

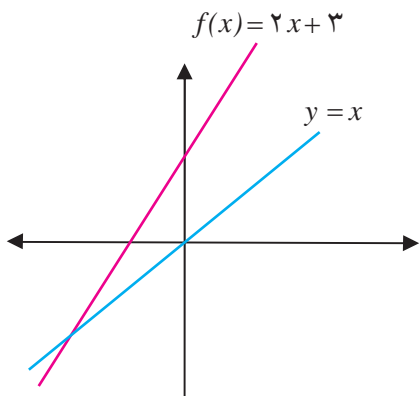


یافتن ضابطه تابع وارون

فعالیت ۹



نمودار تابع خطی $f(x) = 2x + 3$ داده شده است.



۱- وارون این تابع را در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

۲- معادله‌ای برای وارون این تابع به دست آورید. می‌توانید از این نکته استفاده کنید که نقاط $(1, 5), (0, 3)$

روی نمودار f قرار دارند. پس نقاط $(5, 1), (3, 0)$ روی نمودار f^{-1} قرار دارند و نمودار f^{-1} یک خط راست است.

پیدا کردن ضابطه f^{-1} در فعالیت قبل چندان دشوار نبود زیرا f یک تابع خطی بود. اما اگر f خطی نباشد کار چندان ساده نیست. اکنون با روش دیگری وارون f را به دست می‌آوریم که بتوان آن را هنگامی که تابع داده شده خطی هم نیست به کار برد. تابع $f(x) = 2x + 3$ را در نظر می‌گیریم. در جدول زیر برخی از مقادیر از دامنه و مقادیر نظیر آن از برد داده شده‌اند. همان طور که می‌دانید f یک به یک است اگر شبیه همین جدول را برای تابع وارون f در نظر بگیریم جدولی به دست می‌آید که در آن جای مقادیر متناظر x, y تغییر کرده است.

جدول تابع f

x	y
۲	۷
۱	۵
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$
۰	۳
-۱	۱
-۲	-۱

جدول تابع f^{-1}

x	y
۷	۲
۵	۱
$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$
۳	۰
۱	-۱
-۱	-۲



y	$\frac{y-3}{2} = x$
۷	۲
۵	۱
$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
۳	۰
۱	-۱
-۱	-۲

زوج مرتب $(۱, ۵)$ به f تعلق دارد و زوج $(۵, ۱)$ به وارون آن. عدد ۱ توسط قانون تابع به ۵ نظیر شده است یعنی ۱ در ۲ ضرب شده و ۳ واحد به آن اضافه شده است اما چه قانونی ۵ را به ۱ نظیر می‌کند؟ پاسخ برگشت از همین مسیر است. یعنی ابتدا سه واحد از ۵ کم کنیم و سپس مقدار به دست آمده را بر ۲ تقسیم کنیم جدول روبه‌رو این فرآیند را بهتر توصیف می‌کند. اگر تابع وارون f را با g نمایش دهیم، ضابطه آن به صورت: $g(y) = \frac{y-3}{2}$ می‌باشد. مشخص است که y ها از برد f اختیار می‌شوند.

همان طور که می‌دانید g را به صورت‌های زیر هم می‌توان نمایش داد:

$$g(a) = \frac{a-3}{2}, \quad g(b) = \frac{b-3}{2}, \quad g(t) = \frac{t-3}{2}$$

آن چه که مهم است این است که دامنه g همان برد f است بنابراین می‌توان نوشت:

$$g(x) = \frac{x-3}{2} \quad x \in R_f$$

از آنجا که g را معمولاً با f^{-1} نمایش می‌دهیم داریم: $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$ اکنون آن چه بیان شده را به عنوان یک روش به کار می‌بریم.

تذکر:

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع وارون پذیر مانند f در معادله $y=f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.



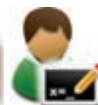
مثال

ضابطه وارون تابع $f(x) = 2x + 3$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) = 2x + 3 &\Rightarrow y = 2x + 3 \\ &\Rightarrow 2x = y - 3 \\ &\Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \\ &\Rightarrow g(y) = \frac{y-3}{2} \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2} \end{aligned}$$



تمرین در کلاس



نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند و دامنه و برد و ضابطه تابع وارون آن‌ها را به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad \text{(الف)} \quad g(x) = \frac{x-5}{2x+3} \quad \text{(ب)}$$

فعالیت ۱۰



۱- اگر $f(x) = 2x + 3$ دیدیم که وارون آن، تابع $g(x) = \frac{x-3}{2}$ است. توابع $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ را محاسبه کنید.

۲- اگر $f(x) = \sqrt{2x-1}$ ثابت کنید که f وارون پذیر است و وارون آن تابع $g(x) = \frac{x^2+1}{2}$ است. توابع $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ را محاسبه کنید.

۳- به طور کلی اگر تابع f دارای تابع وارون g باشد در مورد توابع $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ چه حدس می‌زنید؟ توجه کنید که تابع و تابع وارون عکس یکدیگر عمل می‌کنند.

خاصیت تابع و تابع وارون نشان می‌دهد که قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند داریم :

$$D_g = R_f \quad , \quad R_g = D_f$$

و برای هر x در دامنه f داریم :

$$g(f(x)) = x$$

و برای هر x در دامنه g داریم :

$$f(g(x)) = x$$

تذکر : توجه داریم که f^{-1} یک نماد است و نباید آن را با $\frac{1}{f(x)}$ اشتباه گرفت.



۱- اگر $f(x) = \frac{7}{x} + 3$, $g(x) = \frac{7}{x-3}$, $h(x) = \frac{x-3}{7}$ ثابت کنید که f و g وارون یکدیگرند ولی h و g وارون یکدیگر نمی‌باشند.

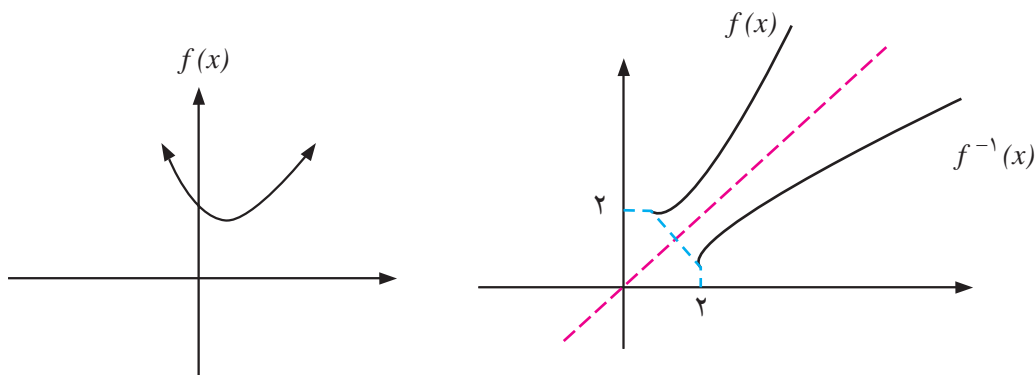
۲- آیا دو تابع $f(x) = \frac{2}{5}$, $g(x) = \frac{5}{2}$ وارون یکدیگرند؟

۳- اگر $y = m_1x + b_1$ و $y = m_2x + b_2$ معادله دو خط باشند که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، نشان دهید $m_1m_2 = 1$.



مثال

تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ یک به یک نیست. زیرا $f(0) = f(3) = 3$ ولی $0 \neq 3$ به یک نبودن f از روی نمودار آن نیز به سادگی دیده می‌شود.



اما تحدید این تابع روی بازه $[1, \infty)$ تابعی یک به یک است و می‌توانیم معادله‌ای برای f^{-1} به دست آوریم. نمودار بالا یک به یک بودن تحدید f روی بازه $[1, \infty)$ را نشان می‌دهد و با روش جبری نیز می‌توانیم این مطلب را ثابت کنیم.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 3 = x_2^2 - 2x_2 + 3 \\ &\Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 2 = (x_2 - 1)^2 + 2 \\ &\Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \\ &\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در نتیجه‌گیری‌های بالا از این که $x_1 \geq 1$ و $x_2 \geq 1$ استفاده کرده‌ایم (چگونه؟). برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون داریم:



$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{y-2}$$

جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین $x-1 = \sqrt{y-2}$ در نتیجه

$$x = \sqrt{y-2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

به کمک نمودارها و نیز از ضابطه توابع دیده می‌شود که:

$$D_f = [1, +\infty) = R_{f^{-1}}$$

$$R_f = [2, +\infty) = D_{f^{-1}}$$

بنابراین:

$$f^{-1}: [2, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

درستی تساوی $f(f^{-1}(x)) = x$ با محاسبه زیر روشن می‌شود.

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x-2} + 1) = (\sqrt{x-2} + 1 - 1)^2 + 2 = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

اثبات درستی رابطه $f^{-1}(f(x)) = x$ به طریق مشابه است.

بحث در کلاس

وارون یک تابع صعودی (اکید)، صعودی است یا نزولی؟ وارون یک تابع نزولی (اکید) چگونه است؟



مسائل



- تحقیق کنید که توابع $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ ، $g(x) = \frac{1}{x-2}$ وارون یکدیگرند. برای کدام مقادیر x داریم $f(g(x)) = x$ و برای کدام مقادیر x داریم $g(f(x)) = x$ ؟
- فرض کنید تابع f دارای وارون است. اگر نمودار f در ربع اول واقع شود، نمودار f^{-1} در کدام ناحیه قرار می‌گیرد؟

۳- نشان دهید تابع $f(x) = |x-2| + 3$ یک به یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک به یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.

۴- در هر یک از حالت‌های زیر نشان دهید که توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$\text{الف) } f(x) = x^3 - 5, \quad g(x) = \sqrt[3]{x+5}$$



ب) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 + 2$, $x \geq 0$

۵- نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) f وارون پذیر نباشد.

ب) برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$.

۶- وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند به دست

آورید.

الف) $f(x) = (x+5)^2$, $x \geq -5$

ب) $f(x) = -|x-1| + 1$, $x \geq 1$

ج) $f(x) = (x-3)^2$

د) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

۷- نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{3x-2}{5x-3}$ وارون خودش است.

۸- تابع $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ داده شده است همه مقادیر b, a را که به ازای آن‌ها $f^{-1}(x) = f(x)$ را

بیابید.

۹- در مورد وارون پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x + 1 & 1 \leq x \end{cases}$ تحقیق کنید.

۱۰- اگر $f(x) = x + 3$, $g(x) = 3x - 7$ با محاسبه نشان دهید $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$.

۱۱- اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه

$$h(t) = 100 - \frac{49}{10}t^2$$

الف) دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می‌کند؟



توابع چند جمله‌ای و توابع متناوب

قبلاً با توابع خطی آشنا شده‌اید. هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$ ، تابع به صورت $f(x)=b$ درمی‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامند. توابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که آن‌ها را توابع چندجمله‌ای می‌نامند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند.

تعریف:

هر تابع به صورت: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ اعدادی حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامند.

در جدول زیر مثال‌هایی از توابع چندجمله‌ای ارائه شده است.

درجه چندجمله‌ای	شکل کلی	مثال
۰ (توابع ثابت)	$f(x) = a$	$f(x) = 3$
۱ (خط با شیب a_1)	$f(x) = a_1 x + a_0$	$f(x) = \frac{2}{3}x - 5$
۲ (سه‌می‌ها)	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$
۳	$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$f(x) = 7x^3 - \sqrt{2}x^2 + 2x - 5$
۴	$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$f(x) = x^4 - x^3 + x$

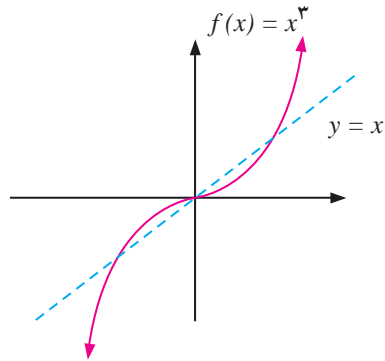
با رسم نمودار توابع چندجمله‌ای از درجه ۰، ۱، ۲، و یافتن دامنه و برد آن‌ها آشنا شده‌اید. در این جا نمودار تابع چندجمله‌ای $f(x) = x^3$ و برخی از توابع چندجمله‌ای دیگر درجه سوم که به کمک تابع $y = x^3$ می‌توان نمودار آن‌ها را رسم کرد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دامنه تابع $f(x) = x^3$ برابر IR است و تابعی فرد است، بنابراین نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. با توجه به ضابطه تابع برای مقادیر مثبت x ، مقدار تابع مثبت است بنابراین کافی است نمودار تابع در ربع اول را رسم کنیم و سپس قرینه آن را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم. این تابع صعودی است زیرا اگر $x_1 < x_2$ می‌توان نتیجه گرفت $x_1^3 < x_2^3$. برای $0 < x < 1$ داریم: $0 < x^3 < x$ و برای $x > 1$ داریم $x < x^3$ ، بنابراین نمودار این تابع در بازه $(0, 1)$ زیر خط $y = x$ و در بازه $(1, \infty)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد.



اکنون با کمک نقطه‌یابی رسم نمودار تقریبی $f(x) = x^3$ به سادگی انجام می‌شود.

x	$f(x)$
۰	۰
۱	۱
۳	۲۷
۱	۱
۲	۸
۱	۱
۳	۲۷
۲	۸
۲	۸

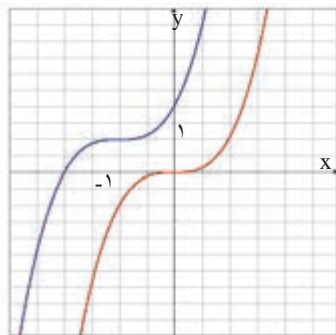


باتوجه به یک به یک بودن، این تابع وارون‌پذیر است و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

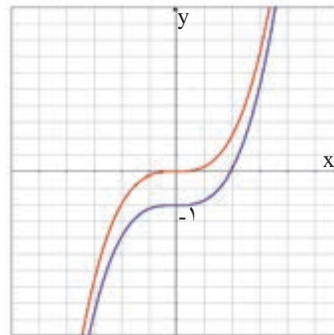
تمرین در کلاس



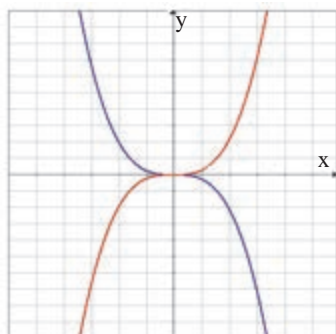
- نمودار $y = \sqrt[3]{x}$ را در همان دستگاه مختصات به همراه نمودار $y = x^3$ رسم کنید.
- در هریک از شکل‌های زیر نمودار تابع $y = x^3$ و نمودار یک تابع دیگر که به کمک آن به دست آمده است در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. ضابطه نمودار تابع جدید را بنویسید.



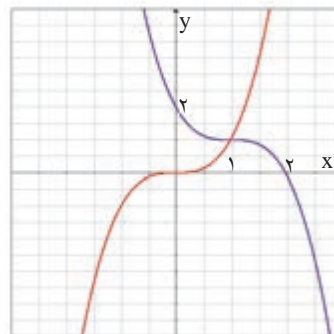
(الف)



(ب)



(ج)



(د)



۳- نمودار توابع $y = (x + \frac{3}{4})^3$ و $y = (x-1)^3 + 2$ و $y = 2x^3$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

حرکت‌هایی که الگوی خاصی را تکرار می‌کنند حرکت متناوب می‌نامند. حرکت زمین دور خورشید، تغییر فصل‌ها، حرکت عقربه‌های ساعت از این نوع حرکت‌ها هستند. این نوع حرکت در تنظیم بلند مدت وقت و محاسبه زمان به انسان کمک می‌کند. حرکت دیگر تناوبی گردش ماه به دور زمین است که در طی یک دوره تقریباً ۲۸ روزه صورت می‌گیرد و ما را در محاسبه تعداد ماه‌ها یاری می‌نماید. بسیاری از پدیده‌های طبیعی دیگر در عالم خلقت نیز دارای رفتار تناوبی هستند. انسان‌ها از این گونه رفتارها در ساخت مصنوعات بشری مانند ساعت هم استفاده کرده‌اند.

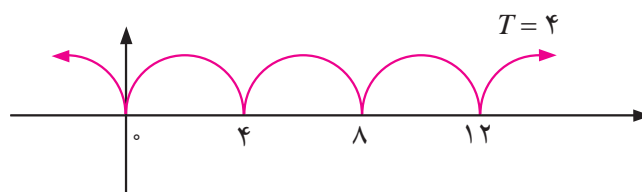
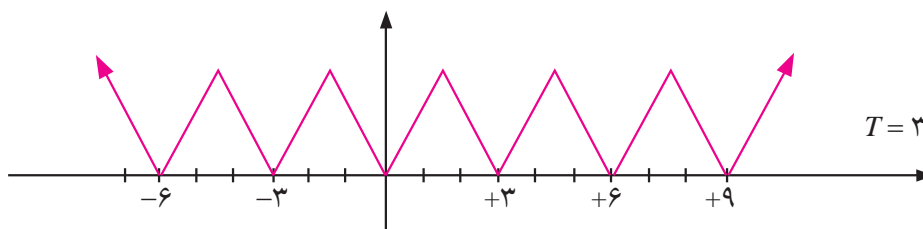
توابعی که بیان‌کننده این حرکات تناوبی هستند شکل خاصی دارند و آن‌ها را تابع‌های متناوب می‌نامند. سال قبل با توابع متناوبی مانند $y = \cos x$ و $y = \sin x$ و دوره تناوب برخی از توابع مثلثاتی آشنا شده‌اید. در اینجا به طور دقیق‌تری توابع متناوب را تعریف می‌کنیم.

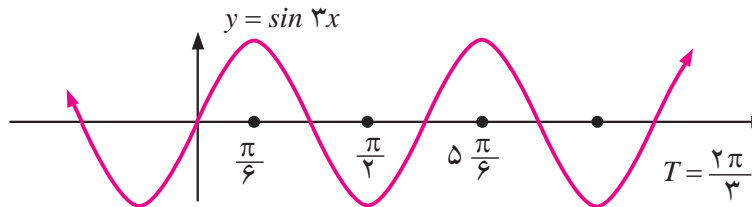
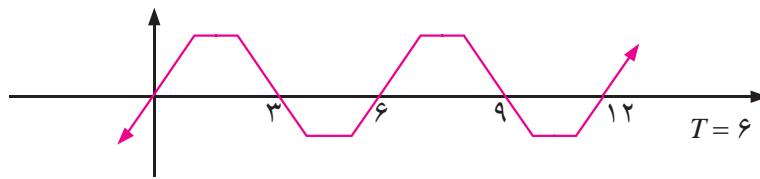
تعریف :

تابع f را متناوب نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x+T) = f(x)$ و $x \pm T \in D_f$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با خاصیت بالا را دوره تناوب f می‌نامند.

مثال

- ۱ : توابع $y = \cos x$ و $y = \sin x$ توابعی متناوب با دوره تناوب 2π هستند.
- ۲ : توابعی که نمودار آن‌ها در زیر آمده است توابعی متناوب با دوره تناوب‌های مختلف هستند.

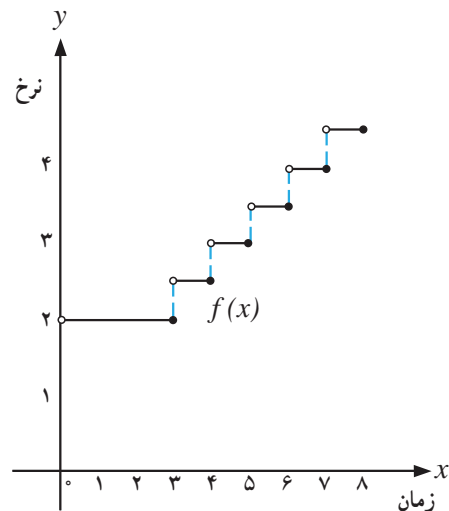




توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

نرخ ارسال بسته‌های پستی به طور معمول تابعی از وزن آن‌ها است. همچنین نرخ توقف در پارکینگ‌ها برحسب ساعت توقف اتومبیل‌ها در آن جا تعیین می‌شود، یعنی نرخ پارکینگ تابعی از زمان توقف است. فرض کنید پارکینگ یک مجتمع تفریحی و ورزشی برای سه ساعت اول توقف ۲ هزار تومان و برای هر ساعت اضافه یا زمانی کمتر از یک ساعت ۵۰۰ تومان دریافت کند. اگر حداکثر زمان توقف در این پارکینگ ۸ ساعت باشد، نمودار تابعی که نرخ توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان دهد به شکل زیر است.

x (ساعات توقف)	$f(x)$ = نرخ برحسب هزار تومان
$0 < x \leq 3$	۲
$3 < x \leq 4$	۲/۵
$4 < x \leq 5$	۳
$5 < x \leq 6$	۳/۵
$6 < x \leq 7$	۴
$7 < x \leq 8$	۴/۵



دامنه این تابع $[0, 8)$ و برد آن مجموعه $\{2, 2/5, 3, 3/5, 4, 4/5\}$ می‌باشد. برای مثال برای توقف ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه‌ای باید مبلغ ۳۵۰۰ تومان پرداخت کرد.

توابعی که نمودار آن‌ها شبیه تابع بالا هستند به توابع پله‌ای معروف هستند.



تعریف :

هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد یک تابع پله ای می نامند.

گونه خاصی از توابع پله ای تابع جزء صحیح می باشد. ابتدا جزء صحیح یک عدد را تعریف می کنیم و بعد تابع جزء صحیح را تعریف می کنیم.

تعریف :

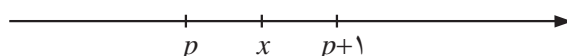
برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن، بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می دهیم.

برای مثال داریم :

$$\begin{aligned} [3/2] &= 3 & [4/9] &= 4 & [7] &= 7 & [\sqrt{3}] &= 1 \\ [-1/5] &= -2 & [1-\sqrt{2}] &= -1 & [-2] &= -2 & [-2/95] &= -3 \end{aligned}$$

جزء صحیح یک عدد به شکل زیر نیز مشخص می شود.

برای هر عدد حقیقی x ، یک عدد صحیح p موجود است که $p \leq x < p+1$. همان جزء صحیح x است.

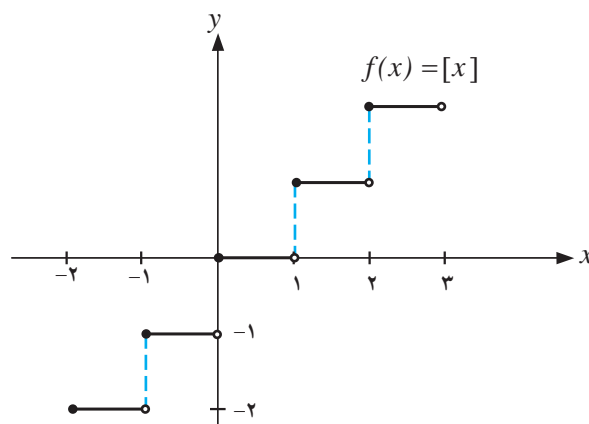


تعریف :

تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می دهد، تابع جزء صحیح نامیده می شود و با $f(x) = [x]$ نمایش داده می شود.

دامنه تابع جزء صحیح مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد صحیح می باشد. نمودار این تابع با توجه به جدول، در بازه $(-2, 3)$ رسم شده است.

x	$[x]$
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2





یک شرکت خدماتی برای هر ساعت کار، یا کسری از ساعت ۵ هزار تومان هزینه دریافت می کند. تابعی بنویسید که هزینه x ساعت کار را محاسبه کند. نمودار این تابع را نیز رسم کنید.

مثال: تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم می کنیم.

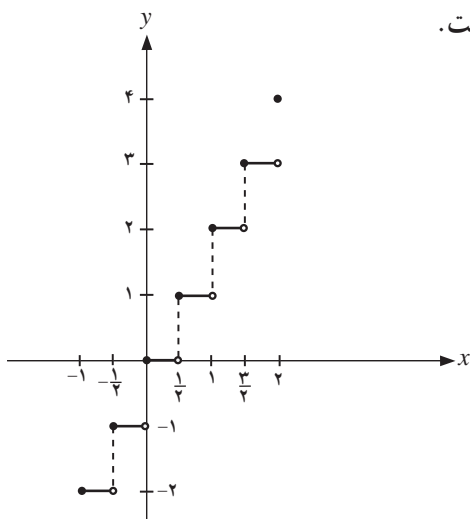
می دانیم که نمودار این تابع از انقباض نمودار تابع $[x]$ با ضریب $\frac{1}{4}$ به دست می آید. اگر $-1 \leq x \leq 2$ آنگاه $-2 \leq 2x \leq 4$ و با توجه به تعریف جزء صحیح، $[2x]$ مقدارهای -2 و -1 و 0 و 1 و 2 و 3 و 4 را اختیار خواهد کرد.

$$[2x] = -2 \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2}$$

با استدلال مشابه داریم:

$$[2x] = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0, [2x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

بنابراین تابع در بازه های متوالی به طول $\frac{1}{2}$ که از نقطه -1 شروع می شود به ترتیب مقدارهای -2 و -1 و 0 و 1 و 2 و 3 و 4 را اختیار خواهد کرد. نمودار این تابع به شکل زیر است.



مسائل



$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \leq -3 \\ -1 & -1 \leq x < 4 \\ 2 & 4 \leq x \end{cases}$$

۱- تابع پله ای روبه رو را رسم کنید.

۲- نمودار تابع $y = [\frac{1}{3}x]$ را در بازه $[-6, 6]$ رسم کنید.



۳- وارون پذیری تابع $y = [x]$ را بررسی کنید.

۴- نمودار توابع زیر را در بازه $[2, -2]$ رسم کنید.

الف) $y = 2[x]$ ب) $y = [-x]$

۵- نشان دهید تابع $y = x - [x]$ متناوب است و با به دست آوردن دوره تناوب آن، نمودار آن را رسم کنید.

۶- نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $[x]$ رسم کنید.

الف) $y = [x] - \frac{1}{2}$ ب) $y = 2[x] + 1$

۷- نمودارهای دو تابع $y = [x - 3]$ و $y = [x] - 3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین

این دو تابع وجود دارد؟

۸- یک شرکت پستی برای ارسال بسته‌های پستی تا کمتر از یک کیلوگرم ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته‌های از ۱ تا کمتر از ۲ کیلوگرم ۴ هزار تومان و از ۲ تا کمتر از ۳ کیلوگرم ۶ هزار تومان و برای بسته‌های بیشتر نیز به همین ترتیب دریافت می‌کند. اگر $f(x)$ هزینه ارسال یک بسته پستی x کیلوگرمی می‌باشد، نمودار آن را رسم کنید و معادله‌ای برای آن بیابید.