر کافی بزرگ اختیار کرده باشیم.

ب) حد یک تابع وقتی $x \to -\infty$:

فرض کنید تابع f برای $x < a$ تعریف شده باشد. گوییم حد f(x)، وقتی $x \to -\infty$ ، مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم f(x) را هرچه‌قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را از هر عدد منفی با قدر مطلق بزرگ، کوچکتر کنیم (شکل ۶۰ــ۲).



شکل ۶۰ــ۲

مثلاً،

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

لذا، اگر قرار دهیم $t=\frac{۱}{x}$ آن‌گاه (جدول‌های ۲۵ــ۲ و ۲۶ــ۲ ملاحظه شوند)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=\lim_{t\to ۰^+} t=۰$$

همچنین،

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=\lim_{t\to ۰^-} t=۰$$

جدول ۲۵ــ۲

x	$t=\frac{۱}{x}$
۱	۱
۱۰	۰/۱
۱۰۰	۰/۰۱
۱۰۰۰	۰/۰۰۱
۱۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۱
۱۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۱

$x \longrightarrow +\infty$
$t \longrightarrow ۰^+$

از این مطلب می‌توان استفاده کرد و بسیاری از حدهای کسری را حساب کرد.

جدول ۲۶ــ۲

x	$t=\frac{۱}{x}$
−۱	−۱
−۱۰	−۰/۱
−۱۰۰	−۰/۰۱
−۱۰۰۰	−۰/۰۰۱
−۱۰۰۰۰	−۰/۰۰۰۱
−۱۰۰۰۰۰۰	−۰/۰۰۰۰۰۱
$-۱۰^{۱۰}$	$-۱۰^{-۱۰}$

$x \longrightarrow -\infty$
$t \longrightarrow ۰^-$

الف) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{۳+۴x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(۲-\frac{۱}{x})}{x(\frac{۳}{x}+۴)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲-\frac{۱}{x}}{\frac{۳}{x}+۴}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۲-t}{۳t+۴}=\frac{۲-۰}{۰+۴}=\frac{۱}{۲}$$

ب) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{x^۳+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{۱+\frac{۱}{x^۳}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t}{۱+t^۳}$$

$$=\frac{۰}{۱+۰}=۰$$

پ) ممکن است حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$ و یا $x \to -\infty$ عددی حقیقی نباشد بلکه $+\infty$ یا $-\infty$ باشد. به فعالیت زیر توجه کنید.

فعالیت ۱۳ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۵$ را درنظر می‌گیریم.

۱) مقدارهای $f(x)$ را، برای xهایی که در جدول (۲۷ــ۱) داده شده است، محاسبه کنید و در جدول بنویسید.

جدول ۲۷ــ۲

x	...	-۱۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
$f(x)=۲x+۵$	...									۲۰۰۰۰۵	...

۲) هنگامی که متغیر x به قدر کافی بزرگ اختیار شود مقدار $f(x)$ چگونه است؟

۳) آیا با میل کردن x به $+\infty$، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند؟

۴) آیا با میل کردن x به $-\infty$، $f(x)$ هم به $-\infty$ میل می‌کند؟

۵) آیا رابطه‌های زیر صحیح است؟

$$\lim_{x\to+\infty}(۲x+۵)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(۲x+۵)=-\infty$$

کار در کلاس ۵ــ۲

فعالیت ۱۳ــ۲ را برای تابع $f(x)=-۳x+۵$ تکرار کنید.

فعالیت ۱۴ــ۲

تابع $f(x)=۲x^۲+۱۰$ را درنظر بگیرید.

۱) جدول ۲۸ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۸ــ۲

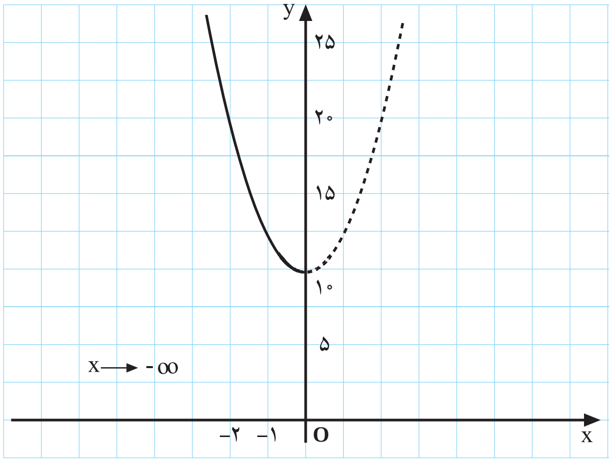
x	...	-۱۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰	...
$f(x)=۲x^۲+۱۰$	...						...

۲) وقتی $x \to -\infty$ مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟

۳) آیا وقتی $x \to -\infty$، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند؟

۴) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (۲x^{۲}+۱۰) = +\infty$$



شکل ۶۱ــ۲

۵) جدول ۲۹ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۹ــ۲

x	...	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	...
$f(x)=۲x^{۲}+۱۰$	...				۲۰۰۱۰		...

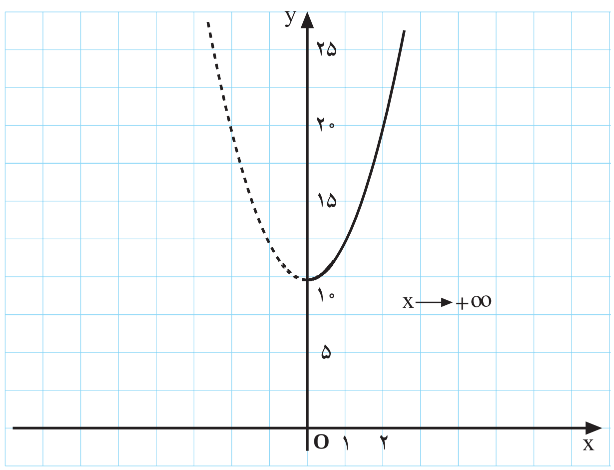
۶) وقتی $x \to +\infty$ مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟

۷) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (۲x^{۲}+۱۰) = +\infty$$

۸) آیا درست است که بنویسیم؟

$$\lim_{x\to\pm\infty} (۲x^{۲}+۱۰) = +\infty$$



شکل ۶۲ــ۲

(منظور از $x \to \pm\infty$ آن است که x به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند.)

با توجه به فعالیت‌های ۱۲ـ۲، ۱۳ـ۲ و ۱۴ـ۲ می‌توان نشان داد که اگر m یک عدد صحیح مثبت و a عددی حقیقی و غیرصفر باشد آن‌گاه :

$$\lim_{x\to+\infty} ax^m = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$$

(این حکم برای هر عدد حقیقی مثبت m نیز برقرار است).

و همچنین

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^m} = 0 \qquad (a\in\mathbb{R})$$

(وقتی $x\to+\infty$، حکم برای هر عدد حقیقی مثبت m نیز برقرار است).

ضمناً، اگر m عدد مثبت زوج باشد داریم :

$$\lim_{x\to-\infty} ax^m = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$$

ولی اگر m عدد مثبت فرد باشد داریم :

$$\lim_{x\to-\infty} ax^m = \begin{cases} -\infty, & a>0 \\ +\infty, & a<0 \end{cases}$$

واضح است که

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^0 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^0} = a$$

از مطالب بالا برای تعیین حد عبارت‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای هستند استفاده می‌شود.

در زیر، مثال‌هایی در این مورد ملاحظه می‌کنید.

مثال‌های حل شده

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5-x+7}{x^3-2x^2+3x}=?$

حل: در صورت و مخرج کسر از جمله‌ی با بزرگ‌ترین درجه فاکتور می‌گیریم :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5-x+7}{x^3-2x^2+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^5})}{x^3(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (2x^2) = +\infty$$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-7x^2+1}{x-3x^2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-7x^2+1}{x-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4(1-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^4})}{-3x^2(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{1}{3}x^2 = -\infty$$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x^5+x}{1+x^7-x^3}=?$

حل: مانند دو مثال قبل عمل می‌کنیم :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x^5+x}{1+x^7-x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^5(-\frac{1}{x^3}+1-\frac{1}{x^4})}{x^7(\frac{1}{x^7}+1-\frac{1}{x^4})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

ت) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5-x^4+x^2+3}{2-2x^5+x^4-x^2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5-x^4+x^2+3}{2-2x^5+x^4-x^2} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5})}{-2x^5(-\frac{1}{x^5}+1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{2} = -1/5$$

ث) عدد a را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-ax^2+1}{2x^2+1} = 3$$

حل:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-ax^2+1}{2x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}-a+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = -\frac{a}{2}$$

پس باید $\frac{-a}{2}=3$ و یا $a=-6$.

تمرین ۹ـــ۲

۱) حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۲x^{۲}+۵x+۱}{x+۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-۳x-۲}{۵x^{۲}+۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۲x^{۲}+x-۳}{۳x^{۲}+۷x-۱}$

ت) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۲x+۵}{-\frac{۱}{۲}x+۶}$

ث) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^{۳}+۱}{x-۲x^{۳}}$

ج) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-x^{۲}+۱)$

۲) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x^{m}+x^{۲}+۱}{x^{۲}+۳x-۱}$ داده شده است. عدد m را چنان بیابید که :

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=۲$$

(**راهنمایی:** عبارت‌های صورت و مخرج کسر مساوی f(x) را بر $x^{۲}$ تقسیم کنید.)

۳) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است.

$f(x)=\dfrac{ax^{۲}+۳x^{۲}-۱}{x^{۲}-۲x+۴}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=-۴$$

۴) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$f(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x+۷}{x^{m}+x^{۲}-۳}$ حدود m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=۰$$

۵) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$f(x)=\dfrac{x^{n}-۲x^{n-۱}+۵}{x^{۳}-۲x^{۲}+۷x+۱}$ حدود n را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

۶) فرض کنید $f(x)=\dfrac{۳x^{m}+۱}{x^{۲}+x+۱}$. m را چنان تعیین کنید که

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=۰$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ اگر $f(x)=\frac{x^{2}-2x-3}{x^{2}-9}$ در $x=3$ پیوسته باشد، مقدار $f(3)$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر m عددی طبیعی باشد و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{m}+x+1}{x^{2}+2}=+\infty$، کمترین مقدار m چیست؟

۳ــ اگر n عددی طبیعی باشد و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^{n}-3x+14}{x^{2}+6}=0$، بیشترین مقدار n چیست؟

۴ــ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^{n}+2x^{2}+1}{ax^{3}+2}=2$، مقدار n و a را به‌دست آورید.

۵ــ اگر به ازای مقدارهای بزرگ x، $\frac{4x^{2}+3x+1}{8x^{2}+1}\le f(x)\le\frac{x+2}{2x-1}$، مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ را به‌دست آورید.

۶ــ اگر $f(x)=2ax^{3}+x-a+20$ بر $(x+2)$ بخش‌پذیر باشد، مقدار $f(0)$ برابر چیست؟

۷ــ اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{2x+1}$ را به‌دست آورید.

تمرین‌های تکمیلی بخش دوم

۱)تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ باضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}3+2x, & x\geq 1\\ x+4, & x<1\end{cases}$

داده شده است.

الف) با توجه به ضابطه‌ی f جدول زیر را کامل کنید.

x	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	... ۱ ...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)							

ب) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را با استفاده از جدول به دست آورید و درستی آن را بررسی کنید.

۲) حد راست و حد چپ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2-9}{2x-3}, & x\neq\dfrac{3}{2}\\ 2x+4, & x=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ را وقتی $x\to\dfrac{3}{2}$ به دست آورید. آیا $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x)$ وجود دارد؟

۳) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{x}, & x\geq\dfrac{1}{2}\\ 2-x-x^2, & x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$ داده شده است.

پیوستگی این تابع را در نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$ بررسی کنید.

۴) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax+4, & x<-2\\ \dfrac{2}{x}+b, & x>-2\\ 6, & x=-2\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-2$ پیوسته باشد.

۵) حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{-1}{(x+2)^2}$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x+2}{1-2x}$

پ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5x+2}$

ت) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}}{2+\sqrt{x-1}}$

ث) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x+\sin 2x+\sin 3x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\sin x}{2x^2}$

چ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x\sin^2 2x}{5x^3}$

ح) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\pi-x}$