مثال ۸: اگر یک سنگ‌ریزه از بالای برجی به‌طرف پایین رها شود و شتاب جاذبه زمین $g = ۹/۸ m/s^۲$ باشد، در این‌صورت فاصلهٔ پیموده شده d از موقع رها شدن پس از t ثانیه، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$d(t) = ۴/۹t^۲$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید فاصلهٔ پیموده شده d تابع‌ای از t است. دامنه این تابع بازه $[۰, t_۱]$ است که $t_۱$ زمان رسیدن سنگ‌ریزه به زمین است.

مثال ۹: انرژی پایه در بدن به مقدار انرژی گفته می‌شود که برای تأمین سوخت دستگاه‌های غیرارادی درون بدن مانند قلب، ریه، کلیه، دستگاه گوارش، دستگاه تنفس، غدد درون‌ریز و مانند این استفاده می‌شود.

به‌طور معمول $\frac{۲}{۳}$ از انرژی دریافتی بدن از غذاها، صرف تأمین فعالیت‌های پایه و $\frac{۱}{۳}$ دیگر برای تأمین سوخت فعالیت‌های فیزیکی روزانه است. برای مثال، مقدار کالری لازم برای یک کارمند در یک شبانه‌روز از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود :

۳۰ × وزن بدن برحسب کیلوگرم = مقدار انرژی لازم برای بدن

چنان‌چه وزن کارمندی ۸۰ کیلوگرم باشد، برای تأمین انرژی موردنیاز خود به $۲۴۰۰ = ۳۰ \times ۸۰$ کالری در یک شبانه‌روز احتیاج دارد. بنابراین اگر این شخص روزانه بیش از ۲۴۰۰ کالری دریافت کند، آن‌گاه دچار اضافه وزن شده و اگر کمتر از ۲۴۰۰ کالری دریافت کند، سبب کاهش وزن می‌شود. ولی اگر همان ۲۴۰۰ کالری را دریافت کند وزن او ثابت باقی می‌ماند.

با توجه به فرمولِ مقدار انرژی لازم برای بدن، ملاحظه می‌کنیم که مقدار این انرژی تابعی از وزن انسان است. هرچه وزن بیشتر باشد، مقدار انرژی مصرفی لازم برای بدن بیشتر و هرچه وزن کمتر باشد، مقدار انرژی مصرفی لازم برای بدن نیز کمتر می‌شود، دامنه این تابع بازه $[x_۱, x_۲]$ است که $x_۱$ کمترین وزن انسان‌ها و $x_۲$ بیشترین وزن انسان‌ها است.

مثال ۱۰: یکی از روش‌های مرسوم سنجش وزن ایده‌آل افراد، استفاده از شاخص توده بدنی یا BMI[1] است که از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود :

$$BMI = \frac{\text{وزن برحسب کیلوگرم}}{\text{مجذور طول قد برحسب متر}}$$

۱ــ Bady Mass Index

پس از محاسبهٔ BMI یکی از حالت‌های زیر برای هر فرد اتفاق می‌کند.

شخص لاغر است و کمبود وزن دارد $\Rightarrow$ BMI < ۱۹

شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است $\Rightarrow$ ۱۹ ≤ BMI < ۲۵

شخص اضافه وزن دارد $\Rightarrow$ ۲۵ ≤ BMI < ۳۰

شخص چاق و وضعیت بحرانی دارد. $\Rightarrow$ BMI ≥ ۳۰

با این روش، وضعیت وزنی هر فردی مشخص می‌شود و افرادی که اضافه وزن دارند، با یک رژیم مناسب می‌توانند به محدوده سلامت وزنی برسند. اما وزن ایده‌آل چیست؟

در پاسخ به این سؤال باید بگوییم که وزن ایده‌آل با سن شما رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به‌طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا می‌رود و BMI افزایش می‌یابد. به همین جهت متخصصان علوم تغذیه به کمک جدول سن، BMI مناسب گروه سنی افراد مختلف را به‌صورت زیر تعیین می‌کنند.

گروه سنی	BMI
۱۹ـ۲۴	۲۲
۲۵ـ۳۴	۲۳
۳۵ـ۴۴	۲۴
۴۵ـ۵۴	۲۵
۵۵ـ۶۴	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

پس از یافتن BMI مناسب با گروه سنی هر فرد، وزن ایده‌آل طبق فرمول زیر محاسبه می‌شود :

مجذور قد برحسب متر × BMI = وزن ایده‌آل برحسب کیلوگرم

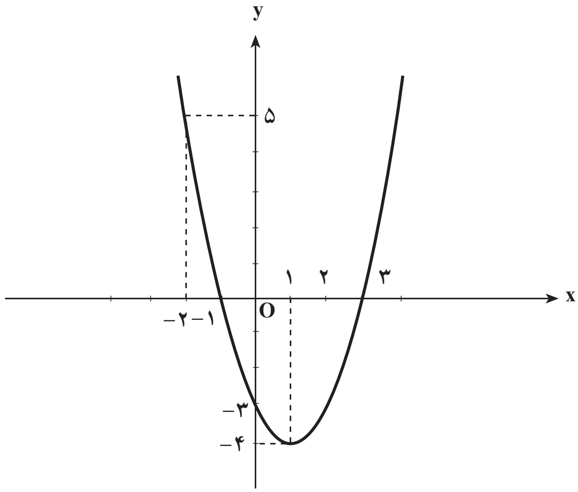
اکنون که وزن ایده‌آل خود را دانستید، معلوم می‌شود که چه‌قدر اضافه وزن یا چه‌قدر کمبود وزن دارید.

با دقت در فرمول وزن ایده‌آل درمی‌یابیم که وزن ایده‌آل تابعی از طول قد هر فرد است، هم‌چنین چون وزن ایده‌آل از حاصل‌ضرب BMI در مجذور قد برحسب متر به‌دست می‌آید، مشخص می‌شود که وزن ایده‌آل تابعی از BMI و درنتیجه گروه سنی هر فرد می‌شود. در این فرمول طول قد و BMI متغیرهایی مستقل و وزن ایده‌آل متغیری وابسته به آن‌ها است.

در سال گذشته با تابع خطی که ضابطه آن به‌صورت $y=ax+b$ است آشنا شدید، همچنین رسم نمودار برخی از توابع درجه دوم را به کمک انتقال تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲$ مطالعه کردید. به نمودار تابع درجه دوم با ضابطهٔ $y=ax^۲+bx+c$ **سهمی** می‌گوییم. در زیر رسم نمودار یک تابع درجه دوم را به کمک نقطه‌یابی مشاهده می‌کنید.

مثال ۱۱: نمودار تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^۲-۲x-۳ \end{cases}$ را رسم کنید.

حل: می‌دانیم که نمودار تابع بالا یک سهمی است. با توجه به آن‌که $f(x)=(x-۱)^۲-۴$ با انتقال سهمی $y=x^۲$ به اندازه یک واحد به راست و ۴ واحد به پایین، نمودار این تابع رسم می‌شود.



معادلهٔ کلی سهمی به‌صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ است.

مثال ۱۲: معادله یک سهمی را بیابید که از نقاط $(۰,-۱)$، $(۱,۰)$، $(۲,۳)$ بگذرد.

حل: داریم :

$$f(۰)=۰+۰+c \quad\Rightarrow\quad -۱=c$$

$$f(۱)=a(۱)^۲+b(۱)+c \quad\Rightarrow\quad ۰=a+b-۱\Rightarrow a+b=۱$$

$$f(۲)=a(۲)^۲+b(۲)+c \quad\Rightarrow\quad ۳=۴a+۲b-۱\Rightarrow ۴a+۲b=۴$$

پس باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} a+b=۱ \\ ۲a+b=۲ \end{cases} \Rightarrow a=۱\ ,\ \ b=۰$$

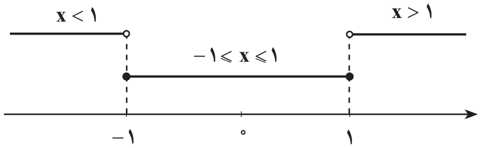
که از آن نتیجه می‌شود :

$$f(x) = x^۲ - ۱$$

تابع چندضابطه‌ای

هرگاه دامنهٔ یک تابع را به چند مجموعهٔ جدا از هم تقسیم کنیم، به‌طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنهٔ تابع باشد و روی هر مجموعه ضابطه‌ای متمایز تعریف کنیم، در این صورت یک تابع چندضابطه‌ای به‌دست می‌آید.

مثال ۱۳: دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر با $\mathbb{R}$ است. دامنه این تابع به‌صورت زیر، به سه مجموعهٔ جدا از هم تقسیم شده است.



روی هر مجموعه، ضابطه‌ای به صورت زیر تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & x > ۱ \\ ۲ & -۱ \le x \le ۱ \\ -۲x & x < ۱ \end{cases}$$

در این‌حالت $f(x)$ را تابعی سه ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال ۱۴: نمودار تابع سه ضابطه‌ای مثال قبل را رسم کنید.

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار هر ضابطه را در محدودهٔ اعتبارش رسم کنیم. به همین منظور، $f(x) = ۲x$ را برای $x > ۱$ ، $f(x) = ۲$ را برای $-۱ \le x \le ۱$ و $f(x) = -۲x$ را برای $x < ۱$ رسم می‌کنیم :

$f(x) = ۲$;

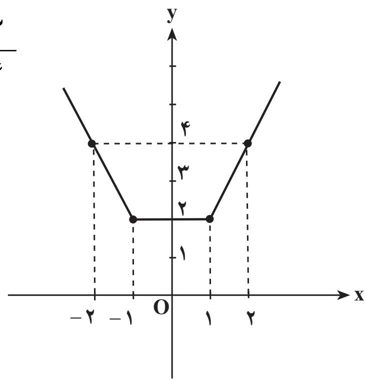
x	−۱	۱
y	۲	۲

$f(x) = ۲x$;

x	۱	۲
y	۲	۴

$f(x) = -۲x$;

x	−۱	−۲
y	۲	۴



توجه: نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کردیم و روی هر نمودار، قسمت‌هایی که در محدوده اعتبار آن ضابطه است را پررنگ کردیم. ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار این تابع سه ضابطه‌ای، همواره بزرگتر یا برابر با ۲ است.

مثال ۱۵: نمودار تابع $f(x)=|۲x-۱|$ را رسم کنید.

می‌دانیم که اگر $۲x-۱\geq ۰$ آن‌گاه $f(x)=۲x-۱$ و در حالتی که $۲x-۱<۰$ خواهیم داشت: $f(x)=-(۲x-۱)$، در نتیجه ابتدا این تابع را به‌صورت چند ضابطه می‌نویسیم، سپس آن را رسم می‌کنیم.

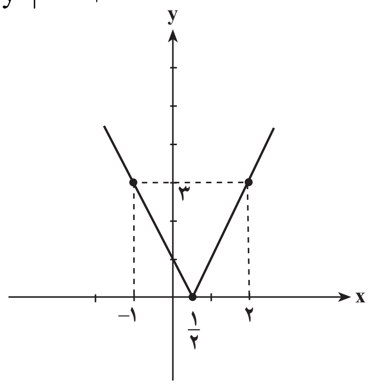
$$f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & ۲x-۱\geq ۰\\ -۲x+۱ & ۲x-۱<۰\end{cases}=\begin{cases}۲x-۱ & x\geq \frac{۱}{۲}\\ -۲x+۱ & x<\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$f(x)=۲x-۱$ $\quad (x\geq \frac{۱}{۲})$

x	$\frac{۱}{۲}$	۲
y	۰	۳

$f(x)=-۲x+۱$ $\quad (x<\frac{۱}{۲})$

x	$\frac{۱}{۲}$	-۱
y	۰	۳



مثال ۱۶: تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۱ & x\geq ۰\\ ۱-۲x & x<۰\end{cases}$ را درنظر بگیرید.

حاصل $f(x^۲+۱)$، $f(-\sqrt{۲})$ و $f(-\frac{۱}{۲}x^۲-۱)$ را به‌دست آورید.

حل: چون همواره $x^۲+۱ ۰$، بنابراین از ضابطهٔ اول برای محاسبهٔ $f(x^۲+۱)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x^۲+۱)=-(x^۲+۱)^۲+۱=-(x^۴+۲x^۲+۱)+۱=-x^۴-۲x^۲$$

چون $-\sqrt{۲} < ۰$ ، بنابراین برای محاسبهٔ $f(-\sqrt{۲})$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم :

$$f(-\sqrt{۲}) = ۱ - ۲(-\sqrt{۲}) = ۱ + ۲\sqrt{۲}$$

چون $-\frac{۱}{۲}x^۲ \leq ۰$ بنابراین $-\frac{۱}{۲}x^۲ - ۱ < ۰$. درنتیجه برای محاسبهٔ $f(-\frac{۱}{۲}x^۲ - ۱)$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم :

$$f(-\frac{۱}{۲}x^۲ - ۱) = ۱ - ۲(-\frac{۱}{۲}x^۲ - ۱) = ۱ + x^۲ + ۲ = x^۲ + ۳$$

مثال ۱۷: تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \geq ۰ \\ x - ۱ & x < ۰ \end{cases}$ داده شده است.

الف ــ $f(-۱)$ و $f(۰)$ و $f(\frac{۱}{۲})$ و $f(۱)$ و $f(۲)$ را محاسبه نمایید.

ب ــ نمودار تابع را رسم کنید.

حل: داریم :

$$f(-۱) = -۱ - ۱ = -۲$$

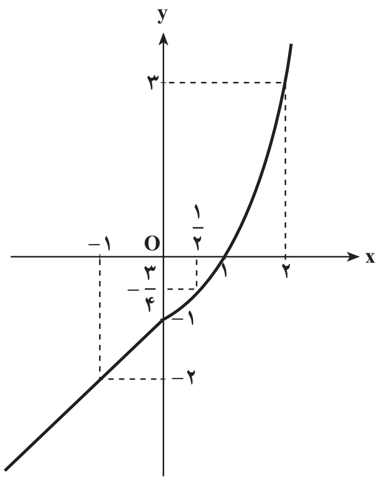
$$f(۰) = (۰)^۲ - ۱ = -۱$$

$$f(\frac{۱}{۲}) = (\frac{۱}{۲})^۲ - ۱ = \frac{۱}{۴} - ۱ = -\frac{۳}{۴}$$

$$f(۱) = (۱)^۲ - ۱ = ۱ - ۱ = ۰$$

$$f(۲) = ۲^۲ - ۱ = ۴ - ۱ = ۳$$

x	$\cdots$	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
y		-۲	-۱	$-\frac{۳}{۴}$	۰	۳



نمودار تابع f با توجه به دامنه‌اش قسمتی از سهمی به معادلهٔ $y = x^۲ - ۱$ و قسمتی از خط به معادلهٔ $y = x - ۱$ است.

تمرین

۱ــ اگر تابع $y = f(x) = \frac{۳}{۲x^۲ + ۱}$ با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، برابری‌های زیر را کامل کنید :

$$f(۰) = \cdots \quad ، \quad f(\sqrt{۲}) = \cdots \quad ، \quad f(\frac{۱}{۲}) = \cdots \quad ، \quad f(۲x) = \cdots$$

۲ـ اگر تابع $f(x)=x^۲-۴$ با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، مقادیر زیر را حساب کنید.

$f(۳)$ ، $f(۵)$ ، $f(f(۳))$

۳ـ تابع f به‌صورت $\begin{cases} f(x)=\sqrt{۲}+x & x\geq ۱ \\ f(x)=\sqrt{۲}-x & x<۱ \end{cases}$ تعریف شده است. برابری‌های زیر را کامل کنید.

$f(\sqrt{۲}-۱)=\cdots$ ، $f(۳-\sqrt{۲})=\cdots$ ، $f(-\sqrt{۲})=\cdots$

$f(۰)=\cdots$ ، $f(f(-۱))=\cdots$

۴ـ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک تابع را مشخص می‌کند.

۱) $\{(-۱,۰)$ و $(۰,۱)$ و $(۲,۳)$ و $(\sqrt[۳]{-۱},۴)\}$

۲) $\{(-۱,۲)\}$

۳) $\{(۰,۰)$ و $(۲,۱)$ و $(۳,۲)$ و $(-۱,۰)$ و $(۲,-۲)\}$

۴) $\{(۱,۱)$ و $(۲,۳)$ و $(-۱,-۱)$ و $(-۲,۵)\}$

۵ـ معادلهٔ خطی را مشخص کنید که محور xها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{۳}{۲}$ قطع کند و از نقطهٔ $(۱,۵)$ بگذرد.

۶ـ اگر تابع $f(x)=x^۲+\frac{۱}{x^۲}$ با دامنه $\mathbb{R}-\{۰\}$ باشد مقادیر زیر را محاسبه نمایید :

$f(۱)$ و $f(-۱)$ و $f(\frac{۱}{x})$ و $f(\frac{-۱}{x})$ و $f(\sqrt{x})$

۷ـ اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ ، $f(-\frac{۱}{x})$ را به‌دست آورید و درستی تساوی $f(x)\times f(\frac{-۱}{x})=-۱$ را بررسی نمایید. $(x\neq \pm۱,۰)$

۸ـ اگر $f(x)=ax^۲+bx+c$ ، a و b و c را طوری بیابید که این سهمی محور yها را در نقطه‌ای به‌عرض ۳ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند و از نقطهٔ $A(۲,۳)$ نیز بگذرد.

۹ـ تابع $f(x)=\begin{cases} ۴-x^۲ & x<۰ \\ x+۴ & x\geq ۰ \end{cases}$ را درنظر بگیرید.

الف ـ $f(-۲)$ و $f(-۱)$ و $f(۰)$ و $f(۱)$ و $f(۲)$ را محاسبه کنید و در یک جدول مرتب نمایید.

ب ـ نمودار تابع را رسم کنید.

۱۰ـ دو تابع $y=x^۲+ax-۳b$ و $y=-x+b$ با دامنه $\mathbb{R}$ داده شده‌اند، a و b را طوری

محاسبه کنید که نمودارهای این دو تابع روی محور xها در نقطه‌ای به‌طول ۱ همدیگر را قطع کنند.

۱۱ــ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۴ & x<۲ \\ x+۳ & x\geq ۲ \end{cases}$ ب) $f(x)=\begin{cases} -x^{۲}+۲x & x<۲ \\ ۲x-۱ & x\geq ۲ \end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x>۰ \\ ۱ & x\leq ۰ \end{cases}$ د) $f(x)=-۳\left|\frac{۱}{۳}x+۶\right|$

روش محاسبه دامنهٔ تعریف ضابطه‌ها

در توابع حقیقی با مقادیر حقیقی گاهی اوقات دامنهٔ تابع داده نمی‌شود و فقط ضابطه تابع ارائه می‌شود. در این‌صورت طبق قرارداد دامنهٔ تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی است که برای آن‌ها ضابطه تعریف شده باشد.

مثال ۱: تابع $f(x)=x^{۲}+۳$ داده شده است، دامنهٔ تابع را به‌دست آورید.

حل: تابع بالا چنان است که هر عدد حقیقی x را به‌توان ۲ می‌رساند و ۳ را به آن می‌افزاید و عدد معین $x^{۲}+۳$ را می‌دهد. مثلاً برای $x=۲$ ، $(۲)^{۲}+۳=۷$ و برای $x=-۳$ ، $(-۳)^{۲}+۳=۱۲$ ، پس این تابع برای همهٔ اعداد حقیقی x تعریف شده است. بنابراین $D_f=\mathbb{R}$.

مثال ۲: تابع $f(x)=x^{۳}-۲x-۵$ داده شده است، دامنهٔ آن را معین کنید.

حل: چون برای هر عدد حقیقی $x_{۰}$ ، $f(x_{۰})=x_{۰}^{۳}-۲x_{۰}-۵\in\mathbb{R}$

پس این تابع نیز برای همهٔ مقادیر $x_{۰}$ ، متعلق به مجموعهٔ اعداد حقیقی، تعریف شده است یعنی : $D_f=\mathbb{R}$.

به‌طور کلی دامنهٔ تابع‌های چندجمله‌ای که به‌صورت $f(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_{۰}$ یا $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\cdots+1\ ,\ n\in W$ نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ اعداد حقیقی است. یعنی : $D_f=\mathbb{R}$ زیرا در چند جمله‌ای‌ها برای همهٔ مقادیر x متعلق به $\mathbb{R}$ ، $f(x)$ قابل محاسبه است.

مثال ۳: دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۲}{x^{۲}-۱}$ را تعیین کنید.

حل: می‌دانیم که اگر $x^{۲}-۱$ صفر باشد کسر بالا تعریف نشده است و هرگاه $x^{۲}-۱$ ناصفر باشد $f(x)$ تعریف شده است. اما داریم :

$$x^{۲}-۱\neq ۰\Rightarrow x^{۲}\neq ۱\Rightarrow x\neq\pm ۱$$

پس این تابع برای همهٔ اعداد حقیقی x جز $x=۱$ و $x=-۱$ تعریف شده است. بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت زیر است :

$$D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۱\} \quad \text{یا} \quad D_f=(-\infty,-۱)\cup(-۱,۱)\cup(۱,+\infty)$$

مثال ۴: دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x^۲+۱}$ را مشخص کنید.

حل: چون $x^۲+۱$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود پس کسر بالا برای همهٔ مقادیر x تعریف شده است، بنابراین دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است.

به‌طور کلی در توابع کسری به‌صورت $y=f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند (توابع کسری گویا) دامنه، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به‌غیر از ریشه‌های $q(x)$ است یعنی :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid q(x)\neq ۰\}$$

مثال ۵: دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x-۱}{x^۲-۲x-۳}$ عبارت است از :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x^۲-۲x-۳\neq ۰\}=\mathbb{R}-\{۳,-۱\}$$

مثال ۶: تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ برای همهٔ اعداد حقیقی x به‌طوری‌که $x-۲\geq ۰$ تعریف شده است ولی برای $x-۲<۰$ تعریف نشده است. بنابراین داریم :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x-۲\geq ۰\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq ۲\}=[۲,+\infty)$$

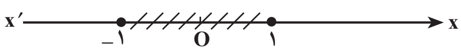
مثال ۷: تابع $f:x\mapsto\sqrt{۱-x^۲}$ برای $۱-x^۲\geq ۰$ تعریف شده است. بنابراین :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid ۱-x^۲\geq ۰\}$$

که با توجه به جدول :

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$۱-x^۲$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

خواهیم داشت :



$$D_f=[-۱,۱]$$

مثال ۸: تابع $g(x)=\sqrt[3]{2x^2-1}$ برای همهٔ اعداد حقیقی x تعریف شده است. زیرا فرجهٔ رادیکال فرد است و عبارت زیر رادیکال چندجمله‌ای است، پس $D_g=\mathbb{R}$.

مثال ۹: تابع $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ برای مقادیری از x که $\sqrt{x+1}$ معین و مخالف با صفر باشد، تعریف شده است.

پس، از یک طرف مخرج کسر باید مخالف با صفر باشد، یعنی $x+1\neq 0$ یا $x\neq -1$ ، و از طرف دیگر عبارت زیر رادیکال، با توجه به فرجهٔ زوج آن، باید نامنفی باشد، یعنی $x+1>0$. بنابراین داریم :

$$D_h=\{x\in\mathbb{R}\mid x+1>0\}=(-1,+\infty)$$

به‌طور کلی دامنهٔ توابع گنگ به‌صورت $f(x)=\sqrt[2k]{p(x)}$ و $g(x)=\sqrt[2k+1]{p(x)}$ عبارت‌اند از :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in D_p\,,p(x)\geq 0\}\qquad D_g=D_p$$

مثال ۱۰: دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ عبارت است از :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{2-x}{2+x}\geq 0 \text{ و } 2+x\neq 0\}$$

$$2-x=0\Rightarrow x=2$$

$$2+x=0\Rightarrow x=-2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$\frac{2-x}{2+x}$		$-$	تعریف نشده	$+$	0	$-$	

پس :

$$D_f=(-2,2]$$

مثال ۱۱: دامنهٔ تابع‌های $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$ و $g(x)=\sqrt[3]{\frac{3}{x-1}}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$2-x-x^2\geq 0\Rightarrow(2+x)(1-x)\geq 0$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$2-x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

پس :

$$D_f=[-2,1]$$

و به همین ترتیب :

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}\mid x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$$

مثال ۱۲: دامنهٔ تابع‌های $f(x)=\log_{۳}(x-۱)$ و $g(x)=\log\frac{x+۱}{۱-x}$ را به این‌صورت معین می‌کنیم :

بنابر تعریف لگاریتم، دامنهٔ تابع f مقادیری از x است که برای آن‌ها $x-۱\quad ۰$ یا $x\quad ۱$.

پس : $D_f=\{x\in\mathbb{R}|x-۱\quad ۰\}=(۱,+\infty)$

و دامنهٔ تابع g مقادیری از x است که $\frac{x+۱}{۱-x}\quad ۰$. بنابراین :

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}|\frac{x+۱}{۱-x}\quad ۰ \text{ و } ۱-x\neq ۰\}=(-۱,۱)$$

مثال ۱۳: دامنهٔ توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ و $h(x)=\tan x$ و $p(x)=\cot x$ را تعیین کنید.

حل: دامنهٔ تابع‌های f و g مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است، زیرا برای هر عدد حقیقی x مقادیر f و g معین است.

دامنهٔ تابع h به‌صورت زیر است :

$$D_h=\{x\in\mathbb{R}|x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$$

زیرا داریم : $h(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و چون باید داشته باشیم $\cos x\neq ۰$ پس $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ، سرانجام دامنهٔ تابع p به‌صورت $D_p=\{x\in\mathbb{R}|x\neq k\pi\}$ است زیرا داریم : $p(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ و چون باید $\sin x\neq ۰$ باشد، پس $x\neq k\pi$.

مثال ۱۴: دامنهٔ تابع $f(x)=\sin\sqrt{x}$ و $g(x)=\tan ۲x$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$D_f=\{x|\sqrt{x}\in\mathbb{R}\}=[۰,+\infty)$$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}|۲x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\}=\{x\in\mathbb{R}|x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\}$$

تمرین

۱ـ دامنهٔ هریک از توابع زیر را به‌دست آورده و آن‌ها را به‌صورت بازه نمایش دهید.

$$f(x)=۲x^{۲}-۳x \qquad g(x)=x(x+۲)(x-۱) \qquad h(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۳x-۴}$$

$$f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x-۱} \qquad g(x)=\frac{۲}{\sqrt{x+۲}} \qquad h(x)=\frac{۲x+۵}{x^{۲}-۲x}$$

$f(x)=\sqrt{\frac{۲-x}{۱-x}}$ $\qquad g(x)=\sqrt[۳]{\frac{۲}{x+۱}}$ $\qquad h(x)=\frac{۲x}{\sqrt[۳]{x+۱}}$

$f(x)=\log(x^۲-۱)$ $\qquad g(x)=\log(۴-x^۲)$ $\qquad h(x)=\log(۲-x)^۲$

$f(x)=\sqrt{x^۲+x-۲}$ $\qquad g(x)=\frac{|x|}{x}$ $\qquad h(x)=\frac{x^۲-۹}{x-۳}$

$f(x)=x\sqrt{x-۳}$

۲ــ دامنهٔ توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید :

$f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ ، $g(x)=\cos\frac{۱}{x}$ ، $k(x)=\tan(x-\frac{\pi}{۴})$

۳ــ دامنهٔ تابع‌های داده‌شده را به‌صورت بازه بنویسید.

$f(x)=\begin{cases} x+۱ \ , & x\geq ۲ \\ ۳x \ , & x<۰ \end{cases}$ $\qquad h(x)=\begin{cases} x \ , & -۳<x\leq ۲ \\ ۳x-۴ \ , & ۲<x\leq ۴ \end{cases}$

عملیات روی توابع

۱ــ مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت دو تابع حقیقی

توابع حقیقی $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=۲x$ و $h(x)=x^۲+۲x-۱$ را در نظر می‌گیریم. مقادیر $f(۲)$ و $f(-۱)$ و $g(۲)$ و $g(-۱)$ و $h(۲)$ و $h(-۱)$ و $f(۲)+g(۲)$ و $f(-۱)+g(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	-۱	۲
$f(x)$	$(-۱)^۲-۱=۰$	$(۲)^۲-۱=۳$
$g(x)$	$۲(-۱)=-۲$	$۲(۲)=۴$
$f(x)+g(x)$	$۰-۲=-۲$	$۳+۴=۷$
$h(x)$	$(-۱)^۲+۲(-۱)-۱=-۲$	$(۲)^۲+۲(۲)-۱=۷$

به‌طوری که دیده می‌شود :

$$f(-۱)=۰, g(-۱)=-۲, f(-۱)+g(-۱)=۰+(-۲)=-۲, h(-۱)=-۲$$

$$f(۲)=۳, g(۲)=۴ \ , \ f(۲)+g(۲)=۳+۴=۷ \ , \quad h(۲)=۷$$

هم‌چنین دو تابع $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}x-۱$ را در نظر گرفته سپس $h(x)=f(x)+g(x)$ را محاسبه و جدول صفحهٔ بعد را کامل می‌کنیم :

داریم : $h(x)=۲x+۳+\frac{۱}{۲}x-۱=\frac{۵}{۲}x+۲$