فصل اوّل

پدیده‌های تصادفی و احتمال

در اطراف ما پدیده‌هایی رخ می‌دهند که ما قبل از وقوع یا رخداد این پدیده‌ها، تمام حالت‌های ممکن در رخدادِ آن‌ها را می‌شناسیم، اما از این‌که کدام‌یک از حالت‌های ممکن به‌طور قطع رخ خواهد داد، اطلاع دقیقی نداریم و فقط براساس اطلاعات و گاهی وقت‌ها بنابر تجربه‌ای که داریم، می‌توانیم پیش‌بینی کنیم یا حدس بزنیم که کدام‌یک از حالت‌های ممکن، امکان بیشتری برای به وقوع پیوستن داشته و کدام‌یک شانس کمتری دارند.

فرض کنید، مطالعات ژنتیکی در نژاد خاصی از مردم آسیا نشان داده است که ۸۵٪ ژن‌های تعیین‌کنندهٔ رنگ چشم آن‌ها از نوع ژن‌های غالب (تیره) هستند، اگر ۲ نفر از افراد متعلق به این نژاد با هم ازدواج کنند، چقدر احتمال دارد رنگ چشم فرزند آن‌ها روشن باشد؟ اگر بدانیم رنگ چشم فرزند اولِ آن‌ها روشن است، چقدر احتمال دارد رنگ چشم فرزند دوم این خانواده تیره باشد؟

البته با توجه به اطلاعات موجود و مطالعات انجام شده، شما حدس می‌زنید که بچهٔ به دنیا آمده در این خانواده دارای چشم‌هایی به رنگ تیره باشد. آیا امکانِ روشن بودن چشم این بچه هم وجود دارد؟ آیا روشن بودن رنگ چشم بچهٔ اول روی روشن یا تیره بودنِ رنگ چشم فرزند دوم در این خانواده تأثیر دارد؟

پدیده‌های تصادفی

به دنیا آمدن یک نوزاد پدیده‌ای است که ما قبل از وقوع، دو حالت ممکن برای آن می‌شناسیم، (پسر یا دختر) اما قبل از تولد نمی‌توانیم با قطعیت پسر یا دختر بودنِ نوزاد را تعیین کنیم. وقتی یک مکعب را که روی شش وجه آن اعداد ۱ تا ۶ حک شده است (چنین مکعبی را تاس می‌نامیم) به‌هوا پرتاب می‌کنیم، قبل از این‌که به زمین بیافتد و از حرکت بایستد نمی‌توانیم با قطعیت عدد رو شده را تعیین کنیم. به چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که، «از همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن‌ها مطلع باشیم امّا از این‌که کدام حالت، قطعاً رخ خواهد داد اطمینان نداشته باشیم» یک **پدیده تصادفی** می‌گوییم.

فضای نمونه‌ای

اگر یک پدیدهٔ تصادفی داشته باشیم، «مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستنِ این پدیده تصادفی را **فضای نمونه‌ای** می‌نامیم.» فضای نمونه‌ای را معمولاً با S نمایش می‌دهند، اگر اعضای S **قابل شمارش** باشد آن را یک فضای نمونه‌ای **گسسته** می‌نامیم.

در جدول زیر تعدادی پدیدهٔ تصادفی و فضای نمونه‌ای مربوط به هر کدام و تعداد اعضای هرفضای نمونه‌ای مشخص شده است که توجه به این جدول، به‌خصوص محاسبهٔ تعداد اعضای هر فضای نمونه‌ای بسیار مهمّ می‌باشد.

پدیدهٔ تصادفی	فضای نمونه‌ای: S	تعداداعضای فضای نمونه‌ای: n(S)
انداختن یک سکّه	S= {رو و پشت}	$n(S)=۲$
انداختن یک تاس	$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$	$n(S)=۶$
تولد دو فرزند در یک خانواده	S= {(د,د)و(پ,د)و(د,پ)و(پ,پ)}	$n(S)=۲\times۲=۴$
کنار هم قرار گرفتن حروف a و b و c به‌طور تصادفی	$S=\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$	$n(S)=۳!=۶$
انتخاب تصادفی دو حرف از بین حروف d,c,b,a (بدون درنظر گرفتن ترتیب)	$S=\{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$	$n(S)=\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!۲!}=۶$
انتخاب تصادفی ۲ مهره از جعبه‌ای که در آن ۲ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد.	S= {آ۲آ۱, آ۲ق۲, آ۲ق۱, آ۱ق۲, آ۱ق۱, ق۲ق۱}	$n(S)=\binom{۴}{۲}=۶$
انتخاب تصادفی ۲ رقم از بین ارقام ۱،۲،۴،۶ و ساختن عدد ۲ رقمی	$S=\{۱۲,۲۱,۱۴,۴۱,۱۶,۶۱,۲۴,۴۲,$ $۲۶,۶۲,۴۶,۶۴\}$	$n(S)=P(۴,۲)=\frac{۴!}{۲!}=۱۲$
انداختن دو تاس با هم و یا انداختن ۱ تاس دو بار (تاس آبی و تاس قرمز)	$S=\{(۱,۱),\ldots,(۱,۶),\ldots,(۶,۶)\}$	$n(S)=n(S_۱)\times n(S_۲)$ $=۶\times۶=۳۶$ ($S_۱$ فضای نمونه‌ای تاس آبی و $S_۲$ فضای نمونه‌ای تاس قرمز است)

پیشامد تصادفی

اگر یک پدیدهٔ تصادفی رخ دهد و S فضای نمونه‌ای این پدیده یا آزمایش تصادفی باشد «هر زیرمجموعهٔ S را یک **پیشامد تصادفی** در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.» به‌عنوان مثال وقتی یک سکّه را می‌اندازیم، فضای نمونه‌ای به‌صورت S = {ر,پ} تعریف می‌شود، مجموعهٔ S دارای $۴ = ۲^۲$

زیرمجموعه است که طبق تعریف فوق هرکدام از زیرمجموعه‌های S یعنی هریک از مجموعه‌های {پ}= A_1 و {ر}= A_2 و { }= A_3 و {ر,پ} = $S = A_4$ یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای {ر,پ} = S می‌باشد.

پیشامد $A_3 = \varnothing$ را **پیشامد نشدنی** و پیشامد $A_4 = S$ را **پیشامد حتمی** می‌نامیم.

هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ایِ S مانند A را یک پیشامد تصادفی نامیدیم و «اگر A یک پیشامد تصادفی باشد و نتیجه آزمایش عضوی از A باشد، می‌گوییم A رخ داده است». قبل از ورود به بحث احتمال به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱: خانواده‌ای دارای سه فرزند است اگر پیشامد A، هم‌جنس بودنِ دو فرزند اول و پیشامد B وجود یک فرزند پسر در این خانواده باشد، A و B را مشخص کنید.

حل: فضای نمونه‌ای این پدیده $۲\times۲\times۲ = ۸$ عضو دارد و پیشامدهای A و B از این فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

A = {(پ,پ,پ) و (د,پ,پ) و (د,د,د) و (پ,د,د)}

B = {(پ,د,د) و (د,پ,د) و (پ,د,د)}

مثال ۲: یک تاس و یک سکّه را با هم می‌اندازیم و پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که تاس عدد زوج و سکّه «رو» بیاید و پیشامد B را به این صورت تعریف می‌کنیم که سکّه «پشت» و تاس عدد کمتر از ۴ باشد، A و B را مشخص کنید.

حل: می‌دانیم فضای نمونه‌ای این مثال دارای $۲\times۶ = ۱۲$ عضو است و داریم:

A = {(رو,۲) و (رو,۴) و (رو,۶)}

B = {(پشت,۱) و (پشت,۲) و (پشت,۳)}

مثال ۳: دو تاس را با هم می‌اندازیم و پیشامدهای A و B را به‌ترتیب «مجموع اعداد دو تاس برابر ۷» و «عدد رو شده حداقل یک تاس برابر ۶» تعریف می‌کنیم، پیشامدهای A و B را معلوم کنید.

حل: فضای نمونه‌ای انداختن دو تاس دارای $۶\times۶ = ۳۶$ عضو است و داریم:

$$A = \{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\} \to n(A) = ۶$$

$$B = \{(۱,۶),(۲,۶),\ldots,(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),\ldots,(۶,۵),(۶,۶)\} \to n(A) = ۱۱$$

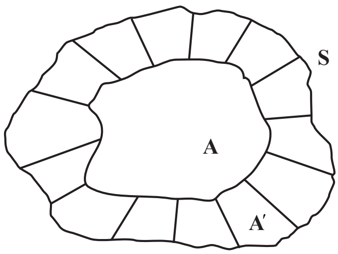
اعمال روی پیشامدها

دیدیم که پیشامدهای یک فضای نمونه‌ای زیرمجموعه‌هایی مانند A و B و C و... از آن فضا

هستند و بنابراین اعمالی چون اجتماع ($\cup$)، اشتراک ($\cap$) یا تفاضل (−) بین مجموعه‌ها و نیز متمم یک مجموعه مانند A یعنی A' در پیشامدها نیز قابل تعریف و تعبیر است که به ذکر آن‌ها می‌پردازیم :

متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی و $A \subseteq S$ پیشامدی در این فضای نمونه‌ای باشد، متمم پیشامد A را با A' نمایش می‌دهیم و تعبیر آن چنین است که «پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.»

در واقع دو پیشامد A و A' کلِ فضای نمونه‌ای S را تشکیل می‌دهند. به شکل زیر توجه کنید.

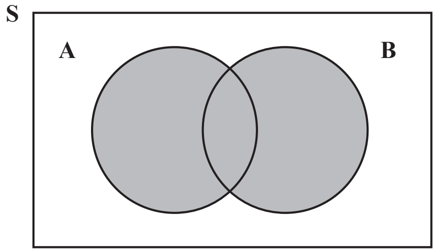


تذکر: با توجه به تعریف متمم یک پیشامد نتایج زیر حاصل می‌شوند :

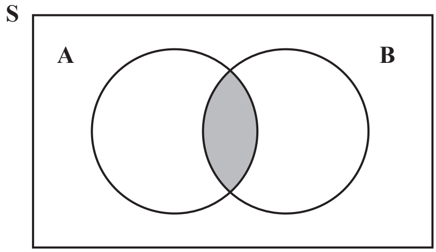
الف) $A \cup A' = S$

ب) $A \cap A' = \varnothing$

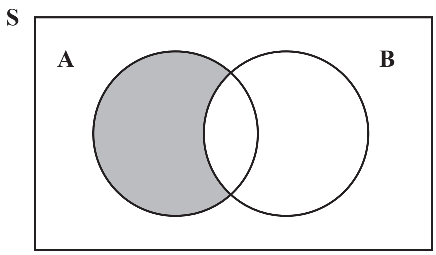
ج) $n(A') = n(S) - n(A)$



اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \cup B$ مشخص شده است.



اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \cap B$ مشخص شده است.



تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد A-B زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. در شکل مقابل پیشامد A-B مشخص شده است.

پیشامدهای ناسازگار: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \varnothing$ در این صورت آن‌ها را دو پیشامد **ناسازگار** می‌نامیم. درواقع اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند با هم رخ نمی‌دهند.

مثال: دو تاس را با هم می‌اندازیم (یا تاسی را دو بار می‌اندازیم) و پیشامدهای A و B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A = پیشامد آن که عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ باشد

B = پیشامد آن که مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد

C = پیشامد آن که اعداد رو شده متمایز باشند

هر یک از پیشامدهای $A \cup B$ و $A \cap B$ و C' و A-B و A-C را مشخص کنید.

حل: ابتدا مجموعه‌های A و B و C را مشخص می‌کنیم.

$$A = \{(۴,۱),(۴,۲),\dots,(۴,۶)\} \rightarrow n(A) = ۶$$

$$B = \{(۱,۶),(۶,۱),(۵,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳)\} \rightarrow n(B) = ۶$$

$$C = \{(۲,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۲,۴),(۴,۲),\dots,(۵,۶),(۶,۵)\} \rightarrow n(C) = ۳۰$$

C' = پیشامد آن که اعداد رو شدهٔ دو تاس با هم برابر باشند

$$C' = \{(۱,۱),(۲,۲),\dots,(۶,۶)\}$$

$$A \cup B = \{(۱,۶),(۶,۱),(۵,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶)\}$$

($A \cup B$ یعنی عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ یا مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد)

$$A \cap B = \{(۴,۳)\}$$

($A \cap B$ یعنی عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ و مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد)

$$A - B = \{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶)\}$$

(A-B یعنی عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ باشد و مجموع اعداد دو تاس ۷ نباشد)

$$A - C = A \cap C' = \{(۴,۴)\}$$

(A-C یعنی عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ باشد و اعداد دو تاس متمایز نباشند)

حالا می‌خواهیم امکان به‌وقوع پیوستن هر پیشامد تصادفی مانند A در یک فضای نمونه‌ای چون S را اندازه‌گیری کنیم یا اصطلاحاً احتمال وقوع هر پیشامد را محاسبه کنیم.

فرض کنید در یک جعبه ۴ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی (۴ مهره قرمز با شماره‌های ۱ تا ۴ و ۲ مهره

آبی با شماره‌های ۱ و ۲) موجود است. اگر به تصادف ۱ مهره از این جعبه خارج کنیم با توجه به‌این‌که مهره‌های قرمز در جعبه بیشتر از مهره‌های آبی هستند، واضح است که شانس خارج شدنِ مهرهٔ قرمز از شانس خارج شدن مهرهٔ آبی بیشتر باشد، حال اگر A را پیشامد خارج شدن مهرهٔ قرمز و B را پیشامد خارج شدن مهرهٔ آبی تعریف کنیم و کسر حاصل از تقسیم تعداد مهره‌های آبی به تعداد کل مهره‌ها را P(A) و کسر حاصل از تقسیم مهره‌های قرمز به تعداد کلّ مهره‌های جعبه را P(B) بنامیم، خواهیم داشت :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $P(A)=۲P(B)$ و این‌که شانسِ رخداد پیشامد A دو برابر شانسِ رخداد پیشامد B باشد، با توجه به دو برابر بودن تعداد مهره‌های قرمز نسبت به مهره‌های آبی از قبل پیش‌بینی می‌شد، یعنی تقسیم تعداد حالت‌های مطلوب بر تعداد کل حالت‌های ممکن ($\frac{n(A)}{n(S)}$) عددی را به‌دست می‌دهد که با انتظار و توقع ما مطابقت دارد و همین فرمول $\left(P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\right)$ در فضاهای قابل شمارش[1] به‌عنوان فرمول احتمال به‌کار می‌رود.

احتمال رخداد پیشامد A

احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با P(A) نشان می‌دهیم و برای محاسبهٔ P(A) کافی است تعداد اعضای A یعنی n(A) را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یعنی n(S) تقسیم کنیم. عدد حاصل یعنی P(A) عددی حقیقی است که شانسِ رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کند.

$$\text{احتمال رخداد پیشامد A در فضای S}=P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

از آن‌جا که A پیشامدی در فضای S است، طبق تعریف داریم :

$$A\subseteq S\Rightarrow ۰\le n(A)\le n(S)$$

اگر طرفین نامساوی‌های اخیر را n(S) تقسیم کنیم خواهیم داشت،

$$\frac{۰}{n(S)}\le\frac{n(A)}{n(S)}\le\frac{n(S)}{n(S)}\Rightarrow ۰\le P(A)\le ۱$$

۱ــ فضای قابل شمارش به فضا یا مجموعه‌ای گفته می‌شود که تعداد اعضای آن را با شمارش به‌دست می‌آوریم.

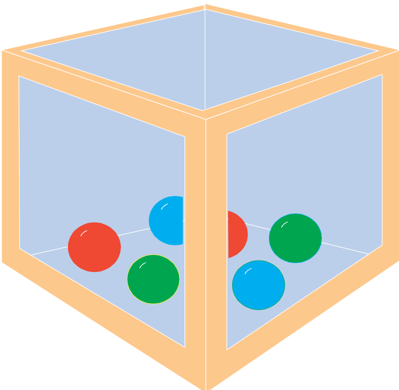
هم‌چنین با توجه به تعریف احتمال داریم :

$$P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{۰}{n(S)}=۰$$

$$P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=۱$$

توجه دارید که هر چقدر تعداد اعضای A بیشتر باشد، کسرِ $\frac{n(A)}{n(S)}$ بزرگتر و به عدد یک نزدیک‌تر بوده و اصطلاحاً می‌گوییم احتمال رخداد پیشامد A بیشتر است.

تمرین



فرض کنید در یک جعبه ۱۲ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ سبز وجود داشته باشد. اگر از این جعبه ۱ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آبی بودن، قرمز بودن و سبز بودنِ مهرهٔ خارج شده را محاسبه کرده و اعداد حاصل را با حدسی که قبل از محاسبهٔ این احتمالات، زده بودید، مقایسه کنید.

قانون جمع احتمالات

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

که تساوی فوق از تقسیم طرفین تساوی $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ (که به اصل شمول معروف است)، بر $n(S)$ به‌دست می‌آید، و به آن قانون جمع احتمالات گفته می‌شود.

احتمال پیشامد متمّم: اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S و A' متمم آن باشد، در این‌صورت :

$$P(A\cup A')=P(A)+P(A')-P(A\cap A')$$

$$\Rightarrow P(S)=P(A)+P(A')-P(\varnothing)$$

$$\Rightarrow ۱=P(A)+P(A')\Rightarrow P(A)=۱-P(A')$$

احتمال پیشامدهای ناسازگار

قبلاً گفتیم که اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این‌صورت A و B را دو پیشامد **ناسازگار** و اگر $A\cap B\neq\varnothing$ ، آن‌ها را **سازگار** می‌نامیم، به نکتهٔ زیر توجه کنید.

نکته: با توجه به قانون جمع احتمالات، اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، چون $A\cap B=\varnothing$ و $P(\varnothing)=۰$ بنابراین می‌توان نوشت :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

درحالت کلّی‌تر، اگر $A_۱,A_۲,\ldots,A_n$ پیشامدهایی دو به دو ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند نیز داریم :

$$P(A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_n)=P(A_۱)+P(A_۲)+\cdots+P(A_n)$$

مثال ۱: وقتی تاسی را می‌اندازیم، اگر پیشامد A را «رو شدنِ عدد زوج» و پیشامد B را «رو شدن عدد فرد» و C را پیشامد «رو شدن عدد اول» تعریف کنیم، یعنی $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۱,۳,۵\}$ و $C=\{۲,۳,۵\}$ در این‌صورت A و B ناسازگارند ولی A و C سازگار و B و C نیز سازگارند.

مثال ۲: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان این خانواده را مشخص کرده و احتمال آن را محاسبه کنید که : الف) حداقل ۲ فرزند این خانواده دختر باشند. ب) فقط ۱ فرزند در این خانواده پسر باشد.

حل: فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر است :

S= {(د,د,پ) و(د,پ,د) و(پ,د,د) و(د,د,د) و(پ,پ,د) و(پ,د,پ) و(د,پ,پ) و(پ,پ,پ)}

$$n(S)=۲\times۲\times۲=۸$$

الف) اگر A را پیشامد «حداقل ۲ فرزند دختر» تعریف کنیم (یا دو دختر یا هر سه دختر) در این‌صورت :

S= {(د,د,د) و(د,د,پ) و(د,پ,د) و(پ,د,د)}

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

ب) اگر C را پیشامد «فقط ۱ پسر» تعریف کنیم، در این‌صورت :

$$C = \{(\text{پ,د,د}) \text{ و} (\text{د,پ,د}) \text{ و} (\text{د,د,پ})\} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

مثال ۳: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ زرد می‌باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) هر سه سبز باشند ب) هر سه همرنگ باشند ج) فقط ۲ مهره آبی باشد د) حداقل ۱ مهره آبی باشد هـ) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

حل: فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۱۱ مهرهٔ موجود در جعبه است که تعداد اعضای آن برابر است با :

$$n(S) = \binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱!}{(۱۱-۳)! \times ۳!} = ۱۶۵$$

الف) A : پیشامد هر سه سبز $\Rightarrow n(A) = \binom{۵}{۳} = ۱۰ \Rightarrow P(A) = \frac{۱۰}{۱۶۵} = \frac{۲}{۳۳}$

ب) B: پیشامد هر سه همرنگ (یا هر سه سبز یا هر سه آبی)

$$\Rightarrow n(B) = \binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳} = ۱۴ \Rightarrow P(B) = \frac{۱۴}{۱۶۵}$$

ج) C : پیشامد فقط ۲ مهره آبی (۲ مهره آبی و ۱ مهره غیرآبی)

$$\Rightarrow n(C) = \binom{۴}{۲} \times \binom{۷}{۱} = ۴۲ \Rightarrow P(C) = \frac{۴۲}{۱۶۵} = \frac{۱۴}{۵۵}$$

د) D: پیشامد حداقل ۱ مهره آبی (هر سه آبی یا دو آبی و یک غیرآبی یا یک آبی و دو غیرآبی)

$$\Rightarrow n(D) = \binom{۴}{۱} \times \binom{۷}{۲} + \binom{۴}{۲} \times \binom{۷}{۱} + \binom{۴}{۳} = ۴ \times ۲۱ + ۶ \times ۷ + ۴$$

$$\Rightarrow n(D) = ۱۳۰ \quad \Rightarrow P(D) = \frac{۱۳۰}{۱۶۵} = \frac{۲۶}{۳۳}$$

روش ساده‌تر برای حل قسمت (د) آن است که از پیشامد متمم استفاده کنیم. متمّم پیشامد «حداقل ۱ مهره آبی» یعنی D' ، پیشامد «هیچ مهره‌ای آبی» است که معنی آن هر سه غیرآبی بوده و

$$n(D') = \binom{۷}{۳} = ۳۵$$

$$P(D') = \frac{۳۵}{۱۶۵} = \frac{۷}{۳۳} \quad , \quad P(D) = ۱ - P(D') = ۱ - \frac{۷}{۳۳} = \frac{۲۶}{۳۳}$$

هـ) E : پیشامد «حداکثر ۲ مهره سبز»

E' : پیشامد «هر سه مهره سبز» $\Rightarrow n(E')=\binom{۵}{۳}=۱۰$

$$P(E')=\frac{۱۰}{۱۶۵}=\frac{۲}{۳۳}\ ,\ P(E)=۱-P(E')=۱-\frac{۲}{۳۳}=\frac{۳۱}{۳۳}$$

مثال ۴: دو تاس را با هم می‌اندازیم، مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) اعداد رو شدهٔ هر دو تاس زوج باشند. ب) اعداد رو شدهٔ هر دو تاس مثل هم باشند. ج) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۸ یا اعداد رو شدهٔ هر دو تاس زوج باشند. د) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس کمتر از ۱۰ باشد. هـ) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس مضرب ۴ باشد.

حل: با توجه به این‌که دو تاس را همواره دو شیئی متمایز (تاس آبی و تاس قرمز) درنظر می‌گیریم، فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی دارای $۳۶=۶\times۶$ عضو است.

الف) $A=\{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\}$

$$n(A)=۹\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

ب) $B=\{(۱,۱),(۲,۲),\ldots,(۶,۶)\}\Rightarrow n(B)=۶\ ,\ P(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

ج)
C : پیشامد مجموع دو تاس ۸ $\Rightarrow C=\{(۲,۶),(۶,۲),(۵,۳),(۳,۵),(۴,۴)\}$

D : پیشامد هر دو تاس زوج $\Rightarrow D=\{(۲,۲),\ldots,(۶,۴),(۶,۶)\}$

پیشامد «مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۸ یا اعداد رو شدهٔ هر دو تاس زوج» یعنی پیشامد $C\cup D$ و طبق قانون جمع احتمالات داریم :

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)=\frac{۵}{۳۶}+\frac{۹}{۳۶}-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱۱}{۳۶}$$

$$\left(C\cap D=\{(۲,۶),(۶,۲),(۴,۴)\}\right)$$

د) E : ۱۰ مجموع دو تاس کمتر از

E' : ۱۰ مجموع دو تاس بزرگتر یا مساوی

$$E'=\{(۶,۶),(۶,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۴,۶),(۵,۵)\}\Rightarrow P(E')=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

و) $P(E)=۱-P(E')=۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$

هـ) F : ۴ پیشامد مجموع دو تاس مضرب

در بین اعداد ۲ تا ۱۲ که مجموع دو تاس می‌تواند هریک از این اعداد باشد، مضارب ۴ عبارتند از ۴ و ۸ و ۱۲ بنابراین :

$$F = \{(۲,۲),(۱,۳),(۳,۱),(۲,۶),(۶,۲),(۵,۳),(۳,۵),(۴,۴),(۶,۶)\}$$

$$n(F) = ۹ \ , \ P(F) = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

تمرین

۱ــ کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی است

الف) انداختن یک تاس که روی هر ۶ وجه آن عدد ۱ حک شده باشد.

ب) انداختن دو تاس سالم با هم

ج) به دنیا آمدنِ یک نوزاد در ماه خرداد

۲ــ هر یک از اعداد فرد و طبیعی کوچک‌تر از ۱۸ را روی یک کارت نوشته و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم ؛

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت بر ۳ بخش‌پذیر باشد را مشخص کنید.

ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول یا زوج باشد را مشخص کنید.

۳ــ خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوب است :

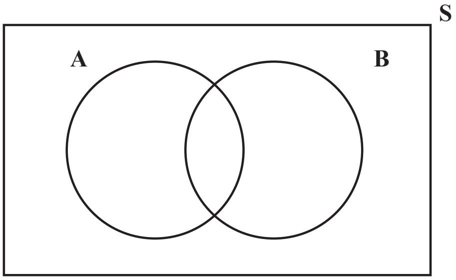
الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

ب) پیشامد A که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

ج) پیشامد B که در آن حداقل یک فرزند پسر باشد.

د) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیشتر باشد.

هـ) هر یک از پیشامدهای $A \cap B$ و A-C و B' را مشخص کنید، آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟



۴ــ با توجه به شکل مقابل پیشامد $(A-B) \cup (B-A)$ را علامت بزنید. (این پیشامد را «فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد» تعریف می‌کنیم.)

۵ــ تمام اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۵ می‌توان ساخت، روی کارت‌های متمایزی نوشته و در یک کیسه قرار می‌دهیم و سپس یکی از این کارت‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم مطلوب است :

الف) فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۴ باشد.

ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، کوچک‌تر از ۴۰ باشد.

د) پیشامدهای $(A\cup B)$ و $(A\cap B)$

۶ــ در تمرین ۵ مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

ب) عدد روی کارت مضرب ۳ یا مضرب ۴ باشد.

ج) عدد روی کارت مضرب ۳ باشد و مضرب ۴ نباشد.

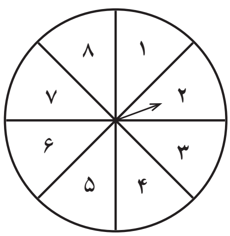
۷ــ از جعبه‌ای که حاوی ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است، ۳ سیب به تصادف برمی‌داریم، مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) هر سه سیب سالم باشند.

ب) دو سیب، سالم و یکی خراب باشد.

ج) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های خراب بیشتر باشد.

۸ــ عقربه‌ای مطابق شکل زیر و به تصادف پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیهٔ شکل می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد :



الف) عقربه عددی اول را نشان دهد.

ب) عقربه عددی اول یا فرد را نشان دهد.

ج) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.

پیشامدهای مستقل

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S بوده و رخداد و یا عدم رخداد هریک تأثیری در رخداد دیگری نداشته باشد، این دو پیشامد را مستقل از هم می‌نامیم. به‌عنوان مثال به دنیا آمدن فرزندان در یک خانواده پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند و یا انداختن دو تاس آبی و قرمز را درنظر بگیرید و پیشامد A را رو شدنِ عدد زوج در تاس آبی و پیشامد B را رو شدنِ عدد اول در تاسِ قرمز فرض کنید، در این‌صورت دو پیشامد A و B مستقل از هم می‌باشند زیرا A رخ بدهد یا رخ ندهد پیشامد B می‌تواند رخ دهد.

قانون ضرب احتمالات برای دو پیشامد مستقل

اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ و برعکس اگر تساوی اخیر برقرار باشد دو پیشامد A و B مستقل خواهند بود. توجه داشته باشید که قانون ضرب احتمالات برای هر چند پیشامد که دو به دو مستقل باشند برقرار است.

مثال ۱: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است، مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) فرزندان، به‌صورت یک در میان پسر و دختر (یا دختر و پسر) باشند.

ب) هر ۳ فرزند پسر باشند.

ج) فرزند سوم دختر باشد.

حل: جنسیت فرزندان در یک خانواده پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند، بنابراین می‌توان برای حل این مثال از قانون ضرب احتمالات استفاده کرد :

الف) $A=\{$(د,پ,د) و (پ,د,پ)$\}$

روش اول: $n(S)=۲^۳=۸\ ,\ n(A)=۲\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

روش دوم : $P(A)=P\{$(پ,د,پ)$\}+P\{$(د,پ,د)$\}$

$$\Rightarrow P(A)=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

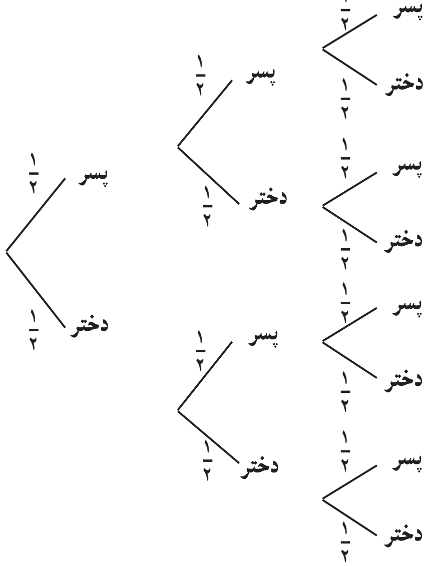
ب) B : پیشامد هر ۳ فرزند پسر $\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$

ج) C : پیشامد فرزند سوم دختر $\Rightarrow P(C)=\frac{۱}{۲}$

توجه دارید که پیشامد جنسیت فرزند سوم با جنسیت فرزندان قبل از خود مستقل است.

تمرین

به نمودار درختیِ این پدیده دقت کنید و جواب‌های سه قسمتِ این مثال را از روی نمودار به‌دست آورید.



مثال ۲: آزمایش‌های انجام شده روی دو شخص A و B نشان می‌دهد که احتمال بهبود شخص A پس از عمل جراحی پیوند کلیه ۸۰٪ و احتمال بهبود شخصِ B پس از عمل جراحی پیوند کلیه ۶۰٪ است. اگر این دو نفر تحت عمل پیوند کلیه قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو نفر سلامتی خود را به‌دست آورند.

ب) حداقل یکی از این دو نفر بهبود یابد.

حل: پیشامدهای بهبودی هریک از این دو نفر مستقل از هم می‌باشد بنابراین :

الف) C : پیشامد بهبودی هر دو نفر

$$P(C)=\frac{80}{100}\times\frac{60}{100}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$$ یا ۴۸٪

ب)
A_1 : پیشامد بهبودی شخص A

B_1 : پیشامد بهبودی شخص B

$$P(A_1\cup B_1)=P(A_1)+P(B_1)-P(A_1\cap B_1)$$

$$\Rightarrow P(A_1\cup B_1)=\frac{80}{100}+\frac{60}{100}-\frac{12}{25}=\frac{7}{5}-\frac{12}{25}=\frac{23}{25}$$ یا ۹۲٪

مثال ۳: احتمال این‌که شخصی گروه خونی A^+ داشته باشد ۲۵٪ است و احتمال این‌که او ناراحتی قلبی داشته باشد ۲۰٪ است و احتمال این‌که گروه خونی او A^+ یا ناراحتی قلبی داشته باشد ۴۰٪ است چقدر احتمال دارد این شخص هم ناراحتی قلبی داشته باشد و هم گروه خونی او A^+ باشد؟

حل:

روش اول: طبق قانون جمع احتمالات اگر A و B را به‌ترتیب داشتنِ گروه خونی A^+ و داشتن ناراحتی قلبی تعریف کنیم، در این‌صورت داریم :

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$

$$\Rightarrow \frac{۴۰}{۱۰۰}=\frac{۲۵}{۱۰۰}+\frac{۲۰}{۱۰۰}-P(A\bigcap B)\Rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{۵}{۱۰۰}$$

روش دوم: دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، بنابراین :

$$P(A\bigcap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۲۵}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۵۰۰}{۱۰۰۰۰}=\frac{۵}{۱۰۰}$$

مثال ۴ : چقدر احتمال دارد در یک تیم والیبال (تیم ۶ نفره) الف) همه در ماه خرداد متولد شده باشند؟ ب) هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند؟

حل: الف) احتمال به دنیا آمدنِ یک نفر در یک ماه خاصّ مانند خرداد، برابر است با $\frac{۱}{۱۲}$ و چون متولد شدن افراد در ماه‌های سال پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند در این‌صورت احتمال به دنیا آمدن هر ۶ نفر در ماه خرداد طبق قانون ضرب احتمالات، برابر است با :

$$P(A)=\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}=(\frac{۱}{۱۲})^{۶}$$

ب) اگر فرض کنیم B پیشامد آن باشد که هیچ دو نفری از این ۶ نفر، ماه تولدِ یکسان نداشته باشد، در این‌صورت برای نفر اول از این ۶ نفر، هر ۱۲ ماه مطلوب است و نفر دوم در هر ماهی به‌جز ماه تولد نفر اول می‌تواند متولد شود و نفر سوم در هر ماهی به‌جز ماه تولدِ دو نفر قبل و... و برای نفر ششم هر ماه، جز ماه تولدِ ۵ نفر قبل، مطلوب است بنابراین :

$$P(B)=\frac{۱۲}{۱۲}\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۱۰}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۳۸۵}{۱۷۲۸}$$

تمرین: چقدر احتمال دارد در یک کلاس ۲۵ نفری روز تولد هیچ دو نفری یکسان نباشد؟

مثال ۵: ۶ نفر که دو نفر آن‌ها برادر یکدیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند، چقدر احتمال دارد، الف) دو برادر کنار هم قرار گرفته باشند ب) دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند.

حل: فضای نمونه‌ای عبارت است از کل حالت‌هایی که ۶ نفر می‌توانند در یک ردیف، کنار هم قرار بگیرند که این تعداد حالت برابر است با $n(S)=۶!=۷۲۰$ حال اگر پیشامد کنار هم قرار گرفتن دو برادر را A و پیشامد واقع شدنِ دو برادر در دو طرفِ صف را B فرض کنیم خواهیم داشت :

الف) دو برادر را کنار هم قرار داده و ۱ نفر فرض می‌کنیم و با ۴ نفر دیگر ۵ نفر می‌شوند که به !۵ طریق کنار هم قرار می‌گیرند و خودِ برادرها نیز به !۲ طریق می‌توانند در عین حال که کنار هم هستند با هم جابه‌جا شوند، پس :

$$n(A)=۵!\times ۲!$$

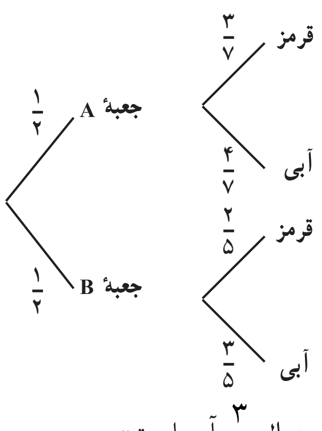
$$\Rightarrow P(A)=\frac{۵!\times ۲!}{۶!}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

ب) اگر ۶ جایگاه برای این شش نفر درنظر بگیریم در جایگاه اول از سمت چپ هریک از دو برادر می‌توانند قرار بگیرند و جایگاه ششم برادر دیگر و ۴ جایگاه بین آن‌ها توسط ۴ نفر دیگر به !۴ طریقِ ممکن می‌تواند تغییر کند، لذا :

$$n(B)=۲\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱\times ۱=۲\times ۴!$$

$$P(B)=\frac{۲\times ۴!}{۶!}=\frac{۲}{۶\times ۵}=\frac{۱}{۱۵}$$

مثال ۶: در جعبهٔ A سه مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و در جعبهٔ B، ۲ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد، یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و ۱ مهره به تصادف از آن جعبه خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟



حل: برای حل این‌گونه مسائل که از ابتدا چند راه انتخاب برای ما وجود داشته باشد و از هر راهی که حرکت کنیم رخداد پیشامد مزبور (آبی بودنِ مهره) ممکن باشد، از نمودار درختی می‌توانیم استفاده کنیم :

درواقع احتمالِ آبی بودنِ مهرهٔ انتخابی معادل است با این‌که «یا به احتمال $\frac{۱}{۲}$ جعبهٔ A انتخاب و مهرهٔ انتخاب شده به احتمال $\frac{۴}{۷}$ آبی است و یا به احتمال $\frac{۱}{۲}$ جعبهٔ B انتخاب و مهرهٔ انتخابی از آن به احتمال $\frac{۳}{۵}$ آبی است»

$$P(\text{آبی})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۴۱}{۷۰}$$

مثال ۷: تاسی را سه بار می‌اندازیم مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) هر سه عدد رو شده مثل هم باشند.

ب) هر سه عدد رو شده متمایز باشند. (هیچ دو عددی مثل هم نباشند)

ج) مجموع اعداد رو شدهٔ سه تاس بزرگ‌تر از ۱۶ باشد.

حل:

الف) $A = \{(۱,۱,۱),(۲,۲,۲),\ldots,(۶,۶,۶)\} \to n(A) = ۶, n(S) = ۶\times۶ = ۳۶$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۲۱۶} = \frac{۱}{۳۶}$$

ب) برای این‌که اعداد رو شدهٔ سه تاس متمایز باشند، تاس اول هر عددی می‌تواند باشد که برای آن ۶ حالت ممکن است و تاس دوم هر عددی به‌جز عدد رو شده در تاس اول می‌تواند باشد یعنی ۵ حالت دارد و برای تاس سوم هر عددی به‌جز دو عدد رو شده در تاس‌های اول و دوم یعنی ۴ حالت موجود است و لذا طبق اصل ضرب به $۱۲۰ = ۴\times۵\times۶$ طریق امکان دارد سه تاس متمایز باشند، بنابراین :

$$P(B) = \frac{۱۲۰}{۲۱۶} = \frac{۵}{۹}$$

ج) $C = \{(۶,۶,۶),(۶,۶,۵),(۶,۵,۶),(۵,۶,۶)\} \to n(C) = ۴$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{۴}{۲۱۶} = \frac{۱}{۵۴}$$

(مجموع اعداد رو شدهٔ سه تاس از عدد ۳ تا ۱۸ می‌تواند تغییر کند و مجموع اعداد رو شده بزرگ‌تر از ۱۶ یعنی مجموع دو تاس یا ۱۷ و یا ۱۸ باشد.)

مثال ۸: تاسی را دو بار می‌اندازیم و دو پیشامد A و B را در حالت‌های زیر تعریف می‌کنیم در هر حالت مستقل بودن یا نبودنِ دو پیشامد A و B را بررسی کنید :

الف) $\begin{cases} A: \text{پیشامد آن که عدد رو شدهٔ تاس اول ۵ باشد} \\ B: \text{پیشامد آن که مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۱۱ باشد} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} A: \text{پیشامد آن که عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ باشد} \\ B: \text{پیشامد آن که مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۷ باشد} \end{cases}$

حل: الف) با توجه به تعریف دو پیشامد A و B داریم :

$$A=\{(۵,۱),\ldots,(۵,۶)\}\rightarrow n(A)=۶\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$B=\{(۵,۶),(۶,۵)\}\rightarrow n(B)=۲\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$A\bigcap B=\{(۵,۶)\}\rightarrow n(A\bigcap B)=۱\Rightarrow P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۳۶}$$

و چون $P(A\bigcap B)\neq P(A)\times P(B)$ پس A و B مستقل از هم نیستند.

در این حالت توجه دارید که طبق تعریف نیز به همین نتیجه می‌رسیم زیرا اگر A رخ ندهد (عدم رخداد A) یعنی عدد رو شدهٔ تاس اول ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۶ بیاید، در ۴ حالتِ اول، پیشامد Bیعنی مجموع اعداد رو شده برابر ۱۱ نمی‌تواند رخ بدهد.

ب) در این قسمت نیز مشابه (الف) داریم :

$$P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\ ,\ \ P(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\quad B=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$$

$$A\bigcap B=\{(۴,۳)\}\quad ,\quad P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=P(A)\times P(B)$$

پس A و B مستقل از یکدیگر بوده و با توجه به تعریف نیز همین نتیجه به‌دست می‌آید زیرا اگر A رخ دهد، B می‌تواند رخ دهد و اگر A رخ ندهد (عدد رو شدهٔ تاس اول ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۶) بیاید در هر حالت B یعنی مجموع اعداد رو شده برابر ۷ می‌تواند رخ دهد.

تمرین

۱ــ یک تاس و یک سکّه را با هم می‌اندازیم اولاً فضای نمونه‌ای این پدیده را تشکیل دهید (مجموعهٔ S را مشخص کنید) و سپس احتمال آن را حساب کنید که عدد رو شدهٔ تاس عدد اول و سکه پشت بیاید.

۲ــ در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ سبز و ۲ مهرهٔ قرمز وجود دارد، سه مهره به تصادف و پی‌درپی و با جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهرهٔ اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ اگر این عمل را بدون جایگذاری انجام دهیم چقدر احتمال دارد مهرهٔ اول آبی و دومی سبز و سومی آبی باشد؟

۳ــ خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) ۲ فرزند این خانواده پسر باشد. ب) حداقل ۲ فرزند خانواده پسر باشد.

ج) تعداد فرزندان پسر بیشتر از تعداد فرزندان دختر باشد.

۴ـ ۵ نفر را درنظر می‌گیریم، چقدر احتمال دارد :

الف) هر ۵ نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند.

ب) هیچ دو نفری در یک روز از هفته متولد نشده باشند.

۵ـ احتمال آن که فرزندی در خانوادهٔ A با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود ۲۰٪ و احتمال آن که نوزادی در خانوادهٔ B با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود ۷۵٪ است. چقدر احتمال دارد حداقل یکی از این دو نوزاد با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شوند؟

(**راهنمایی:** این دو پیشامد مستقل از هم بوده و $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ است.)

۶ـ در کیسه‌ای ۳ مهرهٔ سیاه و ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشند.

ب) حداقل دو مهره همرنگ باشند.

ج) هیچ مهره‌ای قرمز نباشد.

۷ـ احتمال آن که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۶ و احتمال آن که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۷ است، چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو، تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند.

ب) حداقل یکی از آن‌ها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند.

۸ـ می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز کلاس دوم و ۷ دانش‌آموز کلاس سوم یک تیم ۳ نفره به‌تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد :

الف) هیچ دانش‌آموز کلاس دوم در تیم نباشد.

ب) تعداد دانش‌آموزان کلاس سوم در تیم انتخابی از تعداد دانش‌آموزان کلاس دوم بیشتر باشد.

۹ـ دو تاس را با هم می‌اندازیم، مطلوب است احتمال آن که :

الف) حاصلضرب اعداد رو شدهٔ دو تاس مضرب ۵ باشد.

ب) اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند.

ج) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۷ یا هر دو فرد باشند.

د) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس بزرگ‌تر از ۵ باشد.

هـ) هر دو تاس بزرگ‌تر از ۲ باشند. و) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس مضرب ۳ باشد.