فصل ۳

مشتق و کاربرد آن

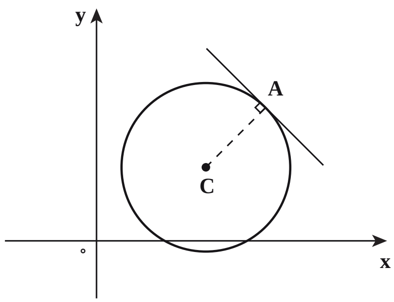
۳ـ۱ـ آهنگ تغییر و خط مماس

در این فصل به مطالعهٔ حساب دیفرانسیل که دربارهٔ تغییر یک کمیت به کمیتی دیگر است می‌پردازیم. مفهوم اصلی حساب دیفرانسیل، مشتق است که تعمیم سرعت و شیب خط مماس است که سال گذشته در حسابان آموزش داده شده است.

می‌دانید مسألهٔ پیدا کردن خط مماس بر منحنی و یافتن سرعت یک متحرک هردو منجر به یافتن یک نوع حد می‌شوند که این حد خاص را مشتق می‌نامند و خواهیم دید که می‌توان آن را در هر شاخه‌ای از علم ومهندسی به آهنگ تغییر تعبیر کرد.

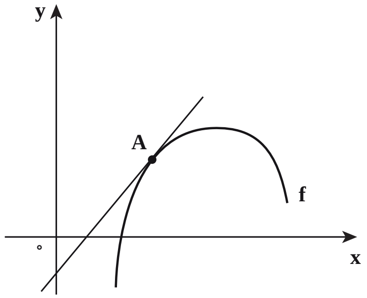
مسألهٔ خط مماس : وقتی می‌گوییم یک خط بر یک منحنی در یک نقطه مماس است به چه معنی است؟

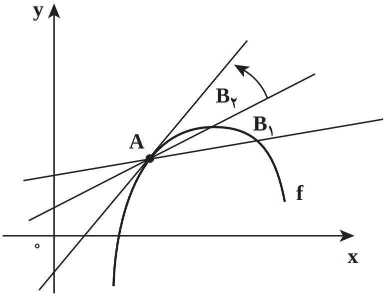
در دایره می‌توان خط مماس در نقطهٔ A را خط عمود بر خط شعاع در نقطه A بیان کرد (شکل ۳ــ۱).



شکل ۳ــ۱

ولی مسأله برای یک منحنی کلی مشکل‌تر است مثلاً، در شکل ۳ــ۲ قسمت (الف) خط مماس چگونه تعریف می‌شود؟





شکل ۳ــ۲

و امّا مسألهٔ یافتن خط مماس در نقطهٔ A به مسأله یافتن شیب خط مماس در A منجر می‌شود. این شیب را می‌توان با شیب خطی که از نقطهٔ A و نقطهٔ دیگری که از منحنی مثلاً $B_۱$، می‌گذرد تقریب زد (قسمت ب شکل ۳ــ۲) یک چنین خط را **خط قاطع** می‌نامیم.

هرگاه $A(a,f(a))$ نقطهٔ تماس و $B_۱(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$ نقطهٔ دیگری از نمودار f باشد، شیب خط قاطع که از دو نقطهٔ A و $B_۱$ می‌گذرد عبارت است از :

$$m_{AB_۱} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

طرف راست این تساوی را **خارج قسمت تفاضلی** می‌نامیم. Δx را تغییر x و صورت کسر $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$ را تغییر y می‌نامیم.

زیبایی این روند در آن است که با انتخاب دنباله‌ای از نقاط که به نقطهٔ تماس نزدیک می‌شوند (قسمت ب شکل ۳ــ۲)، می‌توان تقریبات دقیق‌تری به شیب خط مماس به‌دست آورد.

تعریف خط مماس: اگر f بر بازهٔ بازی شامل a تعریف شده و حد زیر

$$\lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = m$$

موجود باشد، آنگاه خطی که از نقطهٔ $(a,f(a))$ گذشته و به شیب m می‌باشد، خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(a,f(a))$ نامیده می‌شود.

اغلب شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(a,f(a))$ را شیب نمودار f در $x=a$ می‌گوییم.

مثال: معادله خط مماس بر نمودار $f(x)=x^{۲}$ را در نقطهٔ $A(۱,۱)$ پیدا کنید.

حل:

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{(۱+\Delta x)^{۲}-۱}{\Delta x}$$

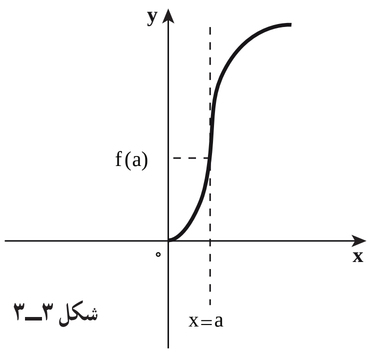
شیب خط مماس
$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x+۲)}{\cancel{\Delta x}}=۲$$

بنابراین معادله خط مماس می‌شود :

$$y-۱=۲(x-۱) \quad \text{یا} \quad y=۲x-۱$$

یادداشت : تعریف ما از خط مماس بر یک نمودار **خط مماس قائم** را در بر نمی‌گیرد.
برای خطوط مماس قائم تعریف زیر را می‌آوریم.

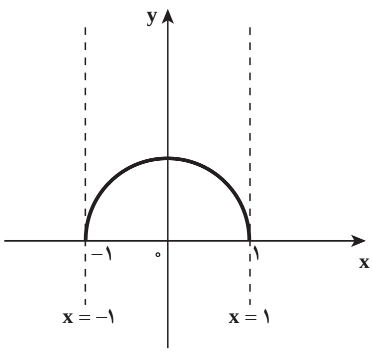
اگر f در a پیوسته بوده و $\lim_{\Delta x\to ۰}\left|\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right|=+\infty$ ، آنگاه **خط** $x=a$ که از $(a,f(a))$ می‌گذرد، **خط مماس قائم** بر نمودار f است (شکل ۳ـ۳ را ببینید).



شکل ۳ـ۳

یادداشت : اگر دامنهٔ f بازهٔ بسته $[c,d]$ باشد، آنگاه تعریف خط مماس قائم را با توجه به پیوستگی f در نقاط انتهایی c و d طوری تعمیم می‌دهیم که نقاط انتهایی را در بر گیرد.

به‌عنوان مثال، خطوط $x=\pm ۱$، خطوط مماس قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ هستند. (شکل ۳ـ۴)



شکل ۳ـ۴

تمرین در کلاس

نشان دهید خط $x=۱$، مماس قائم بر منحنی $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ می‌باشد.

۳ـ۲ـ مشتق تابع

همان‌طور که گفته شد و نیز در حسابان دیده اید، برای پیدا کردن شیب خط مماس و سرعت یک متحرک به یک نوع از حد برمی‌خوریم. در حقیقت، حدهایی به صورت

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

هنگام محاسبه آهنگ تغییر در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی نظیر سرعت واکنش در شیمی یا سرعت ذره در فیزیک و یا هزینه نهایی در اقتصاد پیش می‌آیند.

چون به این نوع از حد، بسیار زیاد برمی‌خوریم، به این نوع حد نام خاصی داده‌اند و برای آن از نمادگذاری خاصی استفاده می‌کنند.

تعریف: فرض کنید a نقطه درونی از دامنه f است. در این صورت مشتق تابع f در $x=a$ که آن را به $f'(a)$ نشان می‌دهیم، برابر است با

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

اگر فرض کنیم $x=a+\Delta x$ آنگاه $\Delta x=x-a$

بدیهی است که وقتی Δx به صفر میل کند، x هم به a میل می‌کند.

بنابراین

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

فرایند یافتن مشتق یک تابع **مشتق‌گیری** نام دارد. گوییم تابع f در x مشتق‌پذیر است. اگر مشتق آن در x موجود باشد و بر بازهٔ باز I مشتق‌پذیر است اگر در هر نقطه از این بازه مشتق‌پذیر باشد.

مثال: مشتق تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^2+x+1$ را به‌وسیلهٔ فرایند حد در $(x,f(x))$ بیابید.

حل: توجه داشته باشیم که x ضمن حدگیری (وقتی $\Delta x \longrightarrow 0$) ثابت گرفته می‌شود. بنابراین

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+x+\Delta x+1-(x^2+x+1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(\Delta x+2x+1)}{\Delta x}$$

$$=2x+1$$

توضیح اینکه به‌ازای هر $x\in D_f$ ، $f'(x)$ شیب خط مماس بر منحنی f است.

تمرین در کلاس

$f'(x)$ را برای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ به وسیلهٔ فرایند حد به‌ازای $x>0$ بیابید و با استفاده از نتیجه به‌دست آمده، شیب خط مماس در نقطهٔ $(1,1)$ را به‌دست آورید.

مسائل

۱ــ معادلات خط‌های مماس و قائم بر منحنی $y=\sqrt{x}$ را در نقطهٔ $(1,1)$ بیابید. (با محاسبه شیب مماس به کمک تعریف)

۲ــ نقاطی از منحنی $y=\frac{1}{x}$ را که در آنها خط مماس بر خط $y=2x$ عمود است بیابید. (با محاسبه شیب مماس به کمک تعریف)

۳ــ آیا تابع‌های زیر در نقطهٔ مشخص شده خط مماس دارند؟
اگر پاسخ مثبت است معادلهٔ خط مماس را بیابید.

الف) $f(x)=\sin x$ در $x=0$

ب) $g(x)=|\sin x|$ در $x=0$

۴ــ آیا تابع‌های زیر در نقطهٔ مشخص‌شده خط مماس دارند؟

اگر پاسخ مثبت است معادلهٔ خط مماس را بیابید.

الف) $f(x)=|x|$ در $x=۱$

ب) $g(x)=|x^۲-۱|$ در $x=۱$

پ) $e(x)=\sqrt[۳]{x}$ در $x=۰$

ت) $t(x)=x\,sgn(x)$ در $x=۰$

راهنمایی : ($sgn(x)=\begin{cases}-۱ & , x<۰\\ ۰ & , x=۰\\ ۱ & , x>۰\end{cases}$ تابع علامت)

۳ـ۳ـ آهنگ تغییر

در این بخش چند مثال برای نمایش و تعبیر تغییرات و آهنگ تغییر پدیده‌های دنیای پیرامون می‌آوریم.

طبیعی است که مانند سرعت یک شیء متحرک، تغییر را وابسته به زمان تلقی کنیم، ولی لزومی ندارد که خود را تا این اندازه مقید سازیم. تغییر نسبت به متغیرهایی غیر از زمان را نیز می‌توان به همان ترتیب مورد بررسی قرار داد. مثلاً یک پزشک می‌خواهد بداند چه تغییرات کوچکی در مقدار دارو می‌تواند واکنش بدن را به آن دارو برانگیزد، و یا اقتصاددانی می خواهد نحوهٔ تغییر سرمایه‌گذاری خارجی در کشور معینی را نسبت به نوسانات موجود در نرخ‌های بهرهٔ رایج در آن کشور مورد مطالعه قرار دهد. همهٔ این مسائل را می‌توان برحسب آهنگ تغییر یک تابع نسبت به یک متغیر فرمول‌بندی کرد.

مثال : فرض کنیم $s=f(t)=t^۳-۵t^۲+۶t$ معادله حرکت (رابطهٔ بین مکان و زمان) ذره‌ای باشد که روی خطی راست حرکت می کند و مکان ذره در زمان‌های $t=۱$ و $t=۱+\Delta t$ مشخص است در این صورت اندازه جابجایی این ذره برابر است با

$$\Delta S=f(۱+\Delta t)-f(۱)=\Delta t(\Delta t^۲-۲\Delta t-۱)$$

و در بازهٔ زمانی $[۱,۱+\Delta t]$، از تقسیم اندازه جابجایی بر مدّت جابجایی (Δt)

آهنگ متوسط تغییر مکان ذره به دست می‌آید، که آن را عموماً سرعت متوسط ذره در فاصله زمانی $t=۱$ تا $t=۱+\Delta t$ نیز می‌نامند، یعنی

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\Delta t^۲-۲\Delta t-۱$$

هرچه Δt کوچکتر شود این سرعت متوسط به سرعت ذره در حول و حوش لحظه $t=۱$ نزدیکتر می‌گردد که در این حالت آن را سرعت لحظه‌ای می‌نامند، در واقع سرعت لحظه‌ای وقتی است که Δt به صفر میل کند، یعنی

$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } t=۱ = \underset{\Delta t \to ۰}{\text{حد}} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

بدین ترتیب سرعت لحظه‌ای را **آهنگ لحظه‌ای** تغییر مکان ذره در لحظه $t=۱$ نیز می‌نامند و با استفاده از نمادگذاری ریاضی به شکل زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

براساس مثال بالا و این نمادگذاری می‌توان ایده اصلی این بخش را معرفی کرد.

تعریف :

الف) **آهنگ متوسط تغییر** تابع f نسبت به x روی بازه $[a, a+\Delta x]$ عبارت است از

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

ب) **آهنگ آنی تغییر** تابع f نسبت به x در $x=a$ عبارت است از

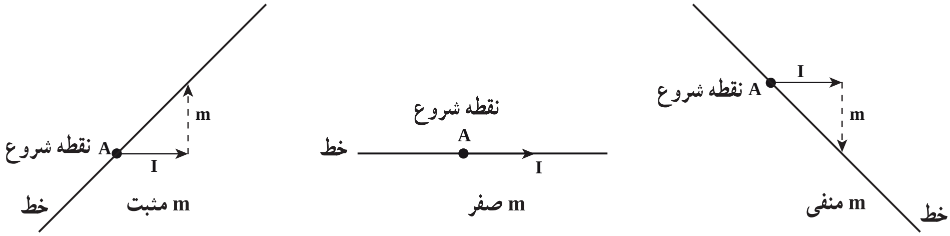
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

مشروط بر اینکه این حد وجود داشته باشد.

برحسب قرارداد وقتی متغیر x بیانگر زمان باشد به جای کلمه «آنی» واژه «**لحظه‌ای**» را به‌کار می‌بریم و اغلب با حذف واژه «آنی» و یا «لحظه‌ای» وقتی می‌گوییم **آهنگ تغییر**، مقصودمان آهنگ آنی یا لحظه‌ای تغییر است.

ویژگی ضریب زاویه یا شیب یک خط : اگر از نقطه‌ای بر خطی با ضریب زاویهٔ m، یک واحد به سمت راست حرکت کنیم، در این صورت باید m واحد در جهت محور y حرکت نماییم تا به

روی خط باز گردیم. (شکل ۳ـ۵)



شکل ۳ـ۵

بنابراین می‌توانیم شیب خط را این طور تعریف کنیم :

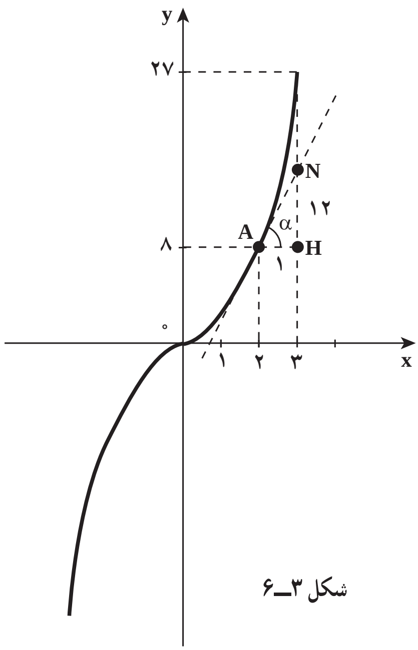
افزایش یا کاهش عرض نقطه شروع (A) را وقتی که طول آن را یک واحد در جهت مثبت محور x افزایش دهیم، **شیب خط** می‌نامیم.

رابطه بین آهنگ تغییر و مسأله مماس : می‌دانیم آهنگ تغییر تابع f با ضابطه $f(x)=x^۳$ وقتی که $x=۲$ است برابر است با

$$f'(x)=۳x^۲$$

$$f'(۲)=۱۲$$

در شکل ۳ـ۶ به تعبیر هندسی عدد ۱۲ می‌پردازیم.



شکل ۳ـ۶

$f'(۲)=۱۲$ یعنی در نقطهٔ $x=۲$، وقتی یک واحد به $x=۲$ اضافه شود تقریباً ۱۲ واحد به y اضافه می‌شود و امّا $f(۲)=۸$ بنابراین مقدار تابع (y) در نقطه $x=۳$ تقریباً $۸+۱۲=۲۰$ است. ولـی مقدار واقعی y در نقطه ۳ می‌شود $f(۳)=۲۷$.

مثال: اگر هوا را به داخل بالونی بدمیم، آهنگ تغییر حجم بالون، وقتی که شعاع آن ۱۵سانتی‌متر است، چقدر است؟

حل: اگر V حجم بالون کروی شکل و r شعاع بالون باشد، آهنگ تغییر حجم نسبت به شعاع عبارت است از

$$\frac{dV}{dr}=\frac{d}{dr}(\frac{۴}{۳}\pi r^{۳})=۴\pi r^{۲}$$

وقتی r برابر ۱۵ سانتی‌متر است، حجم بالون با آهنگ $۴\pi\times ۲۲۵ = ۹۰۰\pi$ سانتی‌مترمکعب بر سانتی‌متر تغییر می‌کند و به عبارت دیگر، وقتی که شعاع بالون ۱۵ سانتی‌متر است، اگر یک واحد (یک سانتی‌متر) دیگر به شعاع اضافه شود تقریباً ۹۰۰π سانتی مترمکعب به حجم بالون افزوده می‌گردد.

تمرین در کلاس

حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه، برحسب لیتر برابر است با :

$V(t)=۲۵۰(۱۶-t)^{۲}$

آهنگ لحظه‌ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه، چقدر است و آن را توصیف کنید.

آهنگ تغییر در علم اقتصاد : فرض کنید C(x) کل مبلغی باشد که کارخانه‌ای برای تولید x واحد از یک نوع کالا، هزینه می‌کند. تابع C را **تابع هزینه** می‌نامند. اقتصاددانان مقدار حد $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ را وقتی که $\Delta x\to ۰$، یعنی آهنگ لحظه‌ای تغییر هزینه نسبت به تعداد کالای تولید شده را **هزینه نهایی** تولید می‌نامند.

چون معمولاً مقدارهای x عددهایی صحیح‌اند، ممکن است بی‌معنی باشد که Δx را به ۰ میل دهیم. بنابراین **هزینه نهایی** تولید را سهواً به‌عنوان هزینه اضافی لازم برای تولید یک واحد دیگر از محصول تعریف می‌کنند. یعنی $\Delta C=C(x+۱)-C(x)$

برای بهتر فهمیدن این مطلب، رابطه بین آهنگ تغییر و مسأله مماس را دوباره بخوانید.

مثال: هزینه ساخت x یخچال c(x) تومان است که در آن

$C(x)=۸۰۰۰۰۰۰+۴۰۰۰۰۰x-۵۰۰x^{۲}$

می‌باشد. هزینه تولید ۱۰۱امین یخچال چقدر است و معنی آن را توضیح دهید.

حل: هزینه نهایی $C'(x)=400000-1000x$

$C'(100)=400000-100000=300000$

یعنی وقتی کارخانه ۱۰۰ یخچال تولید کرده و بخواهد ۱۰۱ امین یخچال را تولید کند تقریباً ۳۰۰۰۰۰ تومان هزینه می‌کند.

تمرین در کلاس

یک کارخانه پارچه‌بافی، طاقه‌هایی از پارچه‌ای به عرض ثابت تولید می‌کند. هزینه تولید x متر از این پارچه $C(x)$ تومان است.

الف) معنی $C'(x)$ چیست؟

ب) معنی $C'(1000)=900$ چیست؟

مسائل

۱ــ حجم یک مکعب به طول ضلع x عبارت است از $V=x^3$، آهنگ تغییر حجم مکعب نسبت به x را وقتی $x=4$ است بیابید.

۲ــ آهنگ تغییر مساحت دایره را نسبت به قطر آن بیابید.

۳ــ فرض کنید آنفلوانزا در یک منطقه شیوع پیدا کرده است و مسئولین ادارهٔ بهداری تعداد افراد مبتلا به بیماری در زمان t (برحسب روز از زمان شیوع) را برابر $P(t)=60t^2-t^3$ تخمین می‌زنند، با شرط اینکه $0\leq t\leq 40$.

الف) آهنگ تغییر پخش آنفلوانزا را در $t=30$ پیدا کنید.

ب) چه زمانی آهنگ پخش آنفلوانزا ۹۰۰ نفر در روز است؟

۴ــ فرض کنید تابع هزینه تولید x واحد از محصولی $C(x)=0/05x^3-3x$ و سطح تولید روزانه ۱۰۰ واحد است

الف) هزینهٔ افزایش تولید از ۱۰۰ به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟

ب) هزینهٔ نهایی در این سطح تولید چقدر است؟

۵ــ فرض کنید که درآمد حاصل از تولید x واحد از محصولی $R(x)=0/1x^2-3x$، درآمد نهایی «آهنگ آنی تغییر درآمد» را در سطح تولید ۱۸۰۰ واحد حساب کنید.

۳ـ۴ـ تابع مشتق

می‌دانیم که مشتق تابع f در نقطه‌ای ثابت مانند $x_\circ$ (در صورت وجود) :

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} \qquad (۱)$$

در این بخش دیدگاه خود را تغییر می‌دهیم و می‌گذاریم $x_\circ$ تغییر کند. اگر در رابطه (۱)، $x_\circ$ را با متغیر x جایگزین کنیم، داریم

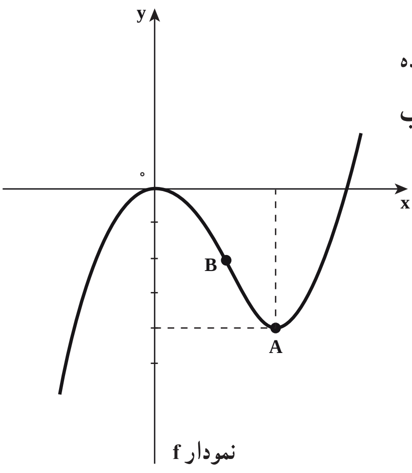
$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \qquad (۲)$$

به ازای هر xای که این حد وجود داشته باشد، x را به $f'(x)$ نظیر می‌کنیم. به این ترتیب **f'** را می‌توانیم تابع جدیدی در نظر بگیریم و آن‌را **تابع مشتق f** (مشتق f) بنامیم و می‌دانیم تعبیر هندسی مقدار f' به‌ازای x، یعنی $f'(x)$، شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(x,f(x))$ است.

نامیدن تابع f' به مشتق f به‌خاطر این است که به کمک حدگیری در رابطه (۲)، از f «مشتق» شده است.

دامنه f' مجموعه $\{x : f'(x)$ وجود دارد$\}$ است که زیرمجموعه‌ای از دامنه f است.

مثال: نمودار تابع f در شکل ۳ـ۷ نشان داده شده است. با استفاده از آن نمودار تابع f' را به تقریب نشان دهید.



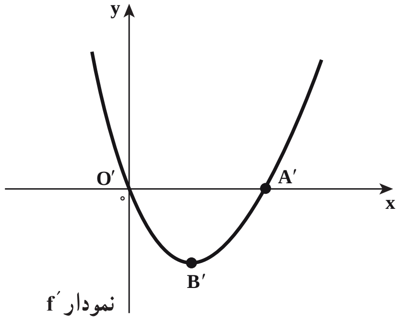
شکل ۳ـ۷

حل: شیب خط‌های مماس بر منحنی f قبل از نقطه O مثبت است پس در این‌جاها $f'(x)$ مثبت است و خط مماس در نقطه O افقی است پس به‌ازای طول این نقطه مقدار f' صفر است و بین O و A شیب خط‌های مماس منفی است پس در این جاها $f'(x)$ منفی است و نمودار f' زیر محور x

است و خط مماس در نقطه A افقی است پس به‌ازای طول این نقطه مقدار تابع f' صفر است درنتیجه نمودار f' محور x را در نقاط O' و A'

(O' با O و A' با A هم‌طول‌اند) قطع می‌کند.

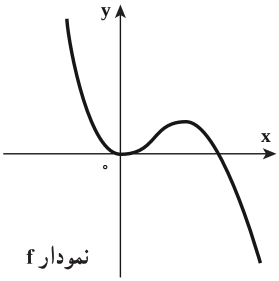
و بعد از نقطه A شیب خط‌های مماس مثبت است پس در این جاها $f'(x)$ مثبت است و نمودار f' بالای محور x است. بنابراین نمودار f' را می‌توان به‌صورت شکل ۳ــ۸ نشان داد دقت کنید، نقطهٔ B' روی نمودار f' نقطه‌ای است هم‌طول با نقطهٔ B از نمودار f که بعداً در مورد آن توضیح خواهیم داد.



شکل ۳ــ۸

تمرین در کلاس

نمودار تابع f به شکل ۳ــ۹ است، از روی آن نمودار f' را حدس زده و آن‌را رسم کنید.



شکل ۳ــ۹

مثال: اگر $f(x)=x^{۳}$، ضابطهٔ $y=f'(x)$ را پیدا کنید.

حل: از رابطهٔ (۲) استفاده می‌کنیم، با این فرض که h متغیر است و ضمن محاسبهٔ حد موردنظر x را موقتاً ثابت در نظر می‌گیریم.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^{۳}-x^{۳}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{x^{۳}}+۳x^{۲}h+۳h^{۲}x+h^{۳}-\cancel{x^{۳}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(۳x^{۲}+۳hx+h^{۲})}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to ۰}(۳x^{۲}+۳hx+h^{۲})=۳x^{۲}$$

بنابراین $f'(x)=۳x^{۲}$

یادداشت : برای مشتق تابع $y=f(x)$ علاوه بر نماد f□(x)، نماد $\frac{d_y}{d_x}$ یا y'_x به‌کار می‌رود.

تمرین در کلاس

اگر $f(x)=\sqrt{x}$، ضابطه تابع f' را به‌دست آورده و به کمک نمودار f، نمودار f' را رسم کنید.

نقاط مشتق‌ناپذیر : وقتی $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$ (و یا $\lim\limits_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}$) وجود داشته باشد می‌گوییم f در $x_۰$ **مشتق‌پذیر است** و یا f در $x_۰$ مشتق دارد. در نقطه‌ای که f مشتق‌پذیر نیست، می‌گوییم f **مشتق‌ناپذیر است** و یا مشتق f وجود ندارد.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^۲-۱\right|$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

حل:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\left|x^۲-۱\right|}{x-۱}$$

و امّا

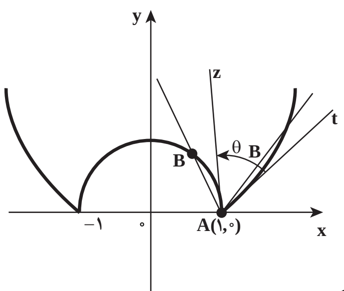
$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\left|x^۲-۱\right|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}(x+۱)=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{\left|x^۲-۱\right|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x-۱}=-۲$$

ملاحظه می‌کنید که این حد وجود ندارد بنابراین تابع $f(x)=\left|x^۲-۱\right|$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست (و یا به عبارت دیگر در $(۱,۰)$ خط مماس وجود ندارد) نمودار تابع f در شکل ۳ـ۱۰ نشان داده شده است.

در این شکل مشاهده می‌شود وقتی B از سمت چپ به A میل کند قاطع AB به مماس چپ AZ میل می‌کند که شیب آن ۲− است، در این صورت می‌گوییم تابع f دارای **مشتق چپ** است.

و اگر B از سمت راست به A میل کند قاطع AB به مماس راست At میل می‌کند که شیب آن ۲ است، در این صورت می‌گوییم تابع f دارای **مشتق راست** است.



شکل ۳ـ۱۰

در این وضعیت نقطه A، یک نقطهٔ «**گوشه**» برای تابع f است.

بنابراین اگر $A(x_\circ, f(x_\circ))$ یک نقطهٔ گوشه برای تابع f باشد و مشتق چپ یعنی

$$f'_-(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ^-}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

و مشتق راست یعنی

$$f'_+(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

وجود داشته ولی با هم نابرابر باشند، آنگاه یک مماس چپ در نقطهٔ A به شیب $m_1=f'_-(x_\circ)$ وجود دارد که معادلهٔ آن می‌شود

$$\boxed{y=m_1(x-x_\circ)+f(x_\circ)}$$

و همین‌طور، در نقطه A یک مماس راست به شیب $m_2=f'_+(x_\circ)$ وجود دارد

به معادله : $\boxed{y=m_2(x-x_\circ)+f(x_\circ)}$

و اگر زاویه بین دو مماس چپ و راست در نقطهٔ گوشه را به θ نشان دهیم، دو حالت برای محاسبه θ در نظر می‌گیریم :

۱) اگر $m_1.m_2=-1$، آنگاه $\theta=90^\circ$

۲) اگر $m_1.m_2\neq-1$ آنگاه θ از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\boxed{\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|}$$

که در مثال بالا اندازه زاویه بین دو مماس چپ و راست (θ) از رابطه زیر به‌دست می‌آید. (چرا؟)

$$\tan\theta=\left|\frac{-2-2}{1-4}\right|=\frac{4}{3}$$

تمرین در کلاس

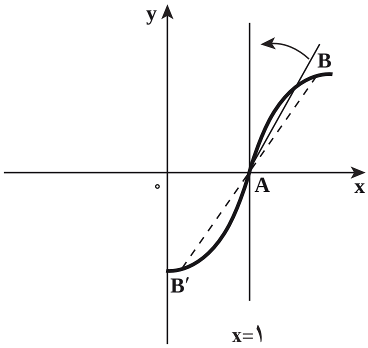
الف) با محاسبه مشتق چپ و مشتق راست تابع $f(x)=|x|$ در نقطه $x=0$، نشان دهید مبدأ مختصات یک نقطهٔ گوشه برای f است و سپس اندازه زاویه ایجاد شده در نقطهٔ گوشه را به‌دست آورید.

ب) نشان دهید مبدأ مختصات یک گوشه برای تابع $f(x)=\begin{cases}x\ , & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$، می‌باشد و اندازه زاویه ایجاد شده در گوشه را به‌دست آورید.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ را در $x=1$ بررسی نمایید.

حل: تابع f در $x=1$ پیوسته است (چرا؟) و

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty$$



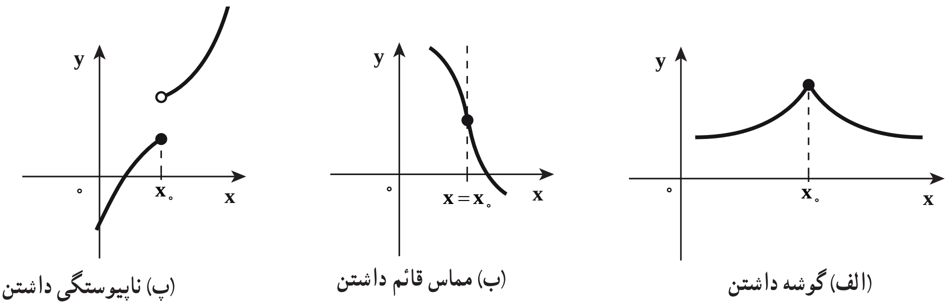
بنابراین تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و امّا طبق تعریف مماس قائم، تابع در نقطهٔ $(1,0)$ مماس قائم دارد به معادله $x=1$ (شکل روبه‌رو را ببینید)

با مشاهده شکل روبه‌رو قاطع AB به خط مماس به معادله $x=1$ میل می‌کند.

بنابراین تابع f که درنقطه $(x_0, f(x_0))$ **مماس قائم** داشته باشد، در آن نقطه مشتق‌ناپذیر است.

در سوّمین حالت، اگر تابع در نقطهٔ x_0 پیوسته نباشد، آن وقت در a مشتق‌پذیر نیست. بنابراین در هر نقطهٔ ناپیوستگی f مشتق‌پذیر نیست.

سه حالتی را که برای مشتق‌ناپذیری ذکر کردیم در شکل ۳ــ۱۱ دیده می‌شوند.



شکل ۳ــ۱۱

تمرین در کلاس

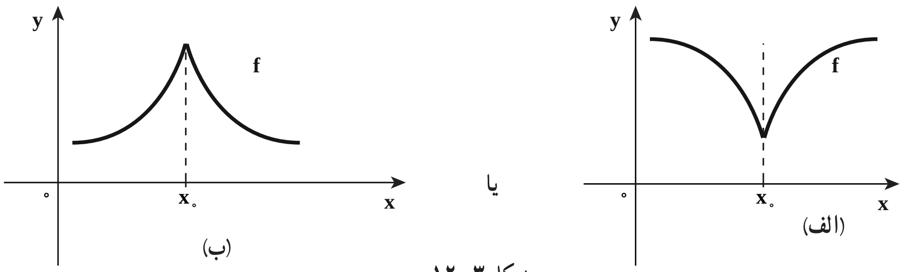
تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) به ازای هر $x\neq 0$، $f'(x)$ را پیدا کنید (ضابطه تابع مشتق).

پ) نشان دهید که تابع f در $(0,0)$ مماس قائم دارد و نمودار f را رسم کنید.

یادداشت : اگر تابع f در نقطهٔ $(x_\circ, f(x_\circ))$ دارای مماس قائم با نموداری به شکل ۳ـ۱۲ باشد در آن صورت، $(x_\circ, f(x_\circ))$ نقطهٔ **بازگشتی** تابع نامیده می‌شود.



شکل ۳ـ۱۲

$$\lim_{x\to x_\circ^-}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=-\infty \qquad \lim_{x\to x_\circ^-}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=+\infty$$

$$\lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=+\infty \qquad \lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=-\infty$$

به عنوان نمونه در تمرین کلاسی بالا معلوم می‌شود که مبدأ مختصات نقطهٔ **بازگشتی** تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ است.

۳ـ۵ـ نتایج اوّلیهٔ مشتق‌پذیری

اگر بنا باشد مشتق هر تابعی را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنیم کار محاسبه مشتق، دشوار و عذاب‌آور است. خوشبختانه راه آسانتری نیز هست و آن‌هم به‌دست‌آوردن تعدادی قاعدهٔ مشتق‌گیری، این قواعد ما را قادر می‌سازند تا مشتق ترکیب‌های پیچیدهٔ توابع را به آسانی از مشتق توابع مقدماتی که این توابع را ساخته‌اند محاسبه کنیم، مثلاً قادر خواهیم بود مشتق تابع $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ را به‌دست آوریم. با این فرض که مشتق توابع مقدماتی $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ را بدانیم. درنتیجه می‌توانیم ردهٔ بزرگی از توابع مشتق را معرفی کنیم.

سپس به ذکر پاره‌ای از خواص ابتدایی مشتق و کاربردهای آن می‌پردازیم. و امّا برای اثبات بعضی از قواعد مشتق‌گیری، لازم است قضیه‌ای بدیهی ولی بسیار مهمّ زیر را بدانیم و صرف نظر از جزئیات، این قضیه بیان می‌کند که اگر نمودار یک تابع در نقطه‌ای هموار (مشتق‌پذیر) باشد، نمی‌تواند در آن نقطه ناپیوسته باشد.

قضیه ۱ : اگر تابع f در a مشتق‌پذیر باشد، آن وقت در a پیوسته است.

قضیه (۱) نشان می‌دهد که مشتق‌پذیری در یک نقطه، پیوستگی در آن نقطه را نتیجه می‌دهد، امّا، عکس این قضیه درست نیست. یعنی ممکن است یک تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. مانند تابع $f(x)=|x|$ که در $x=0$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست ($f'_+(0)=1$ و $f'_-(0)=-1$)

برهان قضیه (۱) : چون f در a مشتق‌پذیر است داریم :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

برای اثبات پیوستگی f در a باید نشان دهیم که

$$\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$$

با استفاده از قضایا و قواعد حد، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}f(a+h)&=\lim_{h\to 0}\left(f(a)+\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times h\right)\\&=f(a)+f'(a)\times 0=f(a)\end{aligned}$$

مثال : مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}(x+1)^3 & , x\le 0\\ ax+a+b & , x>0\end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد.

حل : برای مشتق‌پذیربودن تابع f در $x=0$، ابتدا لازم است f در $x=0$ پیوسته باشد. یعنی تساوی‌های زیر برقرار باشند.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

$$1=a+b=1$$

$a+b=1$ و یا

و با به‌اجرا گذاشتن شرط مشتق‌پذیری، باید $f'_+(0)=f'_-(0)$ و امّا

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}((x+1)^2+(x+1)+1)=3$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+a+b-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a$$

بنابراین با انتخاب $a=3$ و $b=-2$ تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

تمرین در کلاس

تابع f در نقطهٔ a پیوسته است، ثابت کنید تابع $g(x)=(x-a)f(x)$ در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است.

همان‌طورکه گفته شد، محاسبه مشتق توابع به کمک تعریف در بعضی از موارد بسیار دشوار است، لذا قضیه زیر که محاسبه مشتق توابع را آسان می‌سازد، ارائه می‌شود.

قضیه ۲: هرگاه توابع f و g در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشند و c یک عدد ثابت باشد.

آن وقت توابع f+g و f.g و cf و $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$ همگی در نقطه a مشتق‌پذیر هستند و

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(f.g)'(a)=f'(a)g(a)+g'(a).f(a)$

پ) $(cf)'(a)=cf'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

در قسمت (الف) قاعده مجموع را می‌توان به مجموع هر تعدادی از تابع‌ها تعمیم داد

مثال: معادلهٔ حرکت ذره‌ای $s=t^3-4t^2+2t+3$ است. (s برحسب سانتی‌متر و t برحسب ثانیه است) شتاب این ذره را به‌عنوان تابعی از زمان پیدا کنید. پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب چقدر است.

حل:

$$V(t)=\frac{ds}{dt}=3t^2-8t+2$$ سرعت

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=6t-8$$ شتاب

پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب برابر است با:

$a(3)=10\ cm/s^2$

تمرین در کلاس

معادله خط مماس بر منحنی $y=\frac{x}{x^2+6}$ را در نقطه $(2,0/2)$ پیدا کنید.

برهان قضیه (۲) : اثبات قسمت‌های (الف)، (ب)، (پ) قضیه (۲) در کتاب حسابان آموزش داده شده است. بنابراین به اثبات قسمت (ت) می‌پردازیم.

فرض کنیم $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ و a نقطه‌ای باشد که در آن f و g مشتق‌پذیر باشند و $g(a)\neq ۰$ خارج قسمت تفاضلی مربوط به h در نقطهٔ a عبارت است از

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\frac{۱}{x-a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right)=\frac{۱}{x-a}\times\frac{f(x)g(a)-g(x)f(a)}{g(x)g(a)}$$

اکنون با افزودن و کاستن $f(a)g(a)$ در صورت کسر، داریم

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\frac{g(a)f(x)-f(a)g(a)+f(a)g(a)-f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)}$$

$$=\frac{g(a)(f(x)-f(a))-f(a)(g(x)-g(a))}{(x-a)g(x)g(a)}$$

$$=\frac{۱}{g(a)g(x)}\left[g(a).\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a).\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$

چون تابع g در a مشتق‌پذیر است، پس بنابر قضیه (۱) در a پیوسته و درنتیجه $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$

از این‌رو با محاسبه حد کسر $\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$ و با استفاده از قوانین حد مجموع، حد حاصل‌ضرب و حد خارج‌قسمت نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\frac{۱}{g^{۲}(a)}\left[g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$$

و یا

$$h'(a)=\frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{g^{۲}(a)}$$

تمرین در کلاس

اگر تابع‌های f و g در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشند، در این صورت ثابت کنید تابع f.g در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است و

$$(f.g)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

۳ـ۶ـ مشتق توابع مثلثاتی

همان‌طور که می‌دانید تابع‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس در دامنهٔ تعریفشان پیوسته‌اند. اکنون مشتق‌پذیری این توابع را روی دامنهٔ تعریفشان ثابت می‌کنیم و دستورهایی برای مشتق آنها بدست می‌آوریم و بنابر قضیه (۲) کافی است مشتق‌پذیری توابع سینوس و کسینوس ثابت شود زیرا دو تابع دیگر tan و cot به‌صورت خارج قسمت این دو تابع تعریف می‌شوند.

یادآور می‌شویم که در عبارات sinx، cosx، tanx، cotx، x برحسب رادیان است. همچنین درفصل حد، نشان دادیم که $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{۱-\cos h}{h}=۰$ و $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱$ ، (h برحسب رادیان)

اکنون ثابت می‌کنیم $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ (x برحسب رادیان است)

برهان:

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\left[(\frac{\sin h}{h})\cos x-(\frac{۱-\cos h}{h})\sin x\right]$$

چون در محاسبهٔ حد وقتی h به صفر میل کند، x را ثابت می‌گیریم،

بنابراین

$$\lim_{h\to ۰}\sin x=\sin x\ ,\ \lim_{h\to ۰}\cos x=\cos x$$

درنتیجه

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}-\sin x\lim_{h\to ۰}\frac{۱-\cos h}{h}$$

$$=\cos x\times ۱-(\sin x)(۰)=\cos x$$

تمرین در کلاس

به‌طور مشابه ثابت کنید :

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

مثال: اگر $f(x)=\tan x$، مطلوب است تعیین $\frac{dy}{dx}$

حل: چون $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$ و $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$ داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos^{۲} x-(-\sin x)\sin x}{\cos^{۲} x}=\frac{\cos^{۲} x+\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}=\frac{۱}{\cos^{۲} x}$$

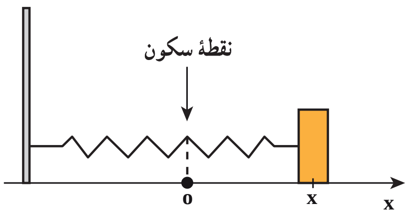
و یا $\frac{dy}{dx}=۱+\tan^{۲} x$ (به‌ازای هر x عضو دامنه f)

تمرین در کلاس

برای تابع $y=\cot x$، $\frac{dy}{dx}$ را تعیین کنید.

مثال: جسمی که به انتهای فنری متصل است به‌طور افقی روی سطحی صاف نوسان می‌کند (شکل ۳ــ۱۳) معادلهٔ حرکت این جسم $x(t)=۶\sin t$ است که در آن t برحسب ثانیه است و x برحسب سانتی‌متر

الف) سرعت و شتاب این جسم را در لحظه t بدست آورید.



شکل ۳ــ۱۳

ب) موقعیت، سرعت و شتاب جسم مورد نظر را در زمان $t=\frac{۲\pi}{۳}$ و جهت حرکت در این زمان چگونه است؟

حل: الف)

$$\text{سرعت} \quad V(t)=\frac{dx}{dt}=۶\cos t$$

$$\text{شتاب} \quad a(t)=\frac{dv}{dt}=-۶\sin t$$

ب) $$x\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)=۶\sin\frac{۲\pi}{۳}=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}\ \text{cm}$$

در موقعیت $۳\sqrt{۳}$ سانتی‌متری از نقطه سکون است.

سرعت $V(\frac{۲\pi}{۳}) = ۶(-\frac{۱}{۲}) = -۳\ cm/s$

چون سرعت منفی است، حرکت جسم به سمت چپ است.

$$a(\frac{۲\pi}{۳}) = -۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = -۳\sqrt{۳}\ cm/s^{۲}$$

قاعدهٔ توانی : یکی از فرمول‌های قابل توجه حسابان، فرمول

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^{r}) = rx^{r-۱}}$$

است، که به **قاعدهٔ توانی** معروف است. وقتی با استفاده از تعریف مشتق مثال‌هایی مانند :

$$\frac{d}{dx}(x^{۲}) = ۲x \quad ، \quad \frac{d}{dx}(x^{۳}) = ۳x^{۲} \quad ، \quad \frac{d}{dx}(x^{۴}) = ۴x^{۳}$$

را حل می‌کنید، فرمول بالا تداعی می‌شود، آنچه جالب است این است که قاعده توانی برای هر عدد حقیقی r برقرار است. مثلاً، ثابت می‌کنیم

$$\frac{d}{dx}(x^{-۲}) = -۲x^{-۳} \quad ، \quad \frac{d}{dx}(x^{\frac{۲}{۳}}) = \frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}$$

و یا در بحث نماهای گنگ ثابت می‌شود :

$$\frac{d}{dx}(x^{\pi}) = \pi x^{\pi-۱}$$

این قاعده طبعاً محدودیت‌هایی دارد، مثلاً در :

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{۱}{۲}}) = \frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}$$

دامنه عبارت است از مجموعهٔ xهایی که مثبت‌اند.

با توجه به حالت‌های نمای r، قاعده توانی در چند مرحله ثابت می‌شود.

حالت اول : r=n، که در آن n عدد صحیح نامنفی است.

$(n=۰,۱,۲,۳,...)$ ، وقتی n=۰ و n=۱، قاعده توانی می‌گوید $\frac{d}{dx}(x^{۰}) = ۰x^{-۱}$ و $\frac{d}{dx}(x^{۱}) = ۱x^{۰}$ ،

یا ساده‌تر $\frac{d}{dx}(۱) = ۰$ و $\frac{d}{dx}(x) = ۱$ وقتی $x \neq ۰$.

از این‌رو، در دامنه پذیرفته شده درست است. البته، هیچکس عملاً از آن در این حالات استفاده نمی‌کند، زیرا فرمول‌های $\frac{d}{dx}(۱) = ۰$ و $\frac{d}{dx}(x) = ۱$ بدون توسل به قاعدهٔ توانی (و در IR) برقرارند.

از این‌رو، فرض کنیم $n \geq ۲$ و $f(x)=x^{n}$، در این صورت

$$f'(x) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^{n}-x^{n}}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{(x^n + nx^{n-۱}h + \frac{n(n-۱)}{۲}x^{n-۲}h^۲ + \cdots + nxh^{n-۱} + h^n) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{\cancel{h}(nx^{n-۱} + \frac{n(n-۱)}{۲}x^{n-۲}h + \cdots + nxh^{n-۲} + h^{n-۱})}{\cancel{h}}$$

با حذف عامل $h \neq ۰$، همهٔ جملات باقی‌مانده جز جملهٔ اوّل دارای عامل h هستند درنتیجه وقتی $h \to ۰$ خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-۱}$$

حالت دوّم: $r=n$، که در آن n عدد صحیح منفی است. با انتخاب $m=-n>۰$ و $x \neq ۰$،

$$f(x) = x^n = x^{-m} = \frac{۱}{x^m}$$

لذا بنابرقضیه ۲ (مشتق خارج‌قسمت) و $\frac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-۱}$ داریم:

$$f'(x) = \frac{۰ \times x^m - mx^{m-۱} \times ۱}{(x^m)^۲} = -mx^{m-۱-۲m}$$

$$f'(x) = nx^{n-۱}$$

حالت سوم: وقتی r عدد گویای $\frac{p}{q}$ باشد و $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ ثابت می‌شود (در بخش بعدی) به‌ازای هر x از دامنه تابع مشتق

$$f'(x) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-۱}$$

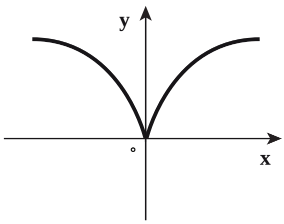
حالت چهارم: وقتی که r عدد گنگی باشد، مثل $\frac{d}{dx}(x^\pi) = \pi x^{\pi-۱}$. فعلاً نمی‌توانیم به اثبات آن بپردازیم زیرا هنوز علامتی مانند x^π و یا $x^{\sqrt{۲}}$ را تعریف نکرده‌ایم.

مثال: فرض کنید $f(x) = \sqrt[۳]{x^۲}$،

الف) دامنه تابع مشتق f را تعیین کنید.

ب) ضابطه تابع مشتق f را به‌دست آورید.

حل: الف) قبلاً نمودار f به شکل ۳ـ۱۴ رسم شده و در مبدأ نقطه بازگشتی دارد، پس تابع f در $x=۰$ مشتق‌ناپذیر است.



شکل ۳ـ۱۴

بنابراین

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\}$$

پ) به‌ازای هر x عضو دامنه تابع f' داریم.

$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

بنابراین

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

تمرین در کلاس

با فرض اینکه $f(x) = \sqrt[9]{x^2}$، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^3(1+h)-f^3(1)}{h}$ را به‌دست آورید.

مثال: یک تانک دشمن در صفحهٔ مختصات خودی روی منحنی $f(x)=x^2-x$ حرکت می کند (شکل ۳ــ۱۵) و یک بسیجی با (آر ــ پی ــ جی ــ ۷) در نقطه (۴,۸) منتظر شکار تانک است و زمان مطلوب وقتی است که مسیر گلوله خط راستی مماس بر منحنی f باشد، نقطه مطلوب مسیر تانک را تعیین کنید.

حل: فرض کنید $M(a, a^2-a)$ نقطه مطلوب باشد. در این صورت، ابتدا معادله خط مماس بر منحنی را در نقطهٔ M به‌دست می‌آوریم.

$$f'(x)=2x-1$$

$$y-(a^2-a)=f'(a)(x-a)$$

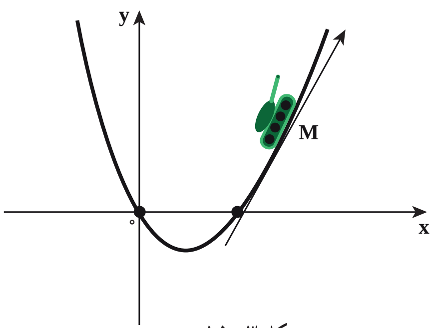
$$y-a^2+a=(2a-1)(x-a)$$

خط مماس از نقطه (۴,۸) می گذرد بنابراین

$$8-a^2+a=(2a-1)(4-a)$$

$$a^2-8a+12=0$$

$$a=2 \quad \text{یا} \quad a=6$$

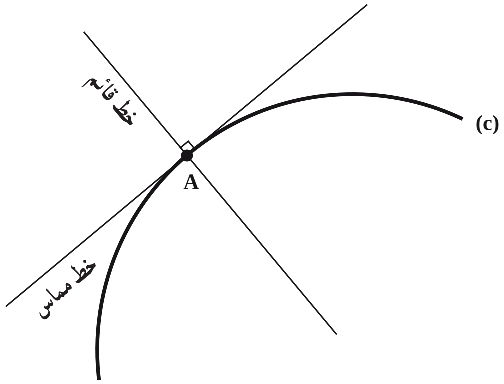


شکل ۳ــ۱۵

پس مسیر موشک در نقطه (۲,۲) بر مسیر تانک مماس است.

یادداشت : مثال فوق نشان می‌دهد که از نقطهٔ $A(4,8)$ خارج منحنی $y=x^2-x$، می‌توان دو خط مماس به شیب‌های $m_1=f'(2)=3$ و $m_2=f'(6)=11$ بر منحنی f رسم کرد، با نقاط تماس $M(2,2)$ و $B(6,30)$

یادداشت : به کمک قاعده‌های مشتق گیری و بدون مراجعه به تعریف مشتق علاوه بر خط‌های مماس، می‌توانیم خط‌های قائم را هم پیدا کنیم.
خط قائم بر منحنی (C) در نقطهٔ A خطی است که از A می‌گذرد و بر خط مماس بر منحنی در A عمود است (در فیزیک بخش نور، به زاویهٔ میان پرتوهای نور و خط عمود بر عدسی نیاز است) (شکل ۳ـ۱۶ را ببینید).



شکل ۳ـ۱۶

تمرین در کلاس

۱ـ معادلهٔ خط‌های مماس و قائم بر منحنی $y=\frac{\cos x}{۲+\sin x}$ در نقطهٔ $(۰,\frac{۱}{۲})$ را پیدا کنید.

۲ـ از نقطه $A(۰,-۱)$ دو خط مماس بر منحنی $f(x)=x^۲+x$ رسم شده است معادلات این دو خط مماس را به‌دست آورید.

۳ـ خط $y=۲x+۱$ در نقطهٔ $x_۰=۱$ بر منحنی پیوسته $y=f(x)$ مماس است مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f^۲(x)+۳f(x)-۱۸}{x-۱}$ را حساب کنید.

۳ـ۷ـ مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر

برای به‌دست آوردن تابع شتاب، از تابع موقعیت (مکان)، باید از تابع موقعیت دوبار مشتق گرفت.

$S(t)$ (تابع موقعیت)

$V(t)=S'(t)$ (تابع سرعت)

$a(t)=V'(t)=S''(t)$ (تابع شتاب)

$a(t)$ را مشتق دوم $s(t)$ نامیده و آن را با $s''(t)$ نشان می‌دهیم مشتق دوّم، مثالی است از مشتق مرتبه‌های بالاتر بنابراین اگر تابع مشتق یعنی f' مشتق‌پذیر باشد، تابع مشتق f' را با f'' نشان داده و آن را مشتق مرتبه دوم (و یا مشتق دوّم) f می‌نامیم.