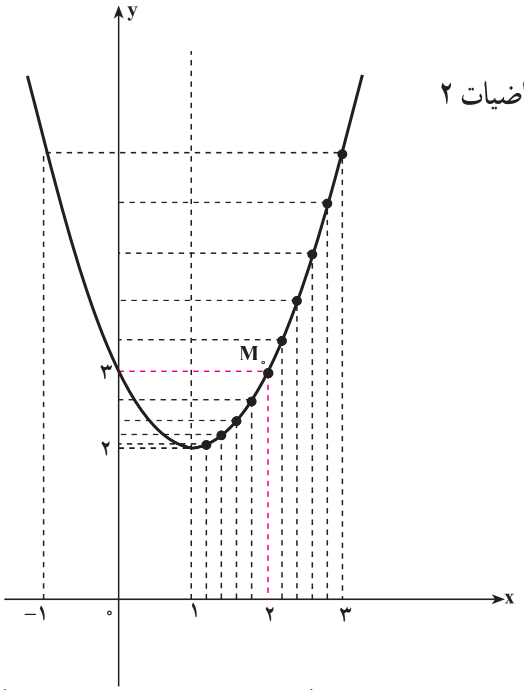
ب ــ نمودار تغییرات این تابع در ریاضیات ۲ رسم شده است.



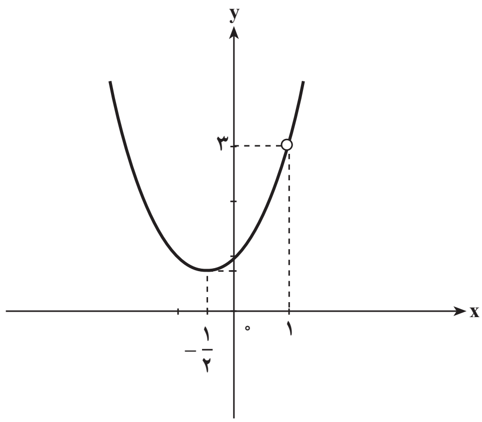
از روی نمودار نیز دیده می‌شود که وقتی x به عدد ۲ نزدیک می‌شود، f(x) به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

مثال ۳: تابع f، با ضابطهٔ $x \neq ۱$ ، $f(x)=\frac{x^{۳}-۱}{x-۱}$ ، را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم رفتار این تابع را در نزدیکی $x_{۰}=۱$ بررسی کنیم.

حل: مقدارهای f(x) را برای برخی از مقدارهای x نزدیک به عدد ۱ محاسبه می‌کنیم. این مقدارها در جدول زیر درج شده‌اند.

x	···	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	···⟶	۱	⟵···	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۲۵	···
f(x)	···	۲/۳۱۳	۲/۷۱	۲/۹۷۰	۲/۹۹۷	···⟶	۳	⟵···	۳/۰۰۳	۳/۰۳۰	۳/۳۱	۳/۸۱۳	···

به‌طوری که جدول نشان می‌دهد با نزدیک شدن x به عدد ۱ (از راست یا چپ)، f(x) به عدد ۳ نزدیک می‌شود.



مثال ۴: تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ را با دامنه $(۱,\infty)$ درنظر بگیرید. می‌خواهیم مقدارهای این تابع را در نزدیکی ۱ بررسی کنیم. در جدول زیر مقادیر تقریبی این تابع را به‌ازای برخی از مقادیر x در نزدیکی ۱ محاسبه کرده‌ایم.

x	۱	←	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
y	?	←	۰/۰۰۱	۰/۰۳	۰/۱	۰/۳

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد با نزدیک شدن x به ۱ مقدارهای تابع f به صفر نزدیک می‌شوند.

تعریف حد توابع

اگر دامنه تابع f بازه I باشد و نقطه a به‌گونه‌ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد، یعنی بتوان داخل I نقاطی متمایز از a را یافت که به a نزدیک باشند (به هر میزان که بخواهیم)، آنگاه با نزدیک شدن متغیر x (در بازه I) به نقطه a ممکن است مقدارهای f(x) به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند که در این حالت می‌گوییم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

با توجه به مثال‌های صفحات قبل می‌توانیم بنویسیم :

$$\lim_{x\to ۱}(۲x+۱)=۳$$

$$\lim_{x\to ۰}(-x^{۲}+۴)=۴$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=۳$$

$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{x-۱}=۰$$

مثال ۵: برای تابع $y=۱+\sqrt{x}$ با دامنه $(۰,\infty)$ می‌توان از داخل دامنه این تابع به صفر نزدیک شد و با نزدیک شدن $x\in(۰,\infty)$ به صفر، مقدار $۱+\sqrt{x}$ به ۱ نزدیک می‌شود، پس

$$\lim_{x\to ۰}(۱+\sqrt{x})=۱$$

مثال ۶: برای تابع $y=\sqrt{۱-x^{۲}}$ با دامنه $(-۱,۱)$ می‌توان از داخل دامنه این تابع به ۱- نزدیک شد و با نزدیک شدن $x\in(-۱,۱)$ به ۱- مقدارهای $\sqrt{۱-x^{۲}}$ به صفر نزدیک می‌شوند، پس $\lim\limits_{x\to -۱}\sqrt{۱-x^{۲}}=۰$.

تمرین

۱ــ هر یک از جدول‌های زیر را کامل کنید، و حد هر تابع را در نقطه مورد نظر مشخص کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}(-۲x+۵)$

x	…	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	…→	۱	←…	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	…
f(x)	…						…→		←…						…

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}(x^۲+x+۳)$

x	…	−۱	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	…→	۰	←…	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱	…
f(x)	…							…→		←…							…

پ) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{x^۲-x-۲}{x+۱}$

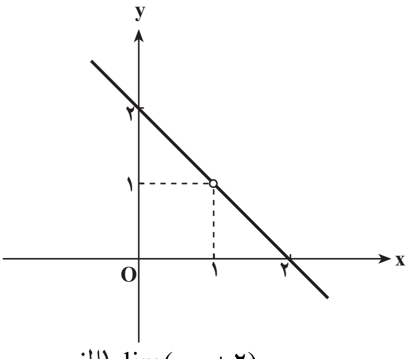
x	…	−۲	−۱/۵	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	−۱/۰۰۰۱	…→	−۱	←…	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹	−۰/۸	−۰/۵	۰	…
f(x)	…							…→		←…							…

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{x+۱}-۲}{x-۳}$

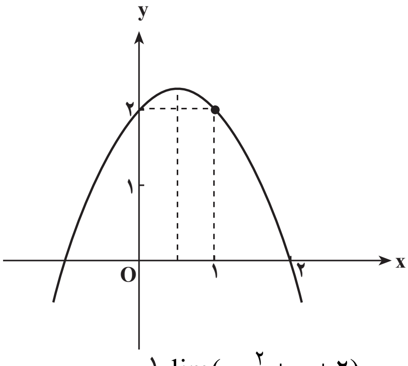
x	…	۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	…→	۳	←…	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴	…
f(x)	…						…→		←…						…

۲ــ با تشکیل جدول، حد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}$ را در صفر تعیین کنید.

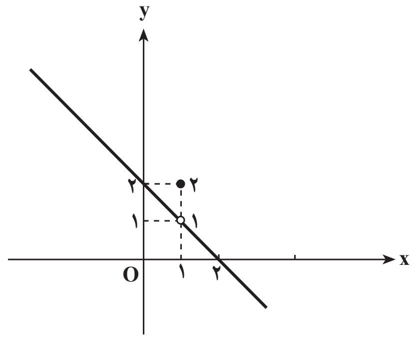
۳ــ با استفاده از نمودار، حدتوابع زیررا در نقطهٔ داده شده (در صورت وجود) مشخص‌کنید.



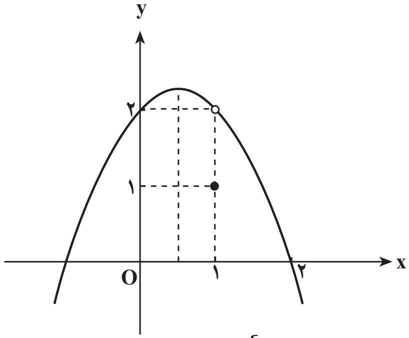
الف) $\lim\limits_{x\to ۱}(-x+۲)$



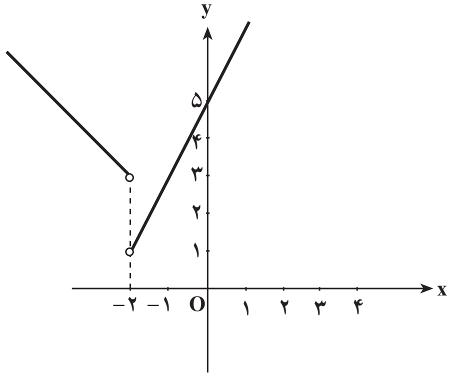
ب) $\lim\limits_{x\to ۱}(-x^۲+x+۲)$



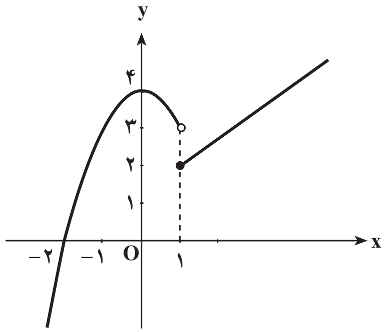
پ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ، $f(x)=\begin{cases}-x+2 \ , & x\neq 1\\ 2 \ , & x=1\end{cases}$



ت) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ، $f(x)=\begin{cases}-x^2+x+2 \ , & x\neq 1\\ 1 \ , & x=1\end{cases}$



ث) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ ، $f(x)=\begin{cases}2x+5 \ , & x \succ 2\\ -x+1 \ , & x \prec 2\end{cases}$



ج) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ، $f(x)=\begin{cases}x+1 \ , & x\geq 1\\ -x^2+4 \ , & x<1\end{cases}$

نکته: باید توجه کنید که حد تابعی مانند f در نقطه‌ای مانند x_0 ، به معین بودن یا معین نبودن تابع در x_0 بستگی ندارد. یعنی ممکن است :

۱) تابع f در x_0 تعریف نشده باشد، امّا وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، حد داشته باشد.

۲) تابع f در x_0 تعریف شده باشد اما وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، تابع حد نداشته باشد.

به علاوه هنگامی که تابع در نقطهٔ x_0 دارای حد است، حد تابع می‌تواند با مقدار تابع برابر باشد یا نباشد. یعنی ممکن است :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad \text{یا} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$$

مثال ۱: می‌خواهیم حد تابع $f(x)=\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3}, x\neq 3$ را در $x=3$ به‌دست آوریم.

حل: این تابع در $x=3$ تعریف نشده است. امّا وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود دارای حد

است، زیرا برای $x \neq ۳$ داریم

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x-۳)}{x-۳}=x-۲$$

$$\Rightarrow f(x)=x-۲ \quad , \quad x\neq ۳ \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}(x-۲)=۱$$

(قبلاً دیدیم که $\lim_{x\to ۳}(x-۲)=۱$ است).

بنابراین دیده می‌شود که تابع فوق در $x=۳$ تعریف نشده است، امّا در $x=۳$ دارای حد است.

مثال ۲: تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x+۳ \ , & x\neq ۲ \\ ۵ & , \ x=۲ \end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم حد این تابع را در $x=۲$ تعیین کنیم.

حل: این تابع در $x=۲$ تعریف شده است زیرا $f(۲)=۵$ ، و همان‌طور که در مثال ۲ دیده شد، داریم $\lim_{x\to ۲}(x^۲-۲x+۳)=۳$ پس این تابع در $x=۲$ ، دارای حد است امّا حد آن با مقدار تابع در $x=۲$ برابر نیست $(۵\neq ۳)$.

مثال ۳: می‌خواهیم حد تابع $f(x)=x^۲+۳x+۴$ را در $x=-۲$ تعیین کنیم.

حل: قبلاً دیدیم که $\lim_{x\to -۲}(x^۲+۳x+۴)=۲$ ؛ از طرفی این تابع در $x=-۲$ معین است و مقدار $f(-۲)$ برابر است با : $f(-۲)=(-۲)^۲+۳(-۲)+۴=۲$. بنابراین حد تابع در $x=-۲$ با مقدار تابع در $x=-۲$ برابر است، یعنی داریم :

$$\lim_{x\to -۲}(x^۲+۳x+۴)=f(-۲)=۲$$

مثال ۴: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x \ , & x\geq ۱ \\ ۲x+۱ & , \ x<۱ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم حد این تابع را در عدد ۱ تعیین کنیم.

حل: این تابع در $x=۱$ تعریف شده است. قبلاً دیدیم که وقتی x از طرف راست به عدد ۱ نزدیک می‌شود مقدارهای تابع به ۱− نزدیک می‌شوند و در مثال ۱ دیدیم که وقتی x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک می‌شود مقدارهای تابع به ۳ نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند پس وقتی x به عدد ۱ نزدیک می‌شود، این تابع دارای حد نیست.

حد راست و حد چپ یک تابع

تعریف: تابع f را که در بازهٔ باز I شامل $x_۰$ تعریف شده است، مگر احتمالاً در خود $x_۰$ ، درنظر

می‌گیریم :

الف ــ اگر x از طرف راست به $x_۰$ نزدیک شود و مقدارهای تابع f به عددی مانند $L_۱$ نزدیک شوند، (یا به‌بیان دیگر، هرگاه بتوانیم هرچه‌قدر که بخواهیم $f(x)$ را به $L_۱$ نزدیک کنیم، به شرط آن که x را از طرف راست به اندازهٔ کافی به $x_۰$ نزدیک کرده باشیم) ؛ $L_۱$ را حد راست تابع f در $x_۰$ می‌نامند و می‌نویسند :

$$\lim_{x\to x_۰^+} f(x)=L_۱$$

ب ــ اگر x از طرف چپ به $x_۰$ نزدیک شود و مقدارهای تابع f به عددی مانند $L_۲$ نزدیک شوند، (یا به بیان دیگر، هرگاه بتوانیم هر چه‌قدر که بخواهیم $f(x)$ را به $L_۲$ نزدیک کنیم به شرط آن که x را از طرف چپ به اندازهٔ کافی به $x_۰$ نزدیک کرده باشیم) ؛ $L_۲$ را حدّ چپ تابع f در $x_۰$ می‌نامند و می‌نویسند :

$$\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=L_۲$$

از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که اگر $x_۰$ یک نقطه میانی در دامنه f باشد و تابع f در نقطهٔ $x_۰$ حد راست و حد چپ داشته باشد، و این دو حد با هم برابر باشند، تابع در $x_۰$ دارای حد است ؛ و برعکس، اگر تابع در یک نقطه حد داشته باشد، در آن نقطه حد راست و حد چپ دارد و این دو حد با هم برابرند.

$$\lim_{x\to x_۰} f(x)=L \quad ! \quad \lim_{x\to x_۰^+} f(x)=\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=L$$

اما اگر $x_۰$ یک نقطه انتهایی دامنه تابع f باشد، در این حالت حد چپ یا راست f در $x_۰$ همان حد تابع f در $x_۰$ است. مثلاً در مورد تابع $\sqrt{x}$ با دامنه $(۰,\infty)$ حد راست این تابع در صفر و حد این تابع در صفر یکی هستند. فقط در نقاطی که نقاط میانی دامنه یک تابع هستند مفهوم حد تابع و حد راست و چپ تابع با هم متفاوتند.

مثال ۱: تابع $f(x)=x^۲-۲x+۳$ داده شده است، می‌خواهیم وجود حد راست و حد چپ این تابع را در ۲ بررسی کنیم.

حل: دیدیم که اگر x از طرف راست به ۲ نزدیک شود مقدارهای تابع بالا به ۳ نزدیک می‌شوند یعنی $۳=(x^۲-۲x+۳)\lim_{x\to ۲^+}=L_۱=$ حد راست تابع ؛ و در صورتی که x از چپ به ۲ نزدیک شود مقدارهای تابع به ۳ نزدیک می‌شوند. یعنی $۳=(x^۲-۲x+۳)\lim_{x\to ۲^-}=L_۲=$ حد چپ تابع.

چون حد راست و حد چپ این تابع در ۲ با هم برابرند $(L_۱=L_۲=۳)$، تابع در نقطهٔ $x=۲$

دارای حد است و داریم :

$$\lim_{x\to ۲}(x^{۲}-۲x+۳)=۳$$

مثال ۲: تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & , \ x\geq ۱ \\ x^{۲}+۲x-۶ & , \ x<۱ \end{cases}$ داده شده است می‌خواهیم وجود حد این تابع را در ۱ بررسی کنیم.

چون وقتی x از طرف راست به ۱ نزدیک می‌شود داریم ۱ x ، حد راست این تابع از $f(x)=۲x+۱$ محاسبه می‌شود بنابراین :

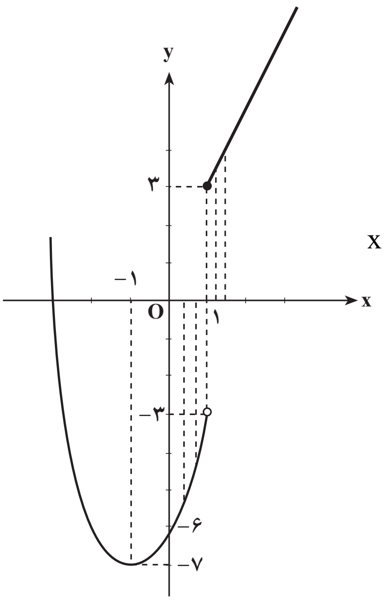
$$\text{حد راست} = L_{۱} = \lim_{x\to ۱^{+}}(۲x+۱)=۳$$ (قبلاً محاسبه شد)

و چون وقتی x از طرف چپ به ۱ نزدیک می‌شود داریم $x<۱$. پس حد چپ از $f(x)=x^{۲}+۲x-۶$ به‌دست می‌آید یعنی :

$$\text{حد چپ} = L_{۲} = \lim_{x\to ۱^{-}}(x^{۲}+۲x-۶)=-۳$$

به‌طوری که دیده می‌شود حد چپ و حد راست این تابع در نقطهٔ $x=۱$ با هم برابر نیستند $(L_{۱}=۳\neq L_{۲}=-۳)$ ، پس این تابع در $x=۱$ حد ندارد.

نمودار تابع نیز درستی محاسبهٔ بالا را نشان می‌دهد.



$x<۱ \Rightarrow$

x	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱
f(x)	۲	−۳	−۶	−۷	−۶	−۳

$$x\geq ۱ \Rightarrow y=۲x+۱ \ , \ \begin{vmatrix} ۰ \\ +۱ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ۱ \\ ۳ \end{vmatrix}$$

قضیه‌های حد

محاسبهٔ حد تابع‌ها با استفاده از تعریف، به روشی که در مثال‌ها دیده شد (نزدیک کردن متغیر به x_0 و محاسبهٔ $f(x)$ و تشکیل جدول)، معمولاً طولانی است. به این علت از قضیه‌هایی که در مورد حد توابع وجود دارد و آن‌ها را بدون اثبات می‌پذیریم استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۱: حد تابع ثابت $f(x)=k$ (k عددی است حقیقی و ثابت) در هر عدد دلخواه x_0، برابر همان مقدار ثابت k است. یعنی $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} k=k$

مثال: اگر $f(x)=5$ داریم :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} 5=5 \quad , \quad \lim_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{3}{2}} 5=5$$

$$\lim_{x\to -2} 5=5 \quad , \quad \lim_{x\to \sqrt{2}} 5=5$$

قضیهٔ ۲: حد تابع $f(x)=x$ (تابع همانی) در هر نقطه x_0 برابر با x_0 است یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} x=x_0$$

مثال:
$$\lim_{x\to 3} x=3 \quad , \quad \lim_{x\to -1} x=-1$$

قضیهٔ ۳: اگر دو تابع f و g دامنه یکسانی داشته باشند و در نقطه x_0 دارای حد باشند و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$، آنگاه :

الف ــ مجموع این دو تابع یعنی $f(x)+g(x)$ در x_0، حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=l_1+l_2$$

یعنی، حد مجموع دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با مجموع حدهای آن دو تابع.

ب ــ تفاضل این دو تابع یعنی، $f(x)-g(x)$ در x_0 حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x)=l_1-l_2$$

یعنی حد تفاضل دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با تفاضل حدهای آن دو تابع.

پ ــ حاصل‌ضرب این دو تابع یعنی $f(x).g(x)$ در x_0 حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x).g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x).\lim_{x\to x_0} g(x)=l_1 l_2$$

یعنی، حد حاصل‌ضرب دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با حاصل‌ضرب حدهای آن دو تابع.

ت ــ خارج‌قسمت این دو تابع یعنی $\frac{f(x)}{g(x)}$ در x_0، به شرط $l_2 \neq 0$، حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{l_1}{l_2} \quad , \quad l_2 \neq 0$$

یعنی، حد خارج‌قسمت دو تابع (با دامنه یکسان)، به شرط صفر نبودن حد مخرج، برابر است با خارج‌قسمت حدهای آن دو تابع.

نکته: قضیه‌های الف و پ را می‌توان به تعدادی متناهی از توابع تعمیم داد یعنی :

۱ــ حد مجموع چند تابع برابر است با مجموع حدهای آن‌ها.

۲ــ حد حاصل‌ضرب چند تابع برابر است با حاصل‌ضرب حدهای آن‌ها.

از قضیه‌های بالا نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آید.

۱ــ اگر حد تابع f در نقطهٔ x_0 برابر با l و k عدد ثابتی باشد

$$\lim_{x\to x_0}(kf(x))=\lim_{x\to x_0}(k).\lim_{x\to x_0} f(x)=k.l$$

مثلاً چون $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$ پس $\lim\limits_{x\to 1}4(2x+1)=4(3)=12$.

۲ــ حد تابع $f(x)=x^n$ (n عدد صحیح و مثبت) در x_0 برابر است با x_0^n یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n$$

مثال: حد تابع $f(x)=x^3$ در $x=2$ برابر است با $8=2^3$ یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to 2}(x)^3=(2)^3=8$$

۳ــ اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ آنگاه $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=l^n$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$ (به‌شرط آن‌که $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک بازهٔ شامل x_0 تعریف شده باشد).

مثال: دیدیم که $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+3)=3$ پس $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+3)^4=3^4=81$

و

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{3}$$

۴ــ حد تابع چندجمله‌ای $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+l$ (n عدد صحیح و مثبت).

به کمک نتیجه‌های بالا و قضیهٔ حد مجموع چند تابع، ثابت می‌شود که حد تابع چندجمله‌ای f(x) در x_0 برابر است با $f(x_0)$ یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots+l)$$

$$=ax_0^n+bx_0^{n-1}+cx_0^{n-2}+\cdots+l=f(x_0)$$

مثال: داریم :

$$۱)\ \lim_{x\to ۲}\big(f(x)=۲x+۱\big)=f(۲)=۲(۲)+۱=۴+۱=۵$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲}\Big(f(x)=x^{۲}-۲x+۳\Big)=f(۲)=۲^{۲}-۲(۲)+۳=۳-۴+۴-۳=۳$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲}(x^{۳}+x^{۲}+۲x-۱)=(۲)^{۳}+(۲)^{۲}+۲(۲)-۱=۱۵$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۲}(-۲x^{۴}+۳x^{۳}+۵x^{۲}-۶x+۱)=-۲(۲)^{۴}+۳(۲)^{۳}+۵(۲)^{۲}-۶(۲)+۱$$

$$=-۳۲+۲۴+۲۰-۱۲+۱=۱$$

۵ــ حد تابع گویای کسری ــ حد تابع $q(x)=\dfrac{ax^{m}+bx^{m-۱}+\cdots+1}{a'x^{n}+b'x^{n-۱}+\cdots+1'}$ ، (m و n عددهای صحیح و مثبت) در $x_۰$ برابر است با مقدار آن تابع در نقطهٔ $x_۰$ (به شرط آن‌که $x_۰$ ریشهٔ مخرج کسر نباشد).

مثال ۱: داریم :

$$۱)\ \lim_{x\to -۱}\frac{۲x+۱}{۳x-۵}=\frac{۲(-۱)+۱}{۳(-۱)-۵}=\frac{-۲+۱}{-۳-۵}=\frac{-۱}{-۸}=\frac{۱}{۸}$$

$$۲)\ \lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}-x-۱}{۲x+۵}=\frac{(-۲)^{۲}-(-۲)-۱}{۲(-۲)+۵}=\frac{۵}{۱}=۵$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲}\frac{۲x^{۳}-x^{۲}+۵}{-۲x^{۲}+۳x-۱}=\frac{۲(۲)^{۳}-(۲)^{۲}+۵}{-۲(۲)^{۲}+۳(۲)-۱}=\frac{۱۷}{-۳}=\frac{-۱۷}{۳}$$

$$۴)\ \lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)^{۲}}{۲x^{۲}-x-۵}=\frac{(-۲+۲)^{۲}}{۲(-۲)^{۲}-(-۲)-۵}=\frac{۰}{۵}=۰$$

مثال ۲: دو تابع $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=x^{۲}-۲x$ داده شده‌اند، می‌خواهیم :

الف ــ حد تابع f را در ۱ بیابیم.

ب ــ حد تابع g را در ۱ به‌دست آوریم.

پ ــ تابع‌های $f(x)+g(x)$ و $f(x)-g(x)$ ، $f(x).g(x)$ و $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ را تعیین و حد هر یک از این توابع را در ۱ پیدا کنیم.

داریم :

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=\lim_{x\to ۱}(۲x+۱)=۲(۱)+۱=۳$$

$$\lim_{x\to ۱}g(x)=\lim_{x\to ۱}(x^{۲}-۲x)=(۱)^{۲}-۲(۱)=-۱$$

$$f(x)+g(x)=۲x+۱+x^۲-۲x=x^۲+۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۱}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to۱}(x^۲+۱)=(۱)^۲+۱=۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۱}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to۱}f(x)+\lim_{x\to۱}g(x) \Rightarrow ۲=۳+(-۱) \Rightarrow ۲=۲$$

$$f(x)-g(x)=۲x+۱-(x^۲-۲x)=-x^۲+۴x+۱ \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to۱}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to۱}(-x^۲+۴x+۱)=-(۱)^۲+۴(۱)+۱=۴$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۱}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to۱}f(x)-\lim_{x\to۱}g(x) \Rightarrow ۴=(۳)-(-۱) \Rightarrow ۴=۴$$

$$f(x).g(x)=(۲x+۱)(x^۲-۲x)=۲x^۳-۳x^۲-۲x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۱}\big(f(x).g(x)\big)=\lim_{x\to۱}(۲x^۳-۳x^۲-۲x)=۲(۱)^۳-۳(۱)^۲-۲(۱)=-۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۱}\big[f(x).g(x\big]=\lim_{x\to۱}f(x).\lim_{x\to۱}g(x) \Rightarrow -۳=(۳)(-۱) \Rightarrow -۳=-۳$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۲x+۱}{x^۲-۲x} \Rightarrow \lim_{x\to۱}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to۱}\frac{۲x+۱}{x^۲-۲x}=\frac{۲(۱)+۱}{(۱)^۲-۲(۱)}=-۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۱}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to۱}f(x)}{\lim_{x\to۱}g(x)} \Rightarrow -۳=(۳)/-۱ \Rightarrow -۳=-۳$$

نتایج به‌دست آمده را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

تابع	حد	
$f(x)=۲x+۱$	$\lim_{x\to۱}(۲x+۱)=۳$	
$g(x)=x^۲-۲x$	$\lim_{x\to۱}(x^۲-۲x)=-۱$	
$f(x)+g(x)=x^۲+۱$	$\lim_{x\to۱}(x^۲+۱)=۲$	$۲=۳+(-۱)$
$f(x)-g(x)=-x^۲+۴x+۱$	$\lim_{x\to۱}(-x^۲+۴x+۱)=۴$	$۴=۳-(-۱)$
$f(x).g(x)=۲x^۳-۳x^۲-۲x$	$\lim_{x\to۱}(۲x^۳-۳x^۲-۲x)=-۳$	$-۳=(۳).(-۱)$
$f(g)/g(x)=\frac{۲x+۱}{x^۲-۲x}$	$\lim_{x\to۱}(\frac{۲x+۱}{x^۲-۲x})=-۳$	$-۳=\frac{۳}{-۱}$

حد تابع‌های سادهٔ مثلثاتی

در مورد حد توابع مثلثاتی قضیه‌های زیر را داریم :

قضیهٔ ۱: تابع $f(x)=\sin x$ در هر نقطه $x_\circ \in \mathbb{R}$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_\circ)=\sin x_\circ$. یعنی :

$$\lim_{x \to x_\circ} \sin x = \sin x_\circ$$

مثال:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} \sin x = \sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{۳}} \sin x = \sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

قضیهٔ ۲: تابع $f(x)=\cos x$ در هر نقطه $x_\circ \in \mathbb{R}$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_\circ)=\cos x_\circ$. یعنی :

$$\lim_{x \to x_\circ} \cos x = \cos x_\circ$$

مثال:

$$\lim_{x \to \circ} \cos x = \cos \circ = +۱$$

و

$$\lim_{x \to \frac{۲\pi}{۳}} \cos x = \cos \frac{۲\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

قضیهٔ ۳: تابع $f(x)=\tan x$ (یا $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$) برای همهٔ مقادیر حقیقی x به‌جز $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ که برای آن‌ها داریم $\cos x = \circ$ ، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_\circ)=\tan x_\circ$ برای $x_\circ \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ، یعنی :

$$\lim_{x \to x_\circ \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}} \tan x = \tan x_\circ$$

مثال:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \tan x = \tan \frac{\pi}{۴} = ۱ \quad , \quad \lim_{x \to \frac{۲\pi}{۳}} \tan x = \tan(\frac{۲\pi}{۳}) = -\sqrt{۳}$$

قضیهٔ ۴: تابع $f(x)=\cot x$ (یا $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$) برای همهٔ مقادیرحقیقی x به‌جز $x=k\pi$ که برای آن‌ها داریم $\sin x=۰$ ، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_۰)=\cot x_۰ , x_۰\neq k\pi$ یعنی :

$$\lim_{x\to x_۰\neq k\pi}\cot x=\cot x_۰$$

مثال:

$$\lim_{x\to\frac{۵\pi}{۴}}\cot x=\cot\frac{۵\pi}{۴}=۱$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{۶}}x\cot x=(\lim_{x\to-\frac{\pi}{۶}}x)(\lim_{x\to-\frac{\pi}{۶}}\cot x)=(-\frac{\pi}{۶})\left(\cot(-\frac{\pi}{۶})\right)=\frac{\pi\sqrt{۳}}{۶}$$

برای آشنایی بیش‌تر با دستورهایی که گفته شد، حدهای زیر را حساب می‌کنیم :

۱) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\sin x+\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\cos x=\sin\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sqrt{۲}$

۲) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{۳}}\frac{۲\cos x-\sin^۲ x}{\cos x+۱}=\frac{۲\cos(-\frac{\pi}{۳})-\sin^۲(-\frac{\pi}{۳})}{\cos(-\frac{\pi}{۳})+۱}=\frac{۲(\frac{۱}{۲})-(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۶}$

۳) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}(۲\sin x+\cos^۲ x)=۲\sin(\frac{\pi}{۶})+\cos^۲(\frac{\pi}{۶})=۲(\frac{۱}{۲})+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲=\frac{۷}{۴}$

۴) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{۴}}(\tan x+\cot x)=\tan(-\frac{\pi}{۴})+\cot(-\frac{\pi}{۴})=-۱-۱=-۲$

تمرین

۱ــ حد چپ و حد راست هر یک از تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده شده به‌دست آورید و معلوم کنید کدام‌یک از این توابع دارای حد است.

الف) $f(x)=\begin{cases}-۳x+۴ , & x\geq ۱\\ ۲x^۲+x , & x<۱\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+۳}{x-۱} , & x\geq ۲\\ x^۳+۲ , & x<۲\end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$

ت) $f(x)=\begin{cases}(x+۱)^{۲} & , \quad x >\!\!- \ ۲\\ x+۳ & , \quad x <\!\!- \ ۲\end{cases}$

در نقطهٔ $x=-۲$

پ) $f(x)=\begin{cases}-۴x^{۲}+۳ & , \quad x \quad \frac{۱}{۲}\\ ۲x+۱ & , \quad x<\frac{۱}{۲}\end{cases}$

در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$

ج) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۲x+۱} & , \quad x\geq ۰\\ x-۱ & , \quad x<۰\end{cases}$

در نقطهٔ $x=۰$

ث) $f(x)=\begin{cases}۲\sin x-۱ & , \quad x\geq \frac{\pi}{۲}\\ \cos x+۱ & , \quad x<\frac{\pi}{۲}\end{cases}$

در نقطهٔ $x=\frac{\pi}{۲}$

۲ــ حدهای زیر را حساب کنید.

ب) $\lim\limits_{x\to -۱}(\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲})$

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}(۴x-۵)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۲}(-۲x^{۳}+۳x^{۲}-x+۴)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۱}(x^{۲}-۲x-۳)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{-x^{۲}+۱}{x^{۲}+x+۱}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۳x+۲}{x-۲}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۵}\left(\frac{x+۲}{۳x^{۲}+۴}\times\frac{\sqrt{x-۱}}{x+۱}\right)$

چ) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}}\frac{(-۲x^{۲}+۱)^{۳}}{x^{۲}+۱}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}}(\cos x+\sin^{۲}x+۱)$

خ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}}(۲\sin x-۱)$

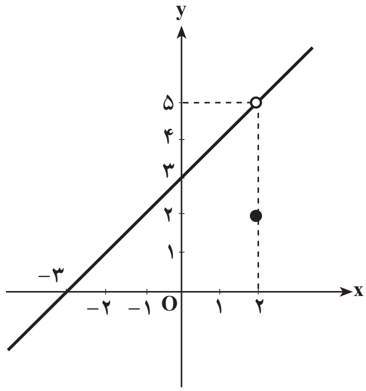
ر) $\lim\limits_{x\to ۰}(\frac{x^{۲}}{\cos x})$

ذ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin^{۲}x+\cos x)$

ژ) $\lim\limits_{x\to ۴}\tan(\frac{\pi x}{۳})$

ز) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}(\sin\frac{\pi x}{۲})$

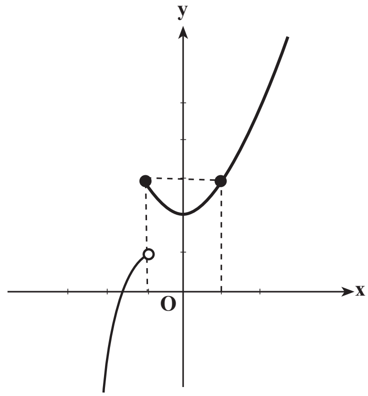
۳ــ از روی هر نمودار، حد راست و حد چپ تابع را، در نقطه داده شده تعیین کنید و مشخص نمایید که کدام تابع حد دارد.



الف) $f(x)=\begin{cases} x+۳ \ , & x\neq ۲ \\ ۲ \ , & x=۲ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$



ب) $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ \ , & x\geq -۱ \\ -x^۲+۲ \ , & x< -۱ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$

۴ــ دو تابع f و g به‌صورت $f(x)=x^۲-x-۲$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x-۲}$ داده شده‌اند.

الف ــ حد هر یک از این دو تابع را در ۳ به‌دست آورید.

ب ــ تابع‌های $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ و $\dfrac{f}{g}$ را تعیین و حد هر یک از آن‌ها را در ۳ پیدا کنید.

پ ــ حد تابع‌های $(f(x))^۳$ و $\sqrt[۳]{f(x)}$ و $\dfrac{۱}{g(x)}$ و $۳g(x)$ را در ۳ تعیین کنید.

۵ــ اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=۴$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-۳$ باشد، حد هر یک از تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ ب) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)$ پ) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x).g(x)\right)$

ت) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ث) $\lim\limits_{x\to x_0} ۲\sqrt{f(x)}$ ج) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(g(x)\right)^۲$

۶ــ تابع $f(x)=\begin{cases}(a+1)x+3 & , \quad x \succ 2\\ -2x^2+1 & , \quad x \prec 2\end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که در نقطه ۲ــ تابع حد داشته باشد.

۷ــ تابع $f(x)=\begin{cases}ax+2b & , \quad x \quad 3\\ ax^2+bx+2 & , \quad x<3\end{cases}$ مفروض است. عددهای a و b را چنان بیابید که $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$ و $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$.

۸ــ در صورتی که $f(x+2)=\dfrac{x+4}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ را حساب کنید.

۹ــ هر یک از حدهای زیر را حساب کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\sin(x+\frac{\pi}{6})\right)$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2\sin(x-\frac{\pi}{6})+\cos 2x+\sin\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}+\cos^2(x-\frac{\pi}{4})}$

توجه: اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ آن‌گاه حد تابع $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ را در x_0 ، نمی‌توان با استفاده از قضایای مطرح شده محاسبه نمود (چرا؟). برای تعیین مقدار این حد با توجه به نوع تابع‌های f(x) و g(x)، روش‌های دیگری را می‌توان اختیار کرد.

مثال: حد تابع $q(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ را در ۲ می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد.

چون $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)=4-6+2=0$

و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=4-4=0$

برای یافتن حد تابع q(x) با توجه به این‌که $x\neq 2$ داریم $x-2\neq 0$ و می‌توان نوشت :

$$q(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x-1}{x+2}$$

پس :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

قضیهٔ فشردگی: فرض کنید به‌ازای هر x از بازه‌ای مانند I که شامل نقطهٔ $x_\circ$ است، مگر احتمالاً در $x_\circ$، داشته باشیم :

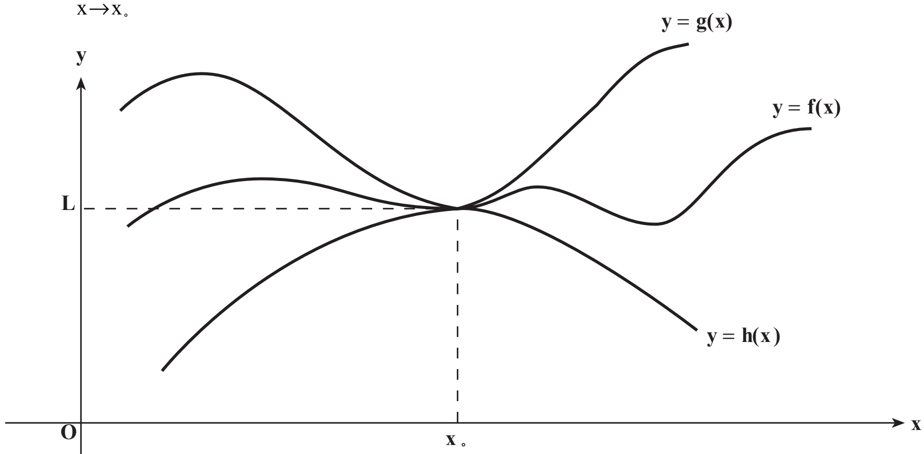
$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$

و

$$\lim_{x\to x_\circ} h(x) = \lim_{x\to x_\circ} g(x) = L$$

آن‌گاه :

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = L$$



مثال: فرض کنید به‌ازای هر $x \neq ۰$ داشته باشیم :

$$۳ - x^۲ \le f(x) \le ۳ + x^۲$$

حد $f(x)$ را در $x = ۰$ تعیین کنید.

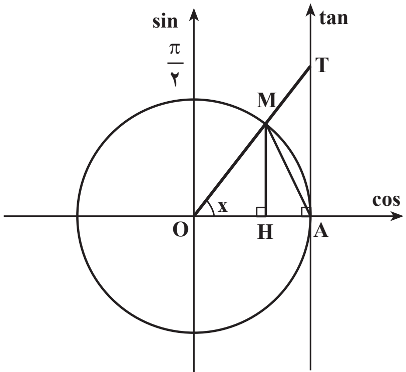
حل: چون $\lim_{x\to ۰}(۳ - x^۲) = ۳$ و $\lim_{x\to ۰}(۳ + x^۲) = ۳$.

بنابراین طبق قضیهٔ فشردگی داریم :

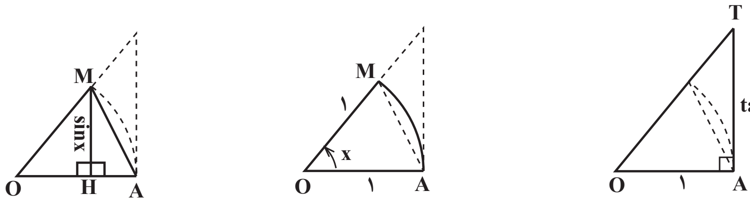
$$\lim_{x\to ۰} f(x) = ۳$$

قضیه: اگر x برحسب رادیان باشد، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x} = ۱$$



اثبات: در دایره‌ای مثلثاتی کمان $\overset{\frown}{AM}$ را مساوی x رادیان $(۰ < x < \frac{!}{۲})$ درنظر می‌گیریم. تصویر نقطهٔ M روی محور کسینوس‌ها را H و نقطهٔ برخورد OM با محور تانژانت‌ها را T می‌نامیم. می‌دانیم که HM=sinx و AT=tanx و $OA = ۱$ است. با توجه به شکل آشکار است که :



مساحت مثلث OAM < مساحت قطاع OAM[1] < مساحت مثلث OAT

بنابراین

$$\frac{۱}{۲}OA.MH < \frac{۱}{۲} \times ۱ \times x < \frac{۱}{۲}OA.AT$$

$$\frac{۱}{۲} \times ۱ \times \sin x < \frac{۱}{۲} \times ۱ \times x < \frac{۱}{۲} \times ۱ \times \tan x$$

$$\sin x < x < \tan x$$

از تقسیم نابرابری‌های بالا بر sinx که مثبت است خواهیم داشت :

$$۱ < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} \Rightarrow ۱ < \frac{x}{\sin x} < \frac{۱}{\cos x}$$

اما می‌دانیم که اگر a و b دو عدد مثبت و $a \quad b$ ، داریم $\frac{۱}{a} < \frac{۱}{b}$ ؛ اینک چون $\cos x \quad ۰$ و $\frac{x}{\sin x} \quad ۰$ ، نابرابری‌های بالا را به‌صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < ۱$$

امّا $\lim\limits_{x \to ۰^+} \cos x = ۱$ و $\lim\limits_{x \to ۰^+} ۱ = ۱$. پس طبق قضیهٔ فشردگی حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ که بین این دو تابع قرار دارد، برابر ۱ می‌شود. یعنی :

$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

در حالتی که $\frac{-\pi}{۲} < x < ۰$ نیز ثابت می‌شود که $\lim\limits_{x \to ۰^-} \frac{\sin x}{x} = ۱$ ، بنابراین :

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

نکته: می‌دانیم که اگر $\lim\limits_{x \to x_۰} f(x) = l \neq ۰$ ، آنگاه $\lim\limits_{x \to x_۰} \frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{l}$. بنابراین از $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$ نتیجه می‌شود $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{x}{\sin x} = ۱$.

۱ــ مساحت قطاع x رادیان در دایره‌ای به شعاع R برابر است با : $S_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲}R^{۲}x$