با تشکیل جدول تغییرات تابع نشان دهید که وقتی x که به سمت $+\infty$ برود ، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ می‌رود.

مثال ۲: تابع همانی $f(x)=x$ را درنظر می‌گیریم و مقادیر $f(x)$ متناظر با xهای از لحاظ قدرمطلق بزرگ مثبت و منفی محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	$-\infty$	←	…	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	…	→	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	←	…	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	…	→	$+\infty$

این جدول نشان می‌دهد که وقتی x به سمت $-\infty$ می‌رود، $f(x)$ نیز به سمت $-\infty$ می‌رود و هنگامی که x به سمت $+\infty$ می‌رود، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ می‌رود. یعنی داریم :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

به‌طور خلاصه می‌توان نوشت : $$\lim_{x\to\pm\infty}(x)=\pm\infty$$

مثال ۳: تابع $f(x)=x^۲+۱$ را درنظر می‌گیریم و مقادیر $f(x)$ متناظر با مقادیر از لحاظ قدرمطلق بزرگ x را محاسبه کرده و در جدولی می‌نویسیم :

x	$-\infty$	←	…	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	…	→	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	←	…	$۱۰^{۱۰}+۱$	$۱۰^۸+۱$	$۱۰^۶+۱$	$۱۰^۴+۱$	۱	$۱۰^۴+۱$	$۱۰^۶+۱$	$۱۰^۸+۱$	$۱۰^{۱۰}+۱$	…	→	$+\infty$

این جدول نشان می‌دهد که :

$$\lim_{x\to-\infty}(x^۲+۱)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(x^۲+۱)=+\infty$$

به‌صورت خلاصه : $$\lim_{x\to\pm\infty}(x^۲+۱)=+\infty$$

نکتهٔ ۱: دیدیم که $\lim_{x\to\pm\infty}(x)=\pm\infty$. با توجه به حد توان nام یک تابع، حد تابع $f(x)=x^n$ (n عدد صحیح مثبت) در $+\infty$ و $-\infty$ به‌صورت زیر تعیین می‌شود :

اگر $n=۲k$ آن‌گاه،

$$\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n=+\infty$$

اگر $n=۲k+۱$ آن‌گاه،

$$\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty \quad و \quad \lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty$$

یعنی حد تابع $f(x)=x^n$ در $\pm\infty$ حالتی که n عددی زوج باشد برابر $+\infty$ است، و هنگامی که n عددی فرد باشد، $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty$. در این حالت به‌طور خلاصه می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n=\pm\infty$$

مثال ۱: حد $f(x)=x^۲$ در $\pm\infty$ برابر است با $+\infty$

مثال ۲: حد $f(x)=x^۳$ در $\pm\infty$ برابر است با $\pm\infty$ یعنی :

$$\lim_{x\to+\infty} x^۳=+\infty \quad و \quad \lim_{x\to-\infty} x^۳=-\infty$$

نکتهٔ ۲: اگر $a\neq ۰$ عددی حقیقی باشد حد $f(x)=ax^n$ (n عدد صحیح مثبت) را در $\pm\infty$ با توجه به علامت a می‌توانیم به‌دست آوریم.

مثال

$$\lim_{x\to+\infty} ۲x^۲=۲(+\infty)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}(-۲x^۲)=-۲(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} ۲x^۳=۲(+\infty)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}(-۲x^۳)=-۲(-\infty)=+\infty$$

قضایای حد مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع برای حدهای در $\pm\infty$ که مقدار حد اعداد باشند، نیز برقرار است. اما این قضایا را نباید در مورد توابعی که حد $\pm\infty$ دارند به‌کار برد. زیرا توابع با حدهای $\pm\infty$، اصولاً جزو توابعی که دارای حد باشند محسوب نمی‌شوند.

حد چند جمله‌ای‌ها در $\pm\infty$: چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱$ را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم حد آن را در $\pm\infty$ محاسبه کنیم. برای این کار $f(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$f(x)=۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱=۲x^۳(۱+\frac{۵x^۲}{۲x^۳}+\frac{۴x}{۲x^۳}-\frac{۱}{۲x^۳})$$

$$=۲x^۳(۱+\frac{۵}{۲x}+\frac{۴}{۲x^۲}-\frac{۱}{۲x^۳})$$

پس :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱)=\lim_{x\to\pm\infty} ۲x^۳(۱+\frac{۵}{۲x}+\frac{۴}{۲x^۲}-\frac{۱}{۲x^۳})$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}(۲x^۳)\times\lim_{x\to\pm\infty}(۱+\frac{۵}{۲x}+\frac{۴}{۲x^۲}-\frac{۱}{۲x^۳})$$

حد مجموع جمله‌های داخل پرانتز دوم در ∞ برابر با ۱ است پس :

$$\lim_{x\to\infty} (۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱)=\lim_{x\to\infty}(۲x^۳)\times ۱=\lim_{x\to\infty}(۲x^۳)=\infty$$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+l$ (n عدد صحیح مثبت) در ∞، مساوی حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to\infty}(ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+l)=\lim_{x\to\infty} ax^n$$

مثال ۱: حد چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۲+۳x-۱$ در ∞ برابر است با حد $(۲x^۲)$ در ∞، یعنی :

$$\lim_{x\to\infty}(۲x^۲+۳x-۱)=\lim_{x\to\infty}(۲x^۲)=+\infty$$

مثال ۲: حد تابع $f(x)=-۳x^۲+۴x+۵$ در ∞ برابر است با حد $(-۳x^۲)$ در ∞، یعنی :

$$\lim_{x\to\infty}(-۳x^۲+۴x+۵)=\lim_{x\to\infty}(-۳x^۲)=-\infty$$

مثال ۳: حد تابع $f(x)=۳x^۵-۲x^۴+x^۳+۲x^۲+۱$ در ∞ برابر است با حد $(۳x^۵)$ در ∞، پس داریم :

$$\lim_{x\to\infty}(۳x^۵-۲x^۴+x^۳+۲x^۲+۱)=\lim_{x\to\infty}(۳x^۵)=\infty$$

مثال ۴: حد تابع $f(x)=-۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱$ در ∞ چنین است :

$$\lim_{x\to\infty}(-۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱)=\lim_{x\to\infty}(-۲x^۳)=\infty$$

حد تابع $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{ax^m+bx^{m-۱}+\cdots+l}{a'x^n+b'x^{n-۱}+\cdots+l'}$ در ∞ (m و n اعداد صحیح مثبت):

چون حد هر چند جمله‌ای در ∞، برابر حد جملهٔ بزرگ‌ترین درجهٔ آن می‌باشد، پس می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^m+bx^{m-۱}+\cdots+l}{a'x^n+b'x^{n-۱}+\cdots+l'}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^m}{a'x^n}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{a'}x^{m-n}\right)$$

بنابراین یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید :

حالت اول $m \quad n$

$$m \quad n \Rightarrow m-n \quad ۰ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{a'}x^{m-n}\right)=\infty$$

یعنی : وقتی درجهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج کسر بیش‌تر است، حد کسر در $\pm\infty$ ، برابر ∞ است و علامت آن بستگی به علامت $\frac{a}{a'}$ و زوج یا فرد بودن $m-n$ دارد.

مثال: با به‌کار بردن روش بالا حد کسرهای زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$۱)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{۳}+x^{۲}-x+۱}{۵x^{۲}-x+۶}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{۳}}{۵x^{۲}}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{۲}{۵}x)=\pm\infty$$

زیرا $\lim_{x\to+\infty}(\frac{۲}{۵}x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(\frac{۲}{۵}x)=-\infty$

$$۲)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۲x^{۲}+x-۱}{۴x+۳}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{-۲x^{۲}}{۴x})=\lim_{x\to\pm\infty}(-\frac{۱}{۲}x)=\pm\infty$$

زیرا $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{۲}x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(-\frac{۱}{۲}x)=+\infty$

$$۳)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^{۳}+۲x-۱}{۲x+۵}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{۴x^{۳}}{۲x})=\lim_{x\to\pm\infty}(۲x^{۲})=+\infty$$

زیرا $\lim_{x\to+\infty}(۲x^{۲})=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(۲x^{۲})=+\infty$

$$۴)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{۴}-۲x^{۲}+۵}{-۲x^{۲}+x-۱}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{۳x^{۴}}{-۲x^{۲}})=\lim_{x\to\pm\infty}(-\frac{۳}{۲}x^{۲})=-\infty$$

زیرا $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{۳}{۲}x^{۲})=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(-\frac{۳}{۲}x^{۲})=-\infty$

حالت دوم m=n

$$m=n \ \Rightarrow\ m-n=۰ \ \Rightarrow\ \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{a}{a'}x^{m-n})=\frac{a}{a'}$$

یعنی وقتی درجهٔ صورت و درجهٔ مخرج کسر برابرند، حد کسر در $\pm\infty$ برابر است با :

$$\frac{\text{ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ صورت}}{\text{ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج}}$$

مثال:

$$۱)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۶x-۱}{۲x+۳}=\frac{۶}{۲}=۳$$

$$۲)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۲x^{۲}+x-۱}{x^{۲}+۷x+۲}=\frac{-۲}{۱}=-۲$$

$$۳)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{۵n^{۳}+۶n-۲}{۲n^{۳}-۶n+۴}=\frac{۵}{۲}$$

$$۴)\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۶x^{n}-x^{۲}+۵}{-۲x^{n}+۳x-۴}=\frac{۶}{-۲}=-۳$$

حالت سوم m<n

$$m<n \Rightarrow m-n<۰ \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a}{a'}x^{m-n}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a}{a'x^{n-m}}\right)=۰$$

یعنی وقتی درجهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج کسر کم‌تر است، حد کسر در $\pm\infty$ مساوی صفر است.

مثال:

$$۱)\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲}{۳x+۴}=۰$$

$$۲)\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x+۵}{۳x^{۲}+x+۲}=۰$$

$$۳)\ \lim_{n\to\pm\infty} \frac{۲n^{۲}+n-۱}{n^{۳}+n^{۲}-۵}=۰$$

نکته: در برخی حالت‌ها که تابع f(x) کسری است، اما صورت کسر، یا مخرج آن، یا هیچ‌کدام چند جمله‌ای نیستند، باز هم می‌توان با فاکتورگیری از جمله‌هایی از صورت و مخرج که دارای بزرگ‌ترین درجه هستند، حد تابع را به‌دست آورد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{۲}+x+۲}{۲x^{۲}+\sqrt{x^{۲}+۱}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}(۱+\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x^{۲}})}{x^{۲}(۲+\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۴}}})}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(۱+\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x^{۲}})}{۲+\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۴}}}}=\frac{۱+۰+۰}{۲+\sqrt{۰+۰}}=\frac{۱}{۲+۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-۳x+\sqrt{x+۱}}{۶x+\sqrt{۴x^{۲}-۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(-۳+\sqrt{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}})}{x(۶+\sqrt{۴-\frac{۱}{x^{۲}}})}=\frac{-۳+\sqrt{۰+۰}}{۶+\sqrt{۴-۰}}=\frac{-۳+۰}{۶+۲}=\frac{-۳}{۸}$$

تمرین

حد هریک از تابع‌های زیر را در $\pm\infty$، تعیین کنید. در دو تمرین آخر فقط حد در $+\infty$ را به‌دست آورید.

۱) $y=\frac{-1}{3}x+4$ ‏ ۲) $y=\frac{2}{7}x+1$

۳) $y=3x^2-x+2$ ‏ ۴) $y=-2x^2-x+3$

۵) $y=x^3+2x^2-1$ ‏ ۶) $y=-x^3+3x-2$

۷) $y=-(2x-1)^3$ ‏ ۸) $y=3x^4+5x^2-1$

۹) $y=-x^4+x^2+2$ ‏ ۱۰) $y=x^5-3x^3+x-1$

۱۱) $y=\frac{2x+1}{x-1}$ ‏ ۱۲) $y=\frac{-3x+2}{x}$

۱۳) $y=\frac{-x^2+2}{3x^2+5x+1}$ ‏ ۱۴) $y=\frac{4x^3-x^2+1}{-2x^3+x-2}$

۱۵) $y=\frac{12x^n-x^2+1}{6x^n+x^3+2}(n\in \mathbb{N}, n \quad 3)$

۱۶) $y=\frac{3x^2+5x-1}{x^3+7x-2}$ ‏ ۱۷) $y=\frac{x-5}{2x^2+x-1}$

۱۸) $y=\frac{3x^n-7x+2}{2x^{n+1}+6x^n-1}(n\in \mathbb{N}, n \quad 1)$

۱۹) $y=\frac{2x+1}{3}$ ‏ ۲۰) $y=\frac{6x^2+x-2}{3x-5}$

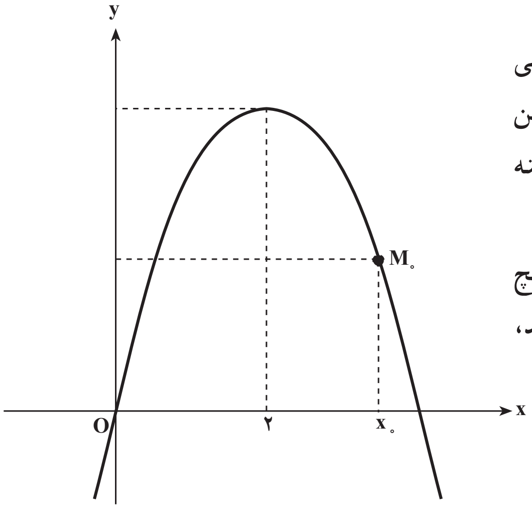
۲۱) $y=\frac{-3x^2+6x-1}{2x-7}$ ‏ ۲۲) $y=\frac{2x^3+x-2}{x+3}$

۲۳) $y=\frac{3x^4+x^2-1}{-x^2+5}$ ‏ ۲۴) $y=\frac{-3x^2+\sqrt{x+2}}{x^2+5x-1}$

۲۵) $y=\frac{2x+1}{x^2+\sqrt{x+2}}$

پیوستگی

پیوستگی در یک نقطه: تابع $f(x)=-x^2+4x$ و نمودار آن را که یک سهمی است درنظر می‌گیریم. این تابع برای همهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است، یعنی $D_f=\mathbb{R}$. بنابراین برای هر $x_0\in\mathbb{R}$ نقطهٔ $M_0(x_0,f(x_0))$ نقطه‌ای از سهمی است. اما همان‌طوری که می‌دانیم سهمی در هیچ



نقطه‌ای بریدگی ندارد. به‌عبارت دیگر سهمی یک منحنی یک تکه یا پیوسته است. به این علت تابع $f(x)=-x^۲+۴x$ را نیز پیوسته می‌گویند.

به‌طور کلی اگر نمودار تابع f در هیچ نقطه‌ای از دامنهٔ تعریفش بریدگی نداشته باشد، تابع f را پیوسته می‌نامند.

اکنون مقدار تابع f و حد آن را در یک نقطه، مثلاً در $x=۱$ ، به‌دست می‌آوریم. داریم :

$$f(۱)=-(۱)^۲+۴(۱)=-۱+۴=۳$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}(-x^۲+۴x)=-۱+۴=۳$$

به‌طوری که دیده می‌شود، در این مثال که f تابعی پیوسته است، مقدار تابع و حد آن در نقطهٔ $x=۱$ با یکدیگر برابرند، یعنی :

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱)=۳$$

این ویژگی در هر نقطهٔ دیگر نیز برقرار است. یعنی به‌طور کلی برای هر عدد حقیقی دلخواه $x_۰$ داریم :

$$\lim_{x\to x_۰} f(x)=f(x_۰) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to x_۰}(-x^۲+۴x)=-x_۰^۲+۴x_۰$$

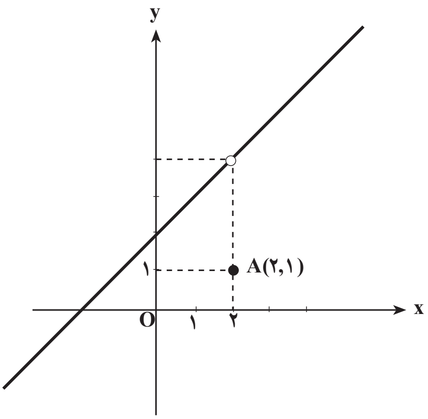
اینک به‌عنوان مثالی دیگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & , \quad x\neq ۲\\ ۱ & , \quad x=۲\end{cases}$ را درنظر می‌گیریم. دامنهٔ تعریف این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $D_f=\mathbb{R}$ است.

برای هر $x\neq ۲$ داریم $x-۲\neq ۰$ و می‌توان نوشت :

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲$$

پس :

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & , \quad x\neq ۲\\ ۱ & , \quad x=۲\end{cases}$$



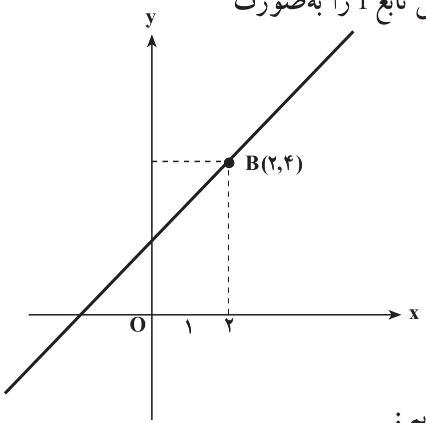
نمودار این تابع را رسم می‌کنیم. این نمودار اجتماع نقطهٔ $A(۲,۱)$ و یک خط است که تنها در نقطهٔ $x=۲$ بریدگی دارد (مطابق شکل). زیرا نقطهٔ $A(۲,۱)$ روی این خط نیست و نقطهٔ $B(۲,۴)$ نیز به نمودار تابع تعلق ندارد. بدین جهت گفته می‌شود که این تابع در $x=۲$ پیوسته نیست (این تابع در سایر نقاط پیوسته می‌باشد).

امّا در نقطهٔ $x=۲$ داریم :

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۲+۲=۴\neq f(۲)=۱$$

یعنی حد تابع در $x=۲$ با مقدار تابع در $x=۲$ برابر نیست.

اگر در تابع بالا، $f(۲)$ را مساوی ۴ بگیریم، یعنی تابع f را به‌صورت



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}\ , & x\neq ۲\\ ۴ \ , & x=۲\end{cases}$$

تعریف کنیم نقطهٔ $B(۲,۴)$ روی نمودار تابع قرار می‌گیرد و در نتیجه نمودار در هیچ نقطه‌ای بریدگی نخواهد داشت و در این صورت تابع در همهٔ نقاط تعریفش پیوسته است.

از آنچه که گذشت به تعریف زیر رهنمون می‌شویم :

تعریف: تابع f که در بازه I تعریف شده است در نقطه $x_۰$ از دامنه آن را پیوسته گویند، هرگاه :

۱ــ تابع در $x=x_۰$ حد داشته باشد.

۲ــ حد تابع در $x=x_۰$ با مقدار تابع در $x_۰$ برابر باشد یعنی :

$$\lim_{x\to x_۰} f(x)=f(x_۰)$$

بنابراین هرگاه تابعی که روی یک بازه تعریف شده است و در یک نقطه از دامنه آن، دست کم یکی از دو شرط بالا را نداشته باشد در آن نقطه ناپیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۲x\ , & x\geq ۱\\ x^۲+۱\ , & x< ۱\end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x=-۱$ بررسی کنیم.

این تابع در $x=-۱$ تعریف شده است و داریم :

$$f(-۱)=-(-۱)^۲+۲(-۱)=-۳$$

امّا تابع $f(x)$ در $x=-۱$ دارای حد نیست زیرا :

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\lim_{x\to -۱^+}(-x^۲+۲x)=-(-۱)^۲+۲(-۱)=-۳$$

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x)=\lim_{x\to -۱^-}(x^۲+۱)=(-۱)^۲+۱=۲$$

یعنی
$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=-۳\neq ۲=\lim_{x\to -۱^-} f(x)$$

در نتیجه این تابع در $x=-۱$ پیوسته نیست.

مثال ۲: تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x^۲+۱\ , & x\neq ۲\\ ۳\ , & x=۲\end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x=۲$ بررسی کنیم.

این تابع در $x=۲$ تعریف شده است زیرا $f(۲)=۳$ است، و در $x=۲$ تابع دارای حد است و مقدار این حد برابر است با :

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}(۲x^۲+۱)=۹$$

به‌طوری که دیده می‌شود مقدار تابع در $x=۲$ یعنی $f(۲)=۳$ با حد تابع در این نقطه برابر نیست $(۹\neq ۳)$. بنابراین تابع بالا در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته نیست.

مثال ۳: می‌خواهیم پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۳x-۱\ , & x\geq ۲\\ -۴x+۱\ , & x< ۲\end{cases}$ را در نقطهٔ $x=-۲$ بررسی کنیم.

۱ــ تابع در $x=-۲$ تعریف شده است و داریم $f(-۲)=(-۲)^۲-۳(-۲)-۱=۹$

۲ــ در $x=-۲$ تابع دارای حد است چون :

$$\text{حد راست}=l_۱=\lim_{x\to -۲^+} f(x)=\lim_{x\to -۲^+}(x^۲-۳x-۱)=(-۲)^۲-۳(-۲)-۱=۹$$

$$\text{حد چپ}=l_۲=\lim_{x\to -۲^-} f(x)=\lim_{x\to -۲^-}(-۴x+۱)=-۴(-۲)+۱=۹$$

$$\Rightarrow\ l_۱=l_۲=۹\ \Rightarrow\ \lim_{x\to -۲} f(x)=۹$$

۳ــ حد تابع در $x=-۲$ با مقدار تابع در $x=-۲$ برابر است.

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=f(-۲)=۹$$

بنابراین تابع بالا در نقطهٔ $x=-۲$ پیوسته می‌باشد.

مثال ۴: پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ که دامنه آن $[-۱,۱]$ است را در نقاط ۱ و ۱- بررسی می‌کنیم. ۱ و ۱- در دامنه تعریف تابع هستند و داریم $f(۱)=f(-۱)=۰$. حد تابع در این نقاط نیز همان حد چپ یا راست در این نقاط است و داریم :

$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{۱-x^۲}=\lim_{x\to -۱}\sqrt{۱-x^۲}=۰$$

بنابراین حد این تابع در این نقاط با مقدار تابع در این نقاط برابر است و تابع در این نقاط پیوسته است. البته این تابع در سایر نقاط دامنه خود نیز پیوسته است.

مثال ۵: تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۳ & , \ x\neq ۱ \ (a\neq ۰) \\ ۵ & , \ x=۱ \end{cases}$ مفروض است. مقدار a را طوری تعیین کنید که این تابع در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد.

تابع در $x=۱$ تعریف شده است و

$$f(۱)=۵$$

هم‌چنین در $x=۱$ تابع دارای حد است.

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=\lim_{x\to ۱}(ax+۳)=a+۳$$

حال برای آن که تابع در $x=۱$ پیوسته باشد باید داشته باشیم :

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=f(۱) \ \Rightarrow \ a+۳=۵ \ \Rightarrow \ a=۲$$

مثال ۶: تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+۲ & , \ x\succ ۱ \ (a\neq ۰) \\ ۳ & , \ x=-۱ \\ -۳x+b & , \ x\prec ۱ \end{cases}$ داده شده است. a و b را چنان بیابید که تابع در $x=-۱$ پیوسته باشد.

داریم :

$$f(-۱)=۳$$

$$\text{حد راست}=l_۱=\lim_{x\to -۱^+}f(x)=\lim_{x\to -۱^+}(ax^۲+۲)=a(-۱)^۲+۲=a+۲$$

$$\text{حد چپ}=l_۲=\lim_{x\to -۱^-}f(x)=\lim_{x\to -۱^-}(-۳x+b)=-۳(-۱)+b=۳+b$$

برای این که تابع دارای حد باشد باید $l_۱=l_۲$ یعنی :

$$a+۲=۳+b \ \Rightarrow \ a-b=۱ \qquad (۱)$$